

METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W ANALIZIE UKŁADÓW SPRĘŻYSTYCH ZE SZTYWNYMI WŁÓKNAMI

PIOTR FEDELIŃSKI

Katedra Wytrzymałości Materiałów i Metod Komputerowych Mechaniki, Politechnika Śląska

Streszczenie. W pracy przedstawiono sformułowanie i zastosowanie metody elementów brzegowych (MEB) w analizie obciążonych statycznie tarcz sprężystych z doskonale sztywnymi włóknami. Podano równania całkowite dla układu z włóknami, równania opisujące przemieszczenia sztywnego włókna i warunki równowagi sił działających na włókno. Opisano realizację numeryczną metody. Opracowany program komputerowy zastosowano do analizy oddziaływania włókna na pęknięcie w rozciąganej tarczy prostokątnej.

1. WPROWADZENIE

Materiały kompozytowe wzmacnia się włóknami w celu zwiększenia wytrzymałości, sztywności i stateczności układu. Jeżeli sztywność włókien jest dużo większa niż sztywność osnowy, wówczas można modelować włókna jako sztywne wzmocnienia w ciele odkształcalnym. Analiza takich układów, z dużą liczbą losowo rozmieszczonych włókien, wymaga zastosowania metod numerycznych.

Metoda elementów brzegowych (MEB) jest uniwersalną metodą komputerową, którą stosuje się w różnych dziedzinach mechaniki układów odkształcalnych [1], [2]. Jedną z nowych dziedzin zastosowania metody jest mechanika kompozytowych. Hu, Chandra i Huang [4] analizowali za pomocą równań całkowitych oddziaływanie pęknięć i sztywnych włókien w pobliżu brzegu rozdzielającego dwa różne materiały. Salgado i Aliabadi [7] modelowali za pomocą dualnej MEB tarcze z pęknięciami wzmacniane belkami. Rozpatrywano układy z wieloma wzrastającymi pęknięciami. Dong, Lo i Cheung [3] stosowali MEB do analizy oddziaływania pęknięć i włókien w nieograniczonych tarczach. Zastosowano specjalne elementy brzegowe do modelowania przemieszczeń i sił powierzchniowych w otoczeniu pęknięć i sztywnych włókien. Liu, Nishimura i Otani [5] stosowali szybką wielobiegunową MEB do analizy kompozytów zbrojonych nanorurkami węglowymi. Obliczono zastępcze własności materiałowe dla układów modelowanych jako ciała trójwymiarowych o bardzo dużej liczbie stopni swobody.

Celem pracy jest przedstawienie sformułowania i zastosowań MEB w analizie wytrzymałościowej obciążonych statycznie, dwuwymiarowych i liniowo-sprężystych kompozytów ze sztywnymi i prostoliniowymi włóknami. W artykule przedstawiono brzegowe równania całkowite dla kompozytu ze sztywnymi włóknami, równania równowagi włókna i numeryczną realizację metody. Opracowany program komputerowy wykorzystano do analizy

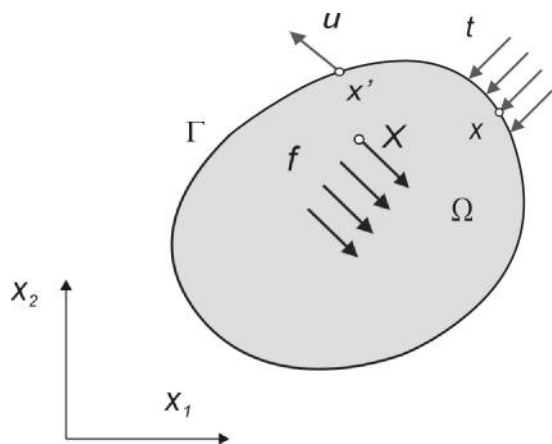
oddziaływania sztywnego włókna z pęknięciem. Badano wpływ odległości między włóknem i pęknięciem na współczynniki intensywności naprężeń. Prezentowana metoda pozwala na łatwą modyfikację położenia włókien i pęknięć.

