

MODEL KRZEPNIĘCIA ZŁOŻONEGO GEOMETRYCZNIE ODLEWU Z WYKORZYSTANIEM KOMBINOWANEJ METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

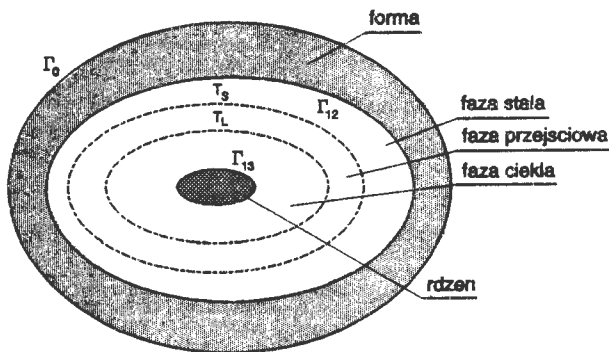
MAJCHRZAK Ewa
Politechnika Śląska
ul.Konarskiego 18a, 44-100 Gliwice

STRESZCZENIE

W pracy przedstawiono rozważania teoretyczne, opis algorytmu numerycznego oraz przykłady obliczeń ilustrujące możliwości wykorzystania tzw. kombinowanego wariantu metody elementów brzegowych do numerycznej symulacji krzepnięcia odlewu (rozważano zadanie płaskie). Metoda kombinowana została przedstawiona przez Currana, Crossa i Lewisa w pracy [1], natomiast niniejszy artykuł prezentuje jej rozszerzenie na obszary niejednorodne o zmiennych, zależnych od temperatury parametrach termofizycznych.

1.OPIS MATEMATYCZNY PROCESU

Rozważany niejednorodny obszar odlewu i formy pokazano na rys. 1.



Rys. 1. Niejednorodny obszar odlewu i formy

Niestalony przepływ ciepła w podobszarach odlewu, formy odlewniczej i rdzenia opisuje układ równań różniczkowych (równań Fouriera-Kirchhoffa) w postaci

$$\begin{aligned} x \in D_1 : c_1 \partial_t T_1(x, t) &= \operatorname{div}[\lambda_1 \operatorname{grad} T_1(x, t)] + Q(x, t) \\ x \in D_2 : c_2 \partial_t T_2(x, t) &= \operatorname{div}[\lambda_2 \operatorname{grad} T_2(x, t)] \\ x \in D_3 : c_3 \partial_t T_3(x, t) &= \operatorname{div}[\lambda_3 \operatorname{grad} T_3(x, t)] \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie $c_1, c_2, c_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ są ciepłami właściwymi odniesionymi do jednostki objętości i współczynnikami przewodzenia ciepła w obszarach D_1 (odlew), D_2 (forma) i D_3 (rdzeń), Q jest funkcją źródła związaną z wydzielaniem się ciepła utajonego $L[\text{J}/\text{m}^3]$ w podobszarze strefy przejściowej, ∂T jest szybkością stygnięcia (nagrzewania). Funkcja źródła jest proporcjonalna do lokalnej szybkości krzepnięcia, czyli

$$Q(x, t) = L \partial_t f_s(x, t) \quad (2)$$

gdzie f_s jest udziałem fazy stałej w otoczeniu punktu $x \in D_1$. Jeżeli założyć, że w interwale temperatur krzepnięcia $[T_S, T_L]$ udział ten jest znaną funkcją temperatury, to

$$Q = L \frac{df_s}{dT} \partial_t T(x, t) \quad (3)$$

Przy powyższym założeniu równanie Fouriera-Kirchhoffa dla obszaru odlewu można napisać w postaci

$$C_1 \partial_t T_1(x, t) = \operatorname{div}[\lambda_1 \operatorname{grad} T_1(x, t)], \quad C_1 = c_1 - L \frac{df_s}{dT} \quad (4)$$

W równaniu tym C_1 jest zastępczą pojemnością cieplną. Należy podkreślić, że w zakrzepłej części odlewu $f_s = 1$, natomiast w podobszarze cieczy $f_s = 0$, czyli zastępcza pojemność tych podobszarów jest równa ich ciepłu właściwemu. Takie podejście nazywane jest w literaturze *metodą jednego obszaru* [2, 3] - przez wprowadzenie parametru C_1 następuje formalne ujednorodnienie całego obszaru odlewu, a równocześnie równanie różniczkowe opisujące przepływ ciepła staje się równaniem dla pól bezźródłowych.

