

Jerzy Cybo  
Stanisław Jura  
Jerzy Chmiela

## APROKSYMACJA CECH STEREOLOGICZNYCH WTRĄCEŃ NIEMETALICZNYCH W STALWIE

### 1. Wprowadzenie i cel pracy

Podstawowe cechy stereologiczne elementów struktury stopu definiuje się w metalografii ilościowej na podstawie momentów zwykłych (trzeciego i drugiego rzędu) funkcji opisującej przestrzenny rozkład wielkości badanych mikrocząstek. Sprowadza się to w konsekwencji do wyrażenia analizowanych cech za pomocą parametrów tego rozkładu. Metodę obliczania tych ostatnich - opartą na pomiarach (na powierzchni zglądu) sumy cząstek, ich powierzchni właściwej i udziału objętościowego - przedstawia bardzo dokładnie praca J. Rysia [1].

Wspomniany pomiar głównych cech stereologicznych oparty jest w metalografii na ustaleniu liczby przecięć badanej fazy z liniami testującymi. Metoda ta wynika z zasady tzw. siecznych przypadkowych i całkowitego rzutu na płaszczyźnie. Ponieważ pomiary cech realizuje się z reguły za pomocą automatycznego analizatora obrazu typu Quantimet, często rozszerza się zakres tych pomiarów o równoczesne ustalenie liczby płaskich przekrojów cząstek w poszczególnych klasach wielkości.

Zarówno w przypadku analizy powierzchniowej, jak i przestrzennego rozkładu wielkości badanych elementów, analityczną podstawę rozważań stanowi funkcja Gaussa. Pomijając w tym miejscu motywację, w wielu pracach operuje się jednak formułami aproksymującymi tę funkcję. Cytowane w literaturze badania wykazują przy tym, że te same dane em-

pirycznie można opisać z identyczną dokładnością za pomocą wzoru Gaussa, Cauchy'ego czy funkcji logistycznej [2]. Z przedstawionych w [3, 4] rozważań wynika, iż właściwą aproksymację rozkładu normalnego zapewnia także formuła

$$f(x) = \frac{Z \exp [Z(m-x)]}{\{1 + \exp [Z(m-x)]\}^2}, \quad (1)$$

której funkcja pierwotna przyjmuje postać:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \frac{1}{1 + \exp [Z(m-x)]}, \quad (2)$$

gdzie

$x$  - wartość bieżąca zmiennej  $X$ ,

$m$  - wartość średnia zmiennej,

$Z$  - parametr zdefiniowany przez usytuowanie punktów przegięcia  $\lambda$  funkcji  $f(x)$ .

$$Z = \frac{\ln A}{\lambda} = \frac{\ln(2 + \sqrt{3})}{\lambda}, \quad (3)$$

przy czym postulat właściwej aproksymacji rozkładu normalnego jest spełniony, gdy  $\lambda$  pozostaje w stosunku do odchylenia standardowego  $\sigma$  (w funkcji Gaussa) w relacji:

$$\sigma = \beta \cdot \lambda = (1,2121 \div 1,3606) \lambda. \quad (4)$$

W odniesieniu do rozkładu cięciw wtrąceń w staliwie, które w dominującej części posiadają kształt kulisty, a ponadto wykazują logarytmiczno-normalny rozkład wielkości ( $X = \ln C$ ), w pracy [3, 4] zastosowano opis zbioru WN za pomocą funkcji:

$$\begin{aligned} N_A &= N_{As} \int_{\ln C_a}^{\ln C_b} \frac{Z \exp [Z(\overline{\ln C} - \ln C)]}{\{1 + \exp [Z(\overline{\ln C} - \ln C)]\}^2} d(\ln C) = \\ &= N_{As} \left. \frac{1}{1 + \exp [Z(\overline{\ln C} - \ln C)]} \right|_{\ln C_a}^{\ln C_b} \end{aligned} \quad (5)$$