2. BRZEGOWE RÓWNANIE CAŁKOWE DLA TARCZY Z WŁÓKNAMI

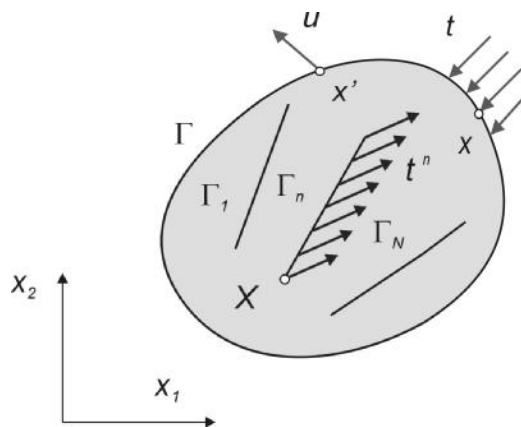
Rozważmy tarczę wykonaną z materiału jednorodnego, izotropowego i liniowo-sprężystego. Brzeg tarczy oznaczono przez Γ , a obszar zajmowany przez tarczę przez Ω (rys. 1). Tarcza jest obciążona statycznie na brzegu zewnętrznym Γ siłami powierzchniowymi t_j , a obszar tarczy - siłami objętościowymi f_j . Związek między obciążeniem tarczy, a przemieszczeniami u_j określa tożsamość Somigliany [1]

$$c_{ij}(x)u_j(x') + \int_{\Gamma} T_{ij}(x',x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x',x)t_j(x)d\Gamma(x) + \int_{\Omega} U_{ij}(x',X)f_j(X)d\Omega(X), \quad (1)$$

gdzie: x' jest punktem kolokacji, dla którego układane jest równanie całkowe, x jest punktem brzegowym, a X punktem należącym do obszaru ciała, c_{ij} jest stałą zależną od położenia punktu x' , U_{ij} i T_{ij} są rozwiązaniami fundamentalnymi Kelvina. W równaniach stosowana jest konwencja sumacyjna, a indeksy dla zagadnienia dwuwymiarowego przyjmują wartości $i,j=1,2$.



Rys. 1. Tarcza sprężysta



Rys. 2. Tarcza sprężysta z włóknami

Załóżmy, że w tarczy znajdują się prostoliniowe, cienkie i doskonale sztywne włókna (rys. 2), które są idealnie połączone ze sprężystą osnową. Na skutek obciążenia i odkształcenia tarczy, w miejscu połączenia włókien z tarczą wystąpią siły oddziaływania. Siły można traktować jako szczególne siły objętościowe rozłożone wzdłuż linii włókien. Brzegowe równanie całkowe dla tarczy obciążonej siłami powierzchniowymi i siłami oddziaływania włókien ma postać

$$c_{ij}(x)u_j(x') + \int_{\Gamma} T_{ij}(x',x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x',x)t_j(x)d\Gamma(x) + \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} U_{ij}(x',X)t_j^n(X)d\Gamma_n(X), \quad (2)$$

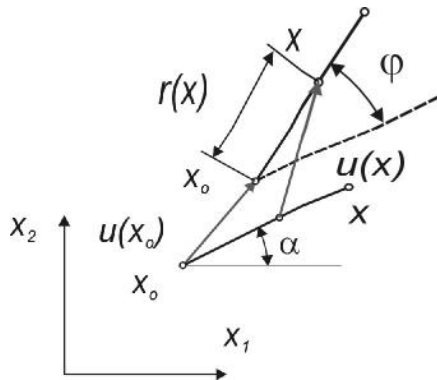
gdzie: N jest liczbą włókien, Γ_n - odcinkiem, wzdłuż którego znajduje się włókno, t_j^n - siłą oddziaływania włókna.