Układ równań (1) uzupełniają warunki brzegowe i początkowe. W szczególności, na brzegach Γ_{12} i Γ_{13} (por. rys. 1) przyjmuje się warunki ciągłości, a mianowicie

$$\begin{aligned} x \in \Gamma_{12} : \begin{cases} -\lambda_1 \partial_n T_1(x, t) = \lambda_2 \partial_n T_2(x, t) = q' \\ T_1(x, t) = T_2(x, t) = T' \end{cases} \\ x \in \Gamma_{13} : \begin{cases} -\lambda_1 \partial_n T_1(x, t) = \lambda_3 \partial_n T_3(x, t) = q'' \\ T_1(x, t) = T_3(x, t) = T'' \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

przy czym $\partial_n T$ oznacza pochodną normalną do brzegu. Warunki (5) dotyczą kontaktu idealnego i na ich miejsce można wprowadzić warunki z oporem cieplnym styku [4].

Na zewnętrznej powierzchni układu (Γ_0) przyjmuje się warunek Robina w postaci

$$x \in \Gamma_0 : -\lambda_2 \partial_n T_2(x, t) = \alpha [T_2(x, t) - T^\infty] \quad (6)$$

gdzie α jest współczynnikiem wymiany ciepła, T^∞ - temperaturą otoczenia. Warunki początkowe sprowadzają się do zadania pola temperatury w podobszarach układu w chwili przyjętej jako $t=0$.

2. METODA KOMBINOWANA

W pierwszej kolejności rozważać będziemy problem brzegowo-początkowy dotyczący jednorodnego obszaru o stałych parametrach termofizycznych:

$$\begin{cases} x \in D : \partial_t T(x, t) = a \operatorname{div}[\operatorname{grad} T(x, t)] = a \nabla^2 T(x, t), & a = \lambda/c \\ x \in \Gamma : \Phi[T(x, t), \partial_n T(x, t)] = 0 \\ t=0 : T(x, t) = T_p(x) \end{cases} \quad (7)$$

Powyższy problem zostanie rozwiązany za pomocą wariantu metody elementów brzegowych nazywanego metodą kombinowaną (*BEM using discretization in time* [4]).

Do rozważań wprowadzamy siatkę czasu ze stałym krokiem Δt

$$t^0 = 0 < t^1 < \dots < t^{f-1} < t^f < t^{f+1} < t^{f+2} < \dots < t^F < \infty \quad (8)$$

W przedziale czasu $t \in [t^f, t^{f+1}]$ wyjściowe równanie Fouriera-Kirchhoffa zastępujemy równaniem

$$t \in [t^f, t^{f+1}] : \frac{T(x, t^{f+1}) - T(x, t^f)}{\Delta t} = a \nabla^2 T(x, t^{f+1}) \quad (9)$$

które wynika z zastąpienia pochodnej temperatury względem czasu ilorazem różnicowym. Równanie (9) można zapisać w postaci

$$\nabla^2 T(x, t^{f+1}) - \frac{1}{a \Delta t} T(x, t^{f+1}) + \frac{1}{a \Delta t} T(x, t^f) = 0 \quad (10)$$