oraz

$$N_A = U \frac{Z \exp [Z (\overline{\ln C} - \ln C)]}{\{1 + \exp [Z (\overline{\ln C} - \ln C)]\}^2} \quad [\text{mm}^{-2}], \quad (6)$$

przy czym średnią cięciwę wtrąceń  $\overline{C}$  aproksymowano wzorem:

$$\overline{C} = \exp \left[ \overline{\ln C} + \frac{1}{2} \left( \frac{\beta \ln A}{Z} \right)^2 \right], \quad (7)$$

gdzie

$N_A$  - ilość wtrąceń o cięciwie  $C$  na powierzchni  $1 \text{ mm}^2$ ,

$U$  - wskaźnik sumarycznej ilości wtrąceń  $N_{AS}$  określony przez

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} N_A d(\ln C) = N_{AS} \Delta \ln C \quad \left[ \frac{\text{mm}}{\text{mm}^2} \right], \quad (8)$$

$\Delta \ln C = \ln \frac{C_b}{C_a}$  - szerokość badanych klas WN,

$Z$  - zróżnicowanie wielkości wtrąceń (zdefiniowane przez punkty przecięcia  $\lambda$  funkcji  $N_A$  wg (3)),

$\overline{\ln C}$  - średnia logarytmiczna cięciwa wtrąceń,

$\ln C$  - bieżąca wielkość zmiennej  $X = \ln C$ .

Parametry  $U$ ,  $Z$ ,  $\ln C$  funkcji aproksymującej powierzchniowy rozkład wielkości wtrąceń w staliwie proponuje się w [3] wyznaczać numerycznie metodą optymalizacji. Zastosowany opis zbioru WN zapewnia przy tym wysokie testy statystyczne [3, 4]:

współczynnik korelacji  $R = 0,996 \pm 0,956$ ,

odchylenie standardowe  $S [N_A (\overline{\ln C})] = 4 \pm 16 \text{ mm}^{-2}$ ,

względny błąd oszacowania  $\gamma_{\alpha=0,05} = 3,8 \pm 8\%$ .

Uwzględniając, iż w wielu wypadkach analizowany jest powierzchniowy rozkład wielkości wtrąceń w ujęciu funkcji aproksymujących, np. wzory (5), (6), celem pracy jest stwierdzenie poprawności i dokładności opisu cech stereologicznych fazy niemetalicznej za pomocą parametrów takiej funkcji w konfrontacji z wartościami pomierzonymi na QMT.

## 2. Aproksymacja cech stereologicznych wtrąceń niemetalicznych w staliwie

Zgodnie z zasadami metalografii ilościowej, cięciwa  $C$  przeciętego przez zgląd wtrącenia jest równa połowie liczby przecięć  $n$  jego kontu-

ru z liniami testującymi, stąd dla powierzchni  $1 \text{ mm}^2$  zawierającej  $N_A$  wtrąceń można zapisać:

$$n = 2 C N_A \quad [\text{mm}^{-1}]. \quad (9)$$

W tej sytuacji podstawowe cechy stereologiczne fazy niemetalicznej można też podać w postaci operującej jedynie ilością i wielkością zanieczyszczeń<sup>\*:</sup>

- obwód właściwy

$$L_A = \frac{\pi}{2} n = \pi C N_A \quad \left[ \frac{\text{mm}}{\text{mm}^2} \right], \quad (10)$$

- powierzchnia właściwa

$$S_V = 2n = 4 C N_A \quad \left[ \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}^3} \right], \quad (11)$$

- udział objętościowy

$$V_V = \frac{\pi}{4} C^2 N_A \quad \left[ \frac{\text{mm}^3}{\text{mm}^3} \right], \quad (12)$$

- odległość między wtrąceniami

$$L_V = \frac{\pi(1 - V_V)}{L_A} = \frac{1}{C N_A} - \frac{\pi C}{4} \approx \frac{1}{C N_A} \quad [\text{mm}], \quad (13)^{**}$$

- liczba cząstek w objętości stopu

$$N_V = 6 \pi^2 V_V \left( \frac{N_A}{S_V} \right)^3 = \frac{6 \pi^3}{4^4} \frac{N_A}{C} \quad [\text{mm}^{-3}]. \quad (14)$$