3. PRZEMIESZCZENIA I RÓWNANIA RÓWNOWAGI SZTYWNEGO WŁÓKNA

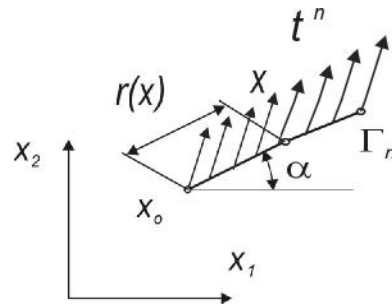
Przemieszczenia włókien spowodowane są odkształceniami tarczy. Przemieszczenie dowolnego punktu włókna x można wyrazić za pomocą przemieszczenia końca włókna x_0 i kąta obrotu włókna j (rys. 3). Dla małych kątów obrotu włókna, składowe przemieszczenia dowolnego punktu określone są równaniami:

$$u_1(x) = u_1(x_0) - j r(x) \sin a, \tag{3}$$

$$u_2(x) = u_2(x_0) + j r(x) \cos a, \tag{4}$$



Rys. 3. Przemieszczenia sztywnego włókna



Rys. 4. Siły działające na włókno

gdzie: a jest początkowym kątem pochylenia włókna względem osi globalnego układu współrzędnych x_1 , r jest odległością punktu x od początku włókna x_0 .

Rozpatrywany układ, a także każde włókno znajduje się w równowadze. Siły działające na każde włókno powinny spełniać następujące warunki równowagi (rys. 4):

$$\int_{\Gamma_n} t_1^n(x) d\Gamma_n(x) = 0, \tag{5}$$

$$\int_{\Gamma_n} t_2^n(x) d\Gamma_n(x) = 0, \tag{6}$$

$$\int_{\Gamma_n} [-t_1^n(x)r(x) \sin a + t_2^n(x)r(x) \cos a] d\Gamma_n(x) = 0, \tag{7}$$

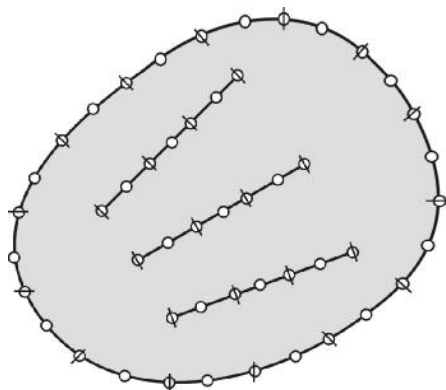
Ostatnie równanie jest warunkiem równowagi momentów sił względem początku włókna x_0 .

4. REALIZACJA NUMERYCZNA METODY

Pierwszym etapem realizacji numerycznej metody jest podział brzegu zewnętrznego i włókien na elementy brzegowe (rys. 5). W opracowanym programie komputerowym zastosowano 3-węzłowe kwadratowe elementy brzegowe. Na brzegu zewnętrznym interpoluje się zmienność współrzędnych punktów, przemieszczeń i sił powierzchniowych, a wzdłuż włókien zmienność sił oddziaływania. Brzegowe równania całkowe układane są dla węzłów na brzegu zewnętrznym i wzdłuż włókien. Przemieszczenia węzłów włókien można wyrazić poprzez przemieszczenia końców włókien i ich kąty obrotu, korzystając z równań (3) i (4). Równania można zapisać w następującej postaci macierzowej

$$\mathbf{u} = \mathbf{I}\mathbf{u}_f, \quad (8)$$

gdzie: macierz jednokolumnowa \mathbf{u} zawiera składowe przemieszczenia węzłów włókien, macierz \mathbf{I} zależy od położenia węzłów, a macierz jednokolumnowa \mathbf{u}_f zawiera składowe przemieszczenia końców włókien i kąty obrotu.



Rys. 5. Dyskretyzacja tarczy i włókien za pomocą elementów kwadratowych

Warunki równowagi włókien (5), (6) i (7) można zapisać w postaci macierzowej

$$\mathbf{E}\mathbf{t}_f = 0, \quad (9)$$

gdzie: macierz \mathbf{E} zależy od położenia węzłów wzdłuż włókien, a macierz jednokolumnowa \mathbf{t}_f zawiera wartości węzłowe składowych sił w węzłach włókien. Macierz \mathbf{E} otrzymuje się w wyniku całkowania równań (5), (6) i (7), przy założeniu kwadratowej zmienności sił oddziaływania wzdłuż elementów włókien. Ze względu na prostą postać równań równowagi, całki oblicza się analitycznie.