Do powyższego równania zastosujemy kryterium metody odchyłek ważonych [4], a mianowicie

$$\int_D \left[\nabla^2 T(x, t^{f+1}) - \frac{1}{a \Delta t} T(x, t^{f+1}) + \frac{1}{a \Delta t} T(x, t^f) \right] T^*(\xi, x) dD = 0 \quad (11)$$

gdzie $T^*(\xi, x)$ jest tzw. rozwiązaniem fundamentalnym i dla obszarów 2D zorientowanych w układzie współrzędnych prostokątnych jest to funkcja w postaci

$$T^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} K_0 \left(\frac{r}{\sqrt{a \Delta t}} \right) \quad (12)$$

przy czym $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ jest punktem, w którym umieszczono punktowe źródło ciepła, r - odległością między punktami x i ξ , K_0 - zmodyfikowaną funkcją Bessela rzędu zerowego [5].

Po przekształceniach matematycznych równanie (11) sprowadza się do

$$\begin{aligned} T(\xi, t^{j+1}) + \frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma} T^*(\xi, x) q(x, t^{j+1}) d\Gamma = \\ = \frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma} q^*(\xi, x) T(x, t^{j+1}) d\Gamma + \frac{1}{a\Delta t} \int_D T(x, t^j) T^*(\xi, x) dD \end{aligned} \quad (13)$$

przy czym

$$q(x, t) = -\lambda \partial_n T(x, t), \quad q^*(\xi, x) = -\lambda \partial_n T^*(\xi, x)$$

Dla $\xi \rightarrow \Gamma$ dochodzimy do następującego brzegowego równania całkowego

$$\begin{aligned} B(\xi) T(\xi, t^{j+1}) + \frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma} T^*(\xi, x) q(x, t^{j+1}) d\Gamma = \\ = \frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma} q^*(\xi, x) T(x, t^{j+1}) d\Gamma + \frac{1}{a\Delta t} \int_D T(x, t^j) T^*(\xi, x) dD \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie $B(\xi) \in (0, 1)$. Wartość współczynnika $B(\xi)$ związana jest z położeniem rozpatrywanego punktu brzegowego ξ i np. dla gładkiego fragmentu brzegu $B(\xi) = 0.5$.

Brzegowe równanie całkowe (14) jest odpowiednikiem problemu brzegowo-początkowego nieustalanej dyfuzji ciepła opisanego układem (7).

Równanie (14) rozwiązuje się metodami numerycznymi. Obliczenie całek po brzegu Γ oraz obszarze D wiąże się z koniecznością dyskretyzacji obszaru. Tak więc, brzeg obszaru Γ dzieli się na N elementów brzegowych Γ_j , $j=1, \dots, N$, natomiast jego wnętrze na L elementów wewnętrznych (najczęściej trójkątnych lub czworokątnych) D_l , $l=1, 2, \dots, L$. W przypadku stałych elementów brzegowych i wewnętrznych zakładamy, że

$$\begin{aligned} x \in \Gamma_j: \quad T(x, t^{j+1}) = T(x^j, t^{j+1}), \quad q(x, t^{j+1}) = q(x^j, t^{j+1}) \\ x \in D_l: \quad T(x, t^j) = T(x^l, t^j) \end{aligned} \quad (15)$$

i wówczas równanie (14) prowadzi do następującego układu równań ($i=1, 2, \dots, N$)

$$\sum_{j=1}^N g_{ij} q(x^j, t^{j+1}) = \sum_{j=1}^N h_{ij} T(x^j, t^{j+1}) + \sum_{l=1}^L p_{il} T(x^l, t^j) \quad (16)$$

gdzie

$$g_{ij} = \frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma_j} T^*(\xi^i, x) d\Gamma_j \quad (17)$$

$$h_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma_j} q^*(\xi^i, x) d\Gamma_j, & i \neq j \\ -0.5, & i = j \end{cases} \quad (18)$$

oraz

$$p_{il} = \frac{1}{a\Delta t} \int_{D_l} T^*(\xi^i, x) dD_l \quad (19)$$

Stosując zapis macierzowy układ rozwiązujący (16) można zapisać następująco

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{q}^{f+1} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{T}^{f+1} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{T}^f \quad (20)$$

Układ ten rozwiązuje się najczęściej metodą eliminacji Gaussa z wyborem elementu dominującego. Pozwala on wyznaczyć „brakujące” wartości brzegowe (temperatury i strumienie ciepła) w chwili t^{f+1} .