Relacje te są równoważne w sensie ustaleń ilościowych klasycznemu zapisowi metalograficznemu prezentowanemu po pierwszym znaku równości. Wzory (10)-(14) mogą w tym przypadku określać wypadkową (średnią) wartość cech stereologicznych zanieczyszczeń lub wielkość cech dla poszczególnych klas wtrąceń. W pierwszym z tych przypad-

<sup>\*</sup>W pracy [5] można znaleźć podobnie zdefiniowane cechy  $L_A$ ,

$S_V$ ,  $V_V$

<sup>\*\*</sup>Ostateczna postać wzoru (13) wynika z faktu, iż przy analizie wtrąceń niemetalicznych może być odrzucony składnik  $\pi C/4$ , gdyż jego wielkość jest pomijalnie mała.

ków należy wprowadzić do tych relacji sumaryczną ilość wtrąceń  $N_{As}$  na powierzchni  $1 \text{ mm}^2$  oraz średnią ich wielkość  $\bar{C}$ . W sytuacji analizy wartości cech w kolejnych klasach wtrąceń - jaka często ma miejsce przy ocenie efektów rafinacji stopu -  $N_A, C$  oznaczają wielkości odpowiadające badanej klasie WN.

Wprowadzając relacje (7) i (8) do wzorów (10)-(14) można te ostatnie zapisać w postaci określającej średnie cechy stereologiczne wtrąceń za pomocą parametrów ( $U, Z, \ln \bar{C}$ ) funkcji zbioru wtrąceń [3]:

$$L_{As} = \frac{\pi U}{\Delta \ln C} \exp \left[ \ln \bar{C} + \frac{1}{2} \left( \frac{\beta \ln A}{Z} \right)^2 \right], \quad (15)$$

$$S_{Vs} = \frac{4U}{\Delta \ln C} \exp \left[ \ln \bar{C} + \frac{1}{2} \left( \frac{\beta \ln A}{Z} \right)^2 \right], \quad (16)$$

$$V_{Vs} = \frac{\pi U}{4 \Delta \ln C} \exp 2 \left[ \ln \bar{C} + \frac{1}{2} \left( \frac{\beta \ln A}{Z} \right)^2 \right], \quad (17)$$

$$L_{Vs} = 1 / \left\{ \frac{U}{\Delta \ln C} \exp \left[ \ln \bar{C} + \frac{1}{2} \left( \frac{\beta \ln A}{Z} \right)^2 \right] \right\}, \quad (18)$$

$$N_{Vs} = \frac{6 \pi^3}{4^4} \frac{U}{\Delta \ln C} \exp \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\beta \ln A}{Z} \right)^2 - \ln C \right]. \quad (19)$$

Wartości cech (10)-(14) odpowiadające poszczególnym klasom WN można natomiast zapisać w ujęciu parametrycznym używając wzoru (6):

$$L_A = \pi C \frac{UZ \exp \left[ Z (\ln \bar{C} - \ln C) \right]}{\left\{ 1 + \exp \left[ Z (\ln \bar{C} - \ln C) \right] \right\}^2}, \quad (20)$$

$$S_V = 4C \frac{UZ \exp \left[ Z (\ln \bar{C} - \ln C) \right]}{\left\{ 1 + \exp \left[ Z (\ln \bar{C} - \ln C) \right] \right\}^2}, \quad (21)$$

$$V_V = \frac{\pi}{4} C^2 \frac{UZ \exp \left[ Z (\ln \bar{C} - \ln C) \right]}{1 + \exp \left[ Z (\ln \bar{C} - \ln C) \right]^2}, \quad (22)$$

$$L_V = \frac{\left\{ 1 + \exp \left[ Z (\ln \bar{C} - \ln C) \right] \right\}^2}{C U Z \exp \left[ Z (\ln \bar{C} - \ln C) \right]}, \quad (23)$$

$$N_V = \frac{6 \pi^3}{4^4 C} \frac{UZ \exp \left[ Z (\ln \bar{C} - \ln C) \right]}{\left\{ 1 + \exp \left[ Z (\ln \bar{C} - \ln C) \right] \right\}^2}. \quad (24)$$