Brzegowe równania całkowe uwzględniające zależność (8) i uzupełnione o warunki równowagi (9) można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ee} & 0 \\ \mathbf{H}_{fe} & \mathbf{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e \\ \mathbf{u}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ee} & \mathbf{G}_{ef} \\ \mathbf{G}_{fe} & \mathbf{G}_{ff} \\ 0 & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_e \\ \mathbf{t}_f \end{bmatrix}, \quad (10)$$

gdzie: podmacierze z indeksem e dotyczą brzegu zewnętrznego, a wielkości z indeksem f dotyczą włókien, natomiast podmacierze \mathbf{H} i \mathbf{G} zależą od całek brzegowych rozwiązań fundamentalnych i funkcji kształtu, które oblicza się numerycznie metodą Gaussa.

Następnie układ równań algebraicznych modyfikuje się w ten sposób, że nieznanne wielkości znajdują się po jednej stronie układu, a wielkości znane po drugiej stronie. Pierwsza modyfikacja dotyczy nieznannej siły oddziaływania \mathbf{t}_f

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ee} & -\mathbf{G}_{ef} & 0 \\ \mathbf{H}_{fe} & -\mathbf{G}_{ff} & \mathbf{I} \\ 0 & \mathbf{E} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e \\ \mathbf{t}_f \\ \mathbf{u}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ee} \\ \mathbf{G}_{fe} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_e \end{bmatrix}. \quad (11)$$

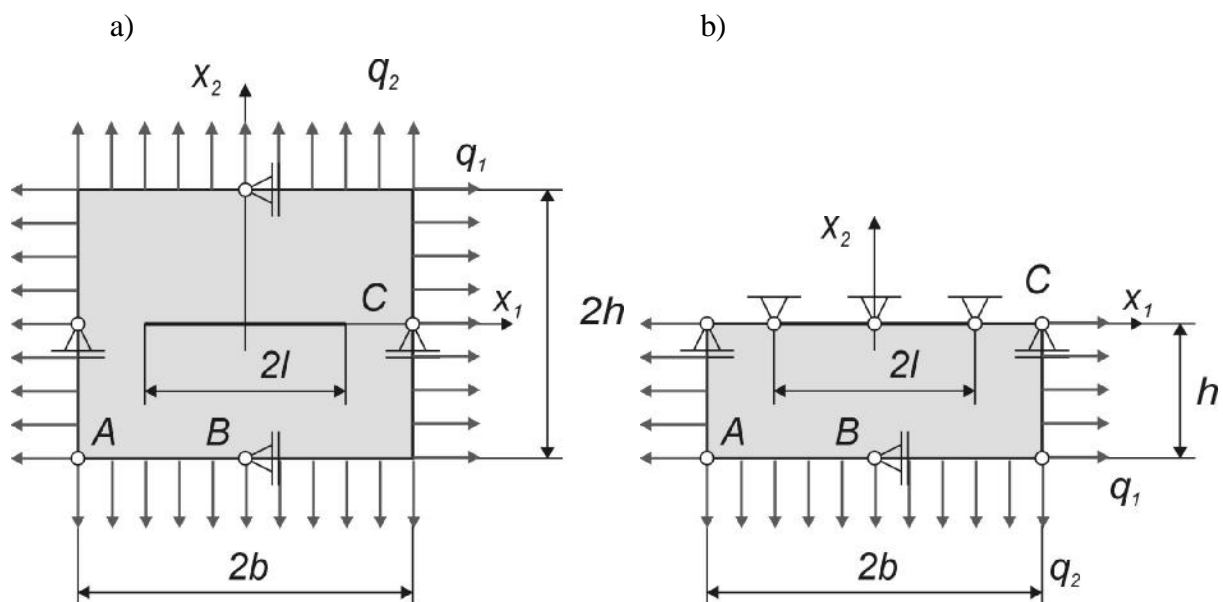
Ostateczne przegrupowanie dotyczy zadanych i nieznanymi wielkości na brzegu zewnętrznym. Zmodyfikowany układ rozwiązuje się ze względu na nieznanne przemieszczenia i siły powierzchniowe na brzegu zewnętrznym oraz przemieszczenia i siły oddziaływania włókien.

5. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

Opracowano program komputerowy, które stosuje przedstawioną metodę do wyznaczania przemieszczeń i sił powierzchniowych w tarczach sprężystych ze sztywnymi włóknami. W celu sprawdzenia poprawności rozwiązań numerycznych i przedstawienia możliwych zastosowań analizowano dwa przykłady. Rozpatrywano tarczę prostokątną o długości $2b=5$ cm i wysokości $2h=4$ cm, która zawiera sztywne włókno o długości $2l=3$ cm (rys. 6 i 8). Tarcza wykonana jest z materiału o module Younga $E=2 \times 10^{11}$ Pa i współczynnika Poissona $\nu=0.3$, która znajduje się w płaskim stanie odkształcenia. Tarcza jest obciążona siłami rozłożonymi równomiernie wzdłuż krawędzi w kierunku poziomym q_1 albo pionowym q_2 o natężeniu $q_1=q_2=q=10^5$ Pa. Tarcza podparta jest na czterech podporach przesuwnych znajdujących się na osiach symetrii, które umożliwiają swobodne odkształcenia tarczy.

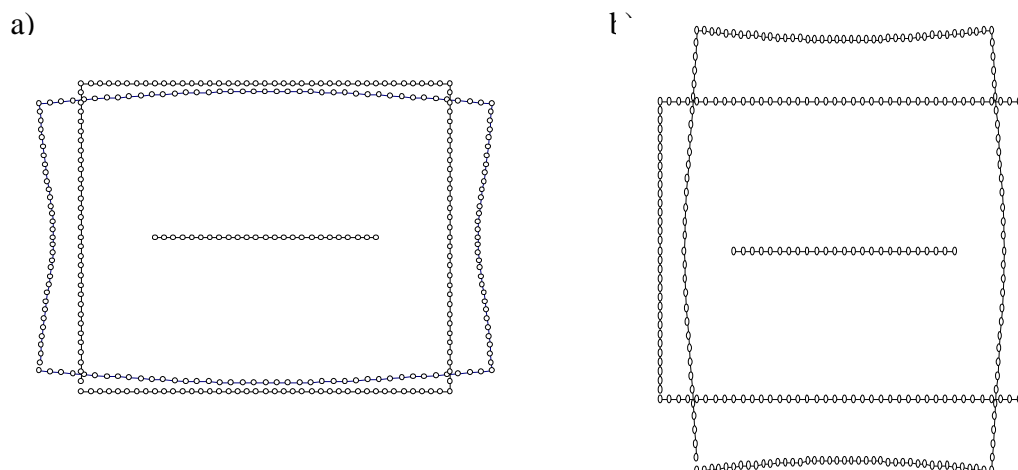
5.1. Tarcza prostokątna z włóknem

Sztywne włókno znajduje się na poziomej osi symetrii (rys. 6a). Rozpatrzono dwa przypadki obciążenia: siłami poziomymi i pionowymi. W celu sprawdzenia poprawności rozwiązania analizowano dolną połowę tarczy (rys. 6b). W miejscu gdzie znajduje się włókno, sztywno utwierdzono brzeg, a pozostałe punkty na osi symetrii mogą przemieszczać się tylko w kierunku poziomym. Brzeg całej tarczy podzielono na 72, a włókno na 12 kwadratowych elementów brzegowych. Brzeg połowy tarczy podzielono na 56 kwadratowych elementów brzegowych.