W drugim kroku realizacji algorytmu wyznacza się wartości temperatur w węzłach wewnętrznych ξ^i dla $i=N+1, N+2, \dots, N+L$ wykorzystując następującą zależność

$$T(\xi^i, t^{f+1}) = \sum_{j=1}^N h_{ij} T(x^j, t^{f+1}) - \sum_{j=1}^N g_{ij} q(x^j, t^{f+1}) + \sum_{i=1}^L p_{i1} T(x^i, t^f) \quad (21)$$

Otrzymany dla czasu t^{f+1} rozkład temperatury w rozpatrywanych węzłach stanowi warunek pseudopoczątkowy dla następnego kroku obliczeń.

3. OBSZARY NIEJEDNORODNE

Przedstawimy teraz sposób zastosowania metody kombinowanej dla obszarów niejednorodnych D_1, D_2 oraz D_3 na styku których założono warunki ciągłości strumienia ciepła i temperatury (por. rys. 1).

Nieustalone pole temperatury w obszarach D_1, D_2 i D_3 wyznaczać będziemy stosując metodę kombinowaną, która prowadzi (przy przyjętych oznaczeniach) do następujących układów rozwiązujących

– dla pierwszego obszaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{12} & \mathbf{G}_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}' \\ \mathbf{q}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{T}'' \end{bmatrix} + \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{T}_1^f \quad (22)$$

– dla obszaru drugiego

$$\begin{bmatrix} \alpha \mathbf{G}_2 - \mathbf{H}_2 & -\mathbf{G}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0^{f+1} \\ \mathbf{q}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \mathbf{G}_2 & \mathbf{H}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}^- \\ \mathbf{T}' \end{bmatrix} + \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{T}_2^f \quad (23)$$

– dla trzeciego obszaru

$$-\mathbf{G}_{31} \mathbf{q}'' = \mathbf{H}_{31} \mathbf{T}'' + \mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{T}_3^f \quad (24)$$

Po przeniesieniu niewiadomych na lewą stronę otrzymuje się

– dla pierwszego obszaru

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{12} & \mathbf{G}_{12} & -\mathbf{H}_{13} & \mathbf{G}_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{q}' \\ \mathbf{T}'' \\ \mathbf{q}'' \end{bmatrix} = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{T}_1^f \quad (25)$$

– dla drugiego obszaru

$$\begin{bmatrix} \alpha G_2 - H_2 & -H_{21} & -G_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0^{f+1} \\ T' \\ q' \end{bmatrix} = \alpha G_2 T'' + P_2 \cdot T_2^f \quad (26)$$

– dla obszaru trzeciego

$$\begin{bmatrix} -H_{31} & -G_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T'' \\ q'' \end{bmatrix} = P_3 \cdot T_3^f \quad (27)$$

Ostatecznie po „zszyciu” układów (25), (26) i (27) dochodzi się do następującego układu rozwiązującego

$$\begin{bmatrix} -H_{12} & G_{12} & -H_{13} & G_{13} & 0 \\ -H_{21} & -G_{21} & 0 & 0 & \alpha G_2 - H_2 \\ 0 & 0 & -H_{31} & -G_{31} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T' \\ q' \\ T'' \\ q'' \\ T_0^{f+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 T_1^f \\ P_2 T_2^f + \alpha G_2 T'' \\ P_3 T_3^f \end{bmatrix} \quad (28)$$

Należy przypomnieć, że zgodnie z oznaczeniami przyjętymi w równaniach (5) i (7) T' oraz q' oznaczają wektory poszukiwanych temperatur i strumieni ciepła na brzegu Γ_{12} w chwili t^{f+1} , T'' , q'' - odpowiednie wektory na brzegu Γ_{13} , a T_0^{f+1} - wektor temperatur na zewnętrznej powierzchni formy Γ_0 .