## 3. Ocena aproksymacji cech stereologicznych wtrąceń w staliwie

W celu przeprowadzenia oceny aproksymacji cech stereologicznych WN przez wzory (10)-(24) poddano badaniom wtrącenia niemetaliczne z 25 wytopów staliwa L20G2. Realizowano je stosując urządzenie Quantimet 720, wyznaczając ilość WN w poszczególnych klasach\* wielkości oraz określając średnie cechy stereologiczne zanieczyszczeń [3]. Na podstawie pomiarów  $N_A$  oraz wzorów (10)-(14) wyznaczono wartości cech stereologicznych dla poszczególnych klas WN, które dla jednego z wytopów zamieszczono w tabeli 1 (w liczniku). Korzystając z wzoru

Tabela 1. Wielkość cech stereologicznych WN dla poszczególnych klas cięciw obliczona według pomiaru  $N_A$  na QMT 720 i wzorów (10)-(14) (w liczniku) oraz aproksymacja tych cech za pomocą parametrów funkcji zbioru wtrąceń według wzorów (20)-(24) (w mianowniku)

Średnia cięciwa klasy C	Cecha stereologiczna WN				
	$L_A$	$S_V$	$V_V \cdot 10^4$	$L_V$	$N_V \cdot 10^{-3}$
$[10^{-3} \text{ mm}]$	$\left[ \frac{\text{mm}}{\text{mm}^2} \right]$	$\left[ \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}^3} \right]$	$\left[ \frac{\text{mm}^3}{\text{mm}^3} \right]$	$[\text{mm}]$	$[\text{mm}^{-3}]$
0,84	$\frac{0,06}{0,03}$	$\frac{0,07}{0,03}$	$\frac{0,12}{0,05}$	$\frac{56,4}{124,8}$	$\frac{18,27}{8,24}$
1,41	$\frac{0,18}{0,19}$	$\frac{0,23}{0,24}$	$\frac{0,65}{0,70}$	$\frac{17,0}{16,9}$	$\frac{21,51}{21,65}$
2,11	$\frac{0,58}{0,61}$	$\frac{0,74}{0,78}$	$\frac{2,07}{2,20}$	$\frac{5,4}{5,1}$	$\frac{30,34}{31,70}$
3,24	$\frac{1,00}{0,97}$	$\frac{1,27}{1,23}$	$\frac{7,08}{6,80}$	$\frac{3,1}{3,2}$	$\frac{22,00}{21,31}$
4,93	$\frac{0,59}{0,68}$	$\frac{0,74}{0,87}$	$\frac{6,20}{6,40}$	$\frac{5,4}{4,6}$	$\frac{5,56}{6,48}$
7,33	$\frac{0,37}{0,33}$	$\frac{0,47}{0,41}$	$\frac{5,57}{4,90}$	$\frac{8,5}{9,7}$	$\frac{1,59}{1,39}$
10,99	$\frac{0,28}{0,24}$	$\frac{0,35}{0,30}$	$\frac{3,59}{2,90}$	$\frac{11,4}{12,1}$	$\frac{0,52}{0,37}$
16,5	$\frac{0,34}{0,06}$	$\frac{0,43}{0,07}$	$\frac{4,41}{1,40}$	$\frac{9,3}{54,1}$	$\frac{0,28}{0,05}$

\* Szerokość (rozstęp) ośmiu klas wynosiła  $\Delta \ln C = 0,446 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$  dla badanego zakresu cięciw  $C = (0,56 \div 20) 10^{-3} \text{ mm}$ .