Rys. 6. Tarcza prostokątna z włóknem: a) cała tarcza, b) połowa tarczy

Na rys. 7 przedstawiono tarczę nieodkształconą i odkształconą pod wpływem sił poziomych i pionowych. W celu pokazania deformacji, przemieszczenia powiększono wielokrotnie.



Rys. 7. Odształcenia tarczy: a) obciążonej poziomo, b) obciążonej pionowo

W tabeli 1 przedstawiono składowe przemieszczenia węzłów A, B i C, pokazanych na rys. 6. Względne różnice przemieszczeń węzłów dla całej tarczy i jej połowy są mniejsze niż 0.1%.

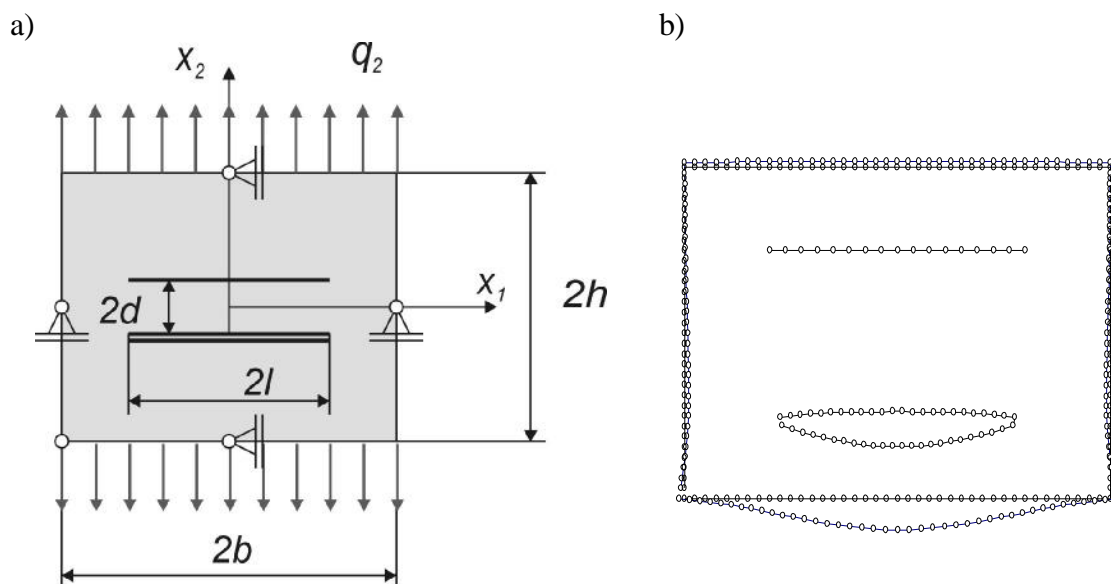
Tabela 1. Przemieszczenia wybranych węzłów tarczy [10^{-6} cm]

Tarcza	Obciążenie poziome q_1				Obciążenie pionowe q_2			
	$u_1(A)$	$u_2(A)$	$u_2(B)$	$u_1(C)$	$u_1(A)$	$u_2(A)$	$u_2(B)$	$u_1(C)$
cała	-1.159	0.5241	0.2086	0.7675	0.4967	-0.9675	-0.8322	-0.3289
połowa	-1.159	0.5238	0.2088	0.7674	0.4967	-0.9673	-0.8323	-0.3289

5.2. Tarcza prostokątna z włóknem i pęknięciem

W tarczy znajduje się sztywne włókno i pęknięcie, które położone są symetrycznie względem poziomej osi symetrii (rys. 8a). Odległość między włóknem i pęknięciem jest równa $2d$. Tarcza obciążona jest pionowymi siłami o natężeniu q_2 . Do modelowania pęknięcia zastosowano metodę dualną MEB, w której dyskretyzuje się obydwie krawędzie pęknięcia [6]. Współczynniki intensywności naprężeń (WIN) wyznaczono na podstawie J -całki niezależnej od konturu całkowania. WIN znormalizowano poprzez podzielenie przez WIN dla tarczy nieograniczonej zawierającej takie same pęknięcie, który jest równy $K_o = q\sqrt{\rho l}$. Badano wpływ odległości włókna i pęknięcia na WIN. Brzeg tarczy podzielono na 72 kwadratowe elementy brzegowe, włókno na 8 elementów, a krawędzie pęknięcia na 16 elementów. Na rys. 8b przedstawiono nieodkształconą i odkształconą tarczę. W celu pokazania deformacji, przemieszczenia powiększono wielokrotnie.