Po rozwiązaniu układu równań (28), wartości temperatur w węzłach wewnętrznych oblicza się traktując każdy z obszarów niezależnie (por. równanie (21)) i tworzą one warunek pseudopoczątkowy do następnego kroku obliczeń.

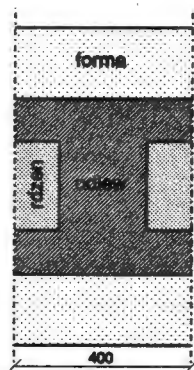
4. METODA KORYGOWANIA CHWILOWEGO POLA TEMPERATURY

Metoda korygowania chwilowego pola temperatury jest procedurą, która na etapie obliczeń numerycznych pozwala w kolejnych krokach czasu „przeliczać” otrzymane rozwiązanie (wartości temperatury w węzłach brzegowych i wewnętrznych odlewu) w ten sposób, aby uwzględnić zmienną z temperaturą zastępczą pojemność cieplną materiału odlewu. Podstawy teoretyczne metody (wraz z dowodem poprawności) oraz sposób jej wykorzystania w termodynamice procesów odlewniczych przedstawiono szczegółowo w [6, 7].

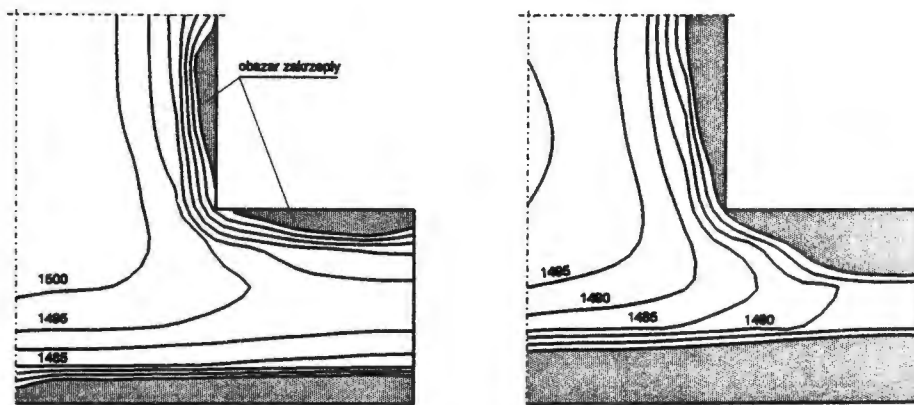
W niniejszej pracy zastosowano odmianę tej metody zaproponowaną przez R. Szopę [8]. Procedura korygowania wymaga przyjęcia pewnych założeń dotyczących zastępczej pojemności cieplnej, a mianowicie aproksymacji rzeczywistego przebiegu funkcji C_1 funkcją typu schodkowego. Obliczenia realizuje się dla obszaru odlewu formalnie sprowadzonego do jednej z faz np. zakłada się parametry fazy stałej, a następnie w każdym kroku czasu koryguje się pole temperatury w tych węzłach, które nie należą do fazy bazowej. W obliczeniach numerycznych przedstawionych w rozdziale następnym przyjęto funkcję C_1 składającą się z trzech „schodków” odpowiadających cieczy, strefie przejściowej i zakrzepłej części odlewu.