Tabela 2. Wartość średnich cech stereologicznych obliczonych (a, b, c) dla wtrąceń z przykładowego wytopu staliwa L20G2 w porównaniu z wielkościami pomierzonymi na QMT (d) oraz ich procentowe różnice

Średnia cecha stereologiczna	Kolumna	Kolumna			
		a	b	c	d
$L_{As}$	$\left[ \frac{\text{mm}}{\text{mm}^2} \right]$	3,26	3,10	2,81	2,98
$\delta L_{As}$	$[ \% ]$	9,4	4,0	5,7	-
$S_{Vs}$	$\left[ \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}^3} \right]$	4,16	3,95	3,58	3,79
$\delta S_{Vs}$	$[ \% ]$	9,7	4,2	5,5	-
$V_{Vs} \cdot 10^2$	$\left[ \frac{\text{mm}^3}{\text{mm}^3} \right]$	0,235	0,253	0,216	0,222
$\delta V_{Vs}$	$[ \% ]$	5,8	14,2	2,7	-
$L_{Vs}$	$[ \text{mm} ]$	0,968	-	1,110	1,052
$\delta L_{Vs}$	$[ \% ]$	7,9	-	5,5	-
$N_{Vs}$	$[ \text{mm}^{-3} ]$	94190	91190	91940	103600
$\delta N_{Vs}$	$[ \% ]$	9,1	11,9	11,2	-

(6) wyznaczono numerycznie parametry funkcji zbioru wtrąceń, które dla przykładowego wytopu wynoszą<sup>\*:</sup>

$$U = 129,67 \quad \left[ \frac{10^{-3} \text{mm}}{\text{mm}^2} \right],$$

<sup>\*</sup>Parametry te realizują opis zbioru WN przy zachowaniu statystyki:  
 $R = 0,991$ ,  $S [N_A (\ln C)] = 6$ ,  $\gamma_{0,05} = 4,2\%$ .

$$Z = 3,244 \quad \left[ \frac{1}{10^{-3} \text{ mm}} \right],$$

$$\overline{\ln C} = 0,978 \quad \left[ 10^{-3} \text{ mm} \right].$$

Wprowadzając wartości tych parametrów do wzorów (20)-(24) aproksymowano tym samym cechy stereologiczne dla poszczególnych klas wtrąceń, tabela 1 (w mianowniku).

Traktując ilość i wielkość wtrąceń we wzorach (10)-(14) jako wartości  $N_{AS}$  oraz  $\bar{C}$ , obliczono tym sposobem cechy średnie (wypadkowe), które zamieszczono w kolumnie a tabeli 2. Sumując natomiast wielkości cech z poszczególnych klas WN (mianownik kolumn w tabeli 1) uzyskano wynik zamieszczony w kolumnie b tabeli 2. Korzystając jednocześnie z wzorów (15)-(19), średnie cechy aproksymowane parametrami funkcji zbioru wtrąceń ujęto w kolumnie c tabeli 2, której kolumna d zawiera wynik bezpośredniego pomiaru tych cech na QMT 720.

Analizując zestawienie cech stereologicznych obliczonych dla kolejnych klas cięciw (tab. 1) można stwierdzić bardzo dużą zgodność opisu cech wzorami (10)-(14) oraz (20)-(24), co jest świadectwem

Tabela 3. Korelacja między opisem rozkładu cech (dla cięciwy  $C = 4,93 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ ) według wzorów (20)-(24) oraz pomiarem na QMT i obliczeniem według wzorów (10)-(14)

Cecha stereologiczna		Współczynniki korekcyjne wzorów (20)-(24)		Współczynnik korelacji R	Odchylenie standardowe*
		$B_1$	$B_0$		
$L_A$	$\left[ \frac{\text{mm}}{\text{mm}^2} \right]$	0,852	-0,015	0,944	0,063
$S_V$	$\left[ \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}^3} \right]$	0,852	-0,020	0,944	0,080
$V_V$	$\left[ \frac{\text{mm}^3}{\text{mm}^3} \right]$	0,852	$-2 \cdot 10^{-5}$	0,944	$7,7 \cdot 10^{-5}$
$L_V$	$[ \text{mm} ]$	1,007	-0,709	0,944	0,80
$N_V$	$[ \text{mm}^{-3} ]$	0,852	-148,1	0,944	600

Wymiar  $B_0$  i S podano w jednostkach danej cechy.