W tabeli 2 przedstawiono znormalizowane WIN dla różnej odległości włókna i pęknięcia. Wprowadzenie włókna, przy względnej odległości $d/l=1/3$, powoduje nieznaczne zmniejszenie współczynnika K_I i zwiększenie współczynnika K_{II} . Zwiększanie odległości między włóknem i pęknięciem powoduje wzrost WIN. Wzrost WIN jest spowodowany głównie zbliżaniem się pęknięcia do obciążonej krawędzi.



Rys. 8. Tarcza prostokątna z włóknem i pęknięciem: a) wymiary i obciążenie tarczy, b) odkształcenia tarczy dla $d/l=2/3$

Tabela 2. WIN dla różnej odległości włókna i pęknięcia

Tarcza	d/l	K_I/K_O	K_{II}/K_O
bez włókna	1/3	1.839	0.143
z włóknem	1/3	1.724	0.265
	2/3	2.228	0.392
	3/3	3.674	1.258

6. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono sformułowanie i zastosowania metody elementów brzegowych (MEB) w analizie statycznej tarcz sprężystych ze sztywnymi włóknami. MEB umożliwia analizę tego rodzaju układów w wyniku dyskretyzacji brzegu zewnętrznego i włókien. Metoda pozwala na otrzymanie bardzo dokładnych wyników, ponieważ interpoluje się tylko zmienność przemieszczeń i sił brzegowych oraz sił oddziaływania włókien. Prezentowana metoda pozwala na łatwą modyfikację położenia włókien i pęknięć.

W przypadku analizy naprężeń w otoczeniu włókien lub sił oddziaływania włókien na tarczę, konieczne jest zastosowanie specjalnych funkcji interpolujących siły oddziaływania z powodu spiętrzenia naprężeń w otoczeniu końców sztywnych włókien.

LITERATURA

1. Becker A.A.: The boundary element method in engineering. A complete course. McGraw-Hill Book Company, London 1992.
2. Burczyński T.: Metoda elementów brzegowych w mechanice. Wspomaganie komputerowe CAD-CAM, WNT, Warszawa 1995.

3. Dong C.Y., Lo S.H., Cheung Y.K.: Interaction between cracks and rigid-line inclusions by an integral equation approach. *Computational Mechanics* 2003, 31, s. 238-252.
4. Hu K.X., Chandra A., Huang Y.: On crack, rigid-line fiber, and interface interactions. *Mechanics of Materials* 1994, 19, s. 15-28.
5. Liu Y., Nishimura N., Otani Y.: Large-scale modeling of carbon-nanotube composites by a fast multipole boundary element method. *Computational Material Science* 2005, 34, s. 173-187.
6. Portela A., Aliabadi M.H., Rooke D.P.: The dual boundary element method: effective implementation for crack problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, 1992, s. 1269-1287.
7. Salgado N.K., Aliabadi M.H.: The application of the dual boundary element method to the analysis of cracked stiffened panels. *Engineering Fracture Mechanics* 1996, 54, s. 91-105.

BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR ANALYSIS OF ELASTIC STRUCTURES WITH RIGID FIBRES

Abstract. In this work, formulation and application of the boundary element method (BEM) for analysis of statically loaded elastic plates with perfect rigid fibers are presented. Integral equations for a structure with fibres, equations defining displacements of a rigid fibre and equations of equilibrium of forces acting on a fiber are given. Numerical implementation of the method is presented. The developed computer code is applied to analysis of interaction of a fiber with a crack in a rectangular plate subjected to tension.