5. PRZYKŁAD OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

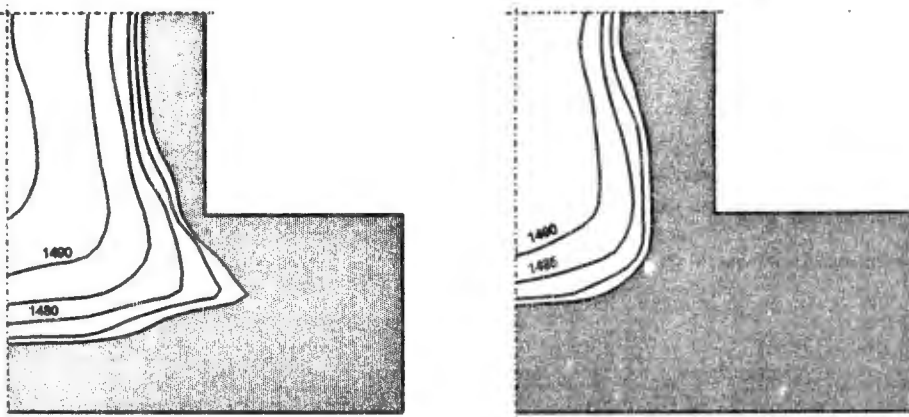
Na rys. 2 pokazano fragment odlewu w kształcie płyty, w którym występują powtarzające się węzły cieplne typu H. Odlew wykonany jest ze staliwa węglowego. Parametry termofizyczne staliwa, masy formierskiej i rdzenia przyjęto na podstawie danych cytowanych w [4]. Niejednorodny obszar rdzeń-odlew-masa formierska podzielono na 180 kwadratowych stałych elementów wewnętrznych, natomiast brzeg obszaru na 96 stałych elementów brzegowych (rozważano przy tym jedną czwartą obszaru, co wynikało z symetrii cieplnej i geometrycznej). Na rysunkach 3 i 4 pokazano pola temperatury i kształt obszaru zakrzepłego po czasach 10, 20, 30 i 40 min.



Rys. 2. Niejednorodny obszar odlewu i formy



Rys. 3. Pole temperatury po czasach 10 i 20 min.



Rys. 4. Pole temperatury po czasach 30 i 40 min.

W przedstawionym artykule po raz pierwszy przedstawiono możliwości wykorzystania metody kombinowanej do obliczeń krzepnięcia złożonego geometrycznie odlewu. W porównaniu z innymi wariantami MEB metoda kombinowana jest znacznie prostsza zarówno pod względem teoretycznym jak i realizacji numerycznej. Porównując ją z kolei z innymi znanymi metodami rozwiązywania zadań brzegowo-początkowych należy stwierdzić, że liczba niewiadomych w układzie rozwiązującym jest znacznie mniejsza niż w przypadku metody elementów skończonych, czy też metody różnic skończonych.

Pracę wykonano w ramach projektu badawczego 7 T07A 023 13.

LITERATURA

- [1] D.A.S Curan, M.Cross, B.A.Lewis, Solution of parabolic differential equations by the BEM using discretisation in time, *Appl. Math. Modelling*, No 4, 1980, 398–400.
- [2] V.R.Voller, Recent Developments in the Modelling of Solidification Process, *Comp. Modelling of Free and Moving Problems, Comp. Mech. Publ., de Gruyter*, 1991, 3-21.
- [3] C.P.Hong, T.Umeda, Y.Kimura, Solidification of Shaped Castings by the Boundary Element Method and Prediction of Shrinkage Cavity, *Official Exchange Paper, 53rd World Foundry Congress, Prague*, 1986
- [4] B.Mochnacki, J.Suchy, *Numerical Methods in Computations of Foundry Processes, Chapter 7* (written by E.Majchrzak), PFTA, Cracow, 1995.
- [5] J.Spanier, K.B.Oldham, *An Atlas of Functions*, Springer-Verlag, 1987.
- [6] E.Majchrzak, B.Mochnacki, The BEM Application for Numerical Solution of Non-steady and Non-linear Thermal Diffusion Problems, *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, Vol. 3, No 4, 1996, 327-346.
- [7] E.Majchrzak, B.Mochnacki, Application of the BEM in the Thermal Theory of Foundry, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 16, 1995, 99-121.
- [8] R.Szopa, Sprawozdanie z realizacji Grantu 7 T07A 023 13, (niepubl.).