\*Względny błąd oszacowania wynosi  $\gamma_{0,05} = 5 \div 6\%$ .



Tabela 4. Korelacja między aproksymacją średnich cech stereologicznych według wzorów (15)-(19) oraz pomiarem cech na QMT 720

Cecha stereologiczna	Współczynniki korelacyjne wzorów (15)-(19)		Współczynnik korelacji	Odchylenie standardowe*
	$B_1$	$B_0$	R	S
$L_{Vs} \left[ \frac{\text{mm}}{\text{mm}^2} \right]$	1,11	0,157	0,941	0,288
$S_{Vs} \left[ \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}^3} \right]$	1,11	0,200	0,941	0,366
$V_{Vs} \left[ \frac{\text{mm}^3}{\text{mm}^3} \right]$	1,00	$4,3 \cdot 10^{-4}$	0,931	$5,2 \cdot 10^{-4}$
$L_{Vs} \left[ \text{mm} \right]$	0,89	-0,038	0,912	0,113
$N_{Vs} \left[ \text{mm}^{-3} \right]$	0,62	28655	0,906	8717

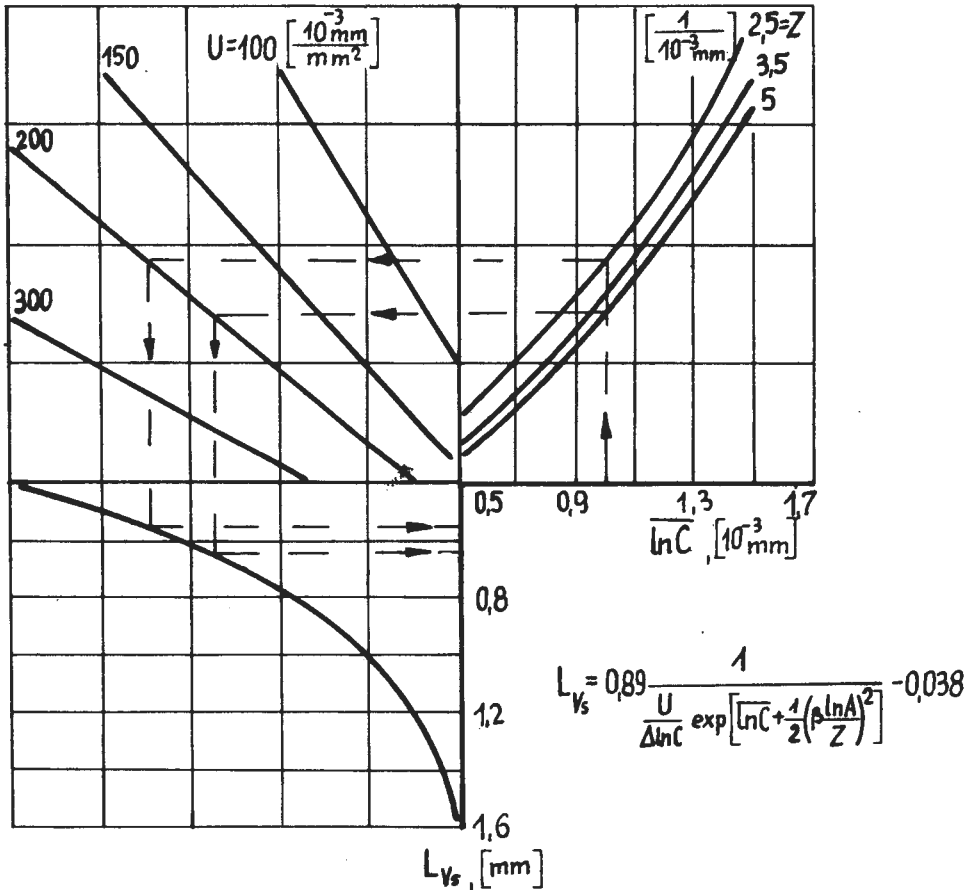
Wymiar  $B_0$  i S podano w jednostkach danej cechy.

\*Względny błąd oszacowania wynosi  $\gamma_{0,05} = 3,8 \div 8\%$ .

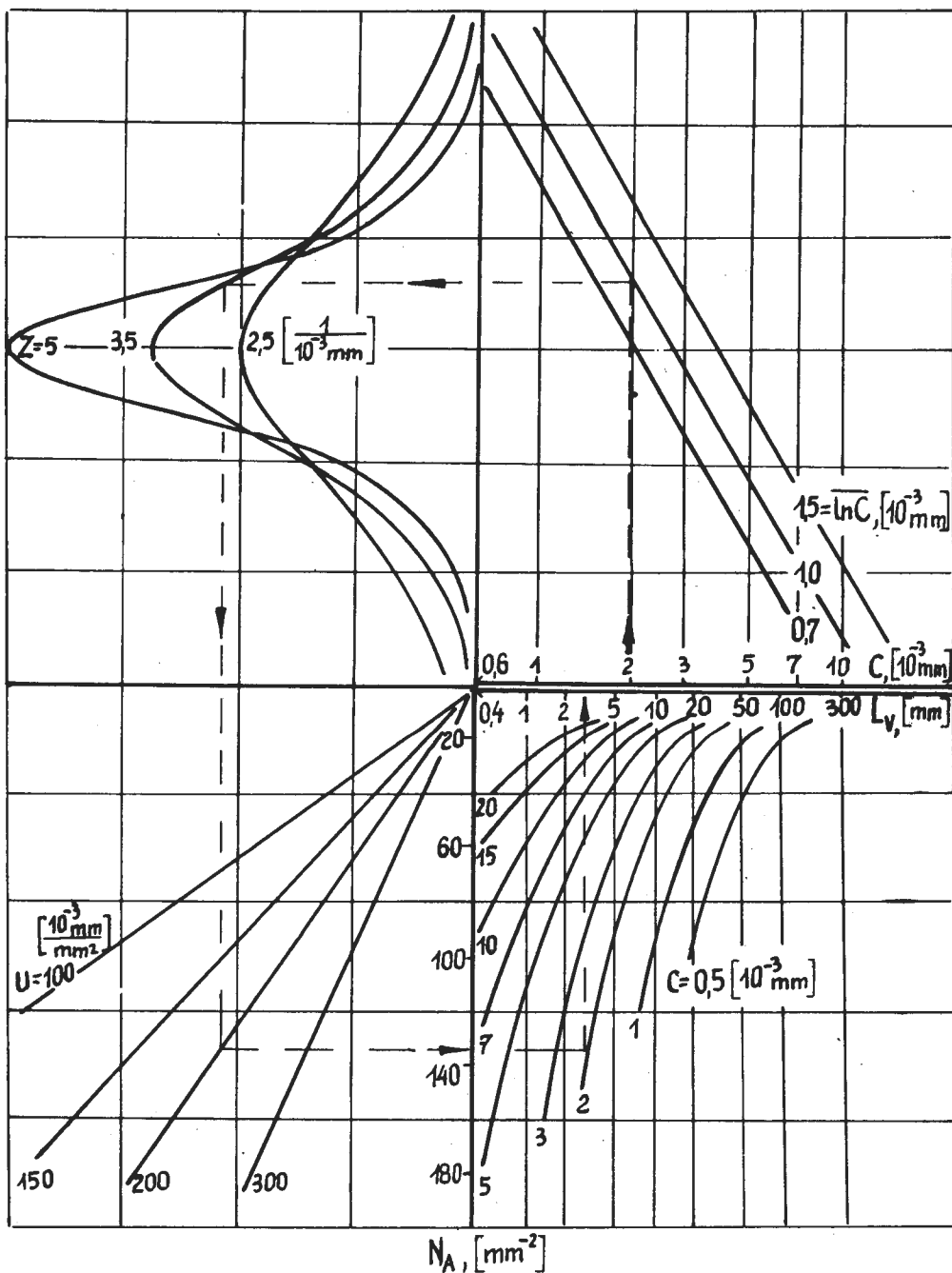
poprawnej aproksymacji cech przez te ostatnie. Jedynie w przypadku klas skrajnych - dla wtrąceń bardzo małych i bardzo dużych - obserwuje się istotne różnice. Jest to jednak zrozumiałe, gdyż klasy te są zawsze obciążone największym błędem pomiaru na QMT i z tego względu często odrzuca się je przy analizie metalograficznej. Potwierdzeniem właściwej aproksymacji cech stereologicznych (zarówno średnich, jak i dla poszczególnych klas cięciw WN) jest konfrontacja cech średnich (obliczonych trzema sposobami) z wartościami pomierzonymi bezpośrednio na QMT (tab. 2). Niewielkie różnice procentowe  $\delta$  są tego wyrazem.

Uwagi powyższe zweryfikowano dodatkowo poddając analizie regresji liniowej relacje aproksymujące cechy stereologiczne wtrąceń z 25 wytopów staliwa L20G2. W przypadku rozkładu wielkości cech wynik aproksymacji według wzorów (20)-(24) korelowano z pomiarem  $N_A$  na QMT i następnym obliczeniem cech na podstawie równań (10)-(14). Przykładowe zestawienie takiego opracowania, dla cięciwy  $C = 4,93 \cdot 10^{-3}$  mm ujęto w tabeli 3. Cechy stereologiczne średnie, aproksymowane wzorami (15)-(19), korelowano z bezpośrednim ich

pomiarem na QMT. Wyniki zestawiono w tabeli 4. W obu tabelach współczynniki korekcyjne oznaczają:  $B_1$  - mnożnik wzoru aproksymacyjnego,  $B_0$  - wyraz wolny. Jednocześnie na rysunkach 1 i 2 przedstawiono graficzną interpretację opisu jednej z cech opartą na wzorach aproksymacyjnych (18) i (23).



Rys. 1. Ocena średniej odległości między wtrąceniami w ujęciu parametrów funkcji zbioru wtrąceń (wg wzoru (18))



Rys. 2. Odległość między wtrąceniami o danej cięciwie  $C$  w ujęciu parametrów funkcji zbioru wtrąceń (wg wzoru (23))

#### 4. Podsumowanie

Wyniki przedstawione w tabelach 1 i 2 oraz testy statystyczne w tabelach 3 i 4 wskazują na dużą zbieżność i dokładność aproksymacji cech stereologicznych z wartościami pomierzonymi. W związku z faktem, iż omawiane metody opisu cech obarczone są względnym błędem oszacowania ( $\gamma = 3,8 \div 8\%$ ) nie większym niż błąd pomiaru realizowanego na QMT (z reguły  $\gamma_{\text{QMT}} = 10 \div 20\%$ ), dokładność tych metod można uznać za wystarczającą do aproksymowania charakterystyki zbioru wtrąceń. Sytuacja ta jest jednocześnie wyrazem:

- właściwego opisu rozkładu powierzchniowego wielkości wtrąceń za pomocą funkcji aproksymacyjnej (6),
- prawdziwości opisu wielkości cech stereologicznych za pomocą parametrów funkcji zbioru wtrąceń, a także świadczy o możliwości stosowania analizowanych wzorów (10)-(24) w zagadnieniach wymagających podobnej interpretacji.

#### Literatura

1. Ryś J.: Wstęp do metalografii ilościowej, Śląsk Katowice 1970.
2. Feller W.: Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, PWN, Warszawa 1981.
3. Cybo J.: Sprawozdanie z pracy naukowo-badawczej IPT USI, 1984 (nie publikowane).
4. Cybo J., Jura S.: Zmiana udarności staliwa w funkcji temperatury oraz charakterystyki zbioru wtrąceń, Inżynieria Materiałowa (w druku).
5. Standish N., Simpson I.: Determination of Size - Frequency Distributions of Nonmetallic Inclusions in As-Cast Metals, Metallography, t. 10, nr 4, 1977.