

PARAMETRYCZNE ZAGADNIENIE ODWROTNE ODTWARZANIA WŁASNOŚCI FILTRACYJNYCH GRUNTU

IRENEUSZ SZCZYGIEL

Institut Techniki Ciepłej, Politechnika Śląska

JÓZEF KRYZA

Institut Nauk Geologicznych Uniwersytet Wrocławski

ADAM FIC

Institut Techniki Ciepłej, Politechnika Śląska

Streszczenie. W pracy przedstawiono algorytm odtwarzania własności filtracyjnych gruntu na potrzeby modelu numerycznego triasowego zbiornika wody gruntowej w rejonie Strzelec Opolskich. Zagadnienie to, należące do grupy zagadnień odwrotnych, rozwiązano na podstawie pojęcia współczynników wrażliwości. Z uwagi na złe uwarunkowanie zadania, w celach stabilizacyjnych, wykorzystano metodę Levenberga – Marquardta. Osiągnięto znaczną poprawę zgodności modelu z pomiarami wykonanymi w terenie.

1. WSTĘP

Określenie wysokości hydraulicznej wód podziemnych w analizowanym obszarze, a także prędkości wód podziemnych, jest niezwykle ważnym zagadnieniem przy ocenie zasobów podziemnych zbiorników wody pitnej, wytyczaniu stref ochronnych wokół zbiorników wody, ujęć wody pitnej czy też przy analizie przyczyn skażenia ujęć bądź zbiorników. Obecnie dokonuje się tego najczęściej na podstawie modelu numerycznego obszaru z dodatkowym wykorzystaniem informacji pomiarowych o wysokości hydraulicznej w wybranych punktach. Pomiarów tych dokonuje się w studniach obserwacyjnych lub w rzapiach kopalnianych.

Właściwe działanie modelu uwarunkowane jest, poza poprawnością określenia liczby i układu warstw geologicznych oraz warunków brzegowych, znajomością parametrów modelu. Do najważniejszych tego typu parametrów można zaliczyć własności filtracyjne gruntu. Informacje o gruncie można oczywiście czerpać z pomiarów, jednak z uwagi na błędy pomiarowe wskazane jest, aby wykonać pomiary na większej liczbie próbek, co nie zawsze jest zadaniem łatwym i tanim. W przypadku braku pomiarów własności gruntu w części analizowanego obszaru można posłużyć się analizą odwrotną umożliwiającą tzw. *kalibrację modelu*, tj. dopasowanie parametrów w sposób poprawiający zgodność modelu z wynikami pomiarów. Jest to klasyczne sformułowanie odwrotne [1], tj. odtwarzanie parametru wejściowych modelu na podstawie znajomości jego odpowiedzi.

W niniejszej pracy do rozwiązania tak postawionego zadania wykorzystano metodę współczynników wrażliwości. Z uwagi na słabe uwarunkowanie zagadnień odwrotnych wyznaczenie poszukiwanych parametrów jest możliwe po zastosowaniu specjalnych technik stabilizacyjnych. Jedną z nich jest metoda Levenberga-Marquardta [2, 3], wykorzystana w prezentowanym algorytmie.

2. MODEL ZBIORNIKA TRIASOWEGO W REJONIE STRZELEC OPOLSKICH.

2.1. Analizowany obszar

Modelowaniu poddano obszar zbiornika triasowego wody pitnej (GZWP-333) położonego w obszarze Strzelec Opolskich. Obszar objęty modelem ma powierzchnię około 400 km². Główną cechą geologiczną zbiornika jest monoklinalny zapad warstw w kierunku północnym, który sprawia, że najważniejszy zbiornik wód podziemnych opolskiego triasu zmienia swe zaleganie. Wodonośne wapienie środkowego triasu tworzą wychodnie na południu, a na północy badanego obszaru występują na głębokości 400 m od powierzchni terenu.

Granice modelu rozpatrywanego zbiornika stanowią:

- od północnego wschodu dolina rzeki Jemielnicy,
- od zachodu koryto rzeki Suchej,
- od południa granica zgodna z przebiegiem wybranej izolacji powierzchni piezometrycznej wód podziemnych leżącej na północ od wododziału Kłodnica-Mała Panew.

W przekroju pionowym model zawiera cztery warstwy, w których skład wchodzi siedem kompleksów geologicznych według następującego podziału:

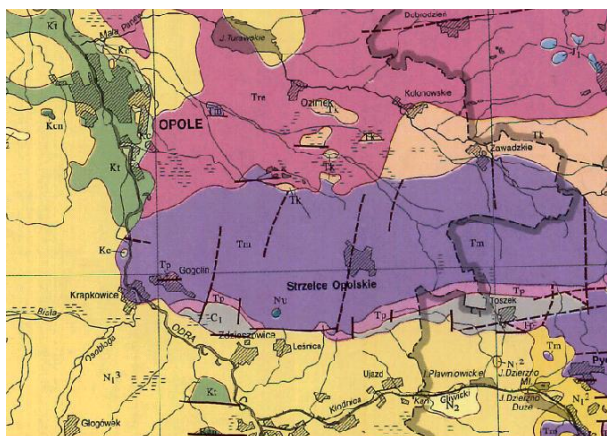
- warstwa pierwsza obejmuje (począwszy od stropu): osady czwartorzędowe i warstwowany kompleks górnego triasu. Ponad 90% tej warstwy stanowią formacje z bardzo niskim współczynnikiem filtracji. Warstwa ta działa jako pakiet napinający dla głębszej, wodonośnej formacji środkowego triasu,
- warstwa druga jest podstawowym, głównym zbiornikiem wód podziemnych. W jej budowie uczestniczą poziomy litologiczne z wysokim lub bardzo wysokim współczynnikiem filtracji (warstwy góraždzeckie, karchowickie i jemilnickie) z wkładkami nisko przepuszczalnych wapieni i margli,
- warstwa trzecia zawiera około 50-metrową warstwę gogolińską, która ma bardzo niskie współczynniki filtracji, dające niewielką wartość przewodności pionowej. Parametry tej warstwy są bardzo słabo zbadane i ich identyfikacja stanowi cel procedury odwrotnej opisanej w niniejszej pracy,
- warstwa czwarta zawiera wielowarstwowy system osadów dolnego triasu, permu i dolnego karbonu. Współczynnik filtracji jest w niej zróżnicowany, ale jest generalnie niski. W głębszych partiach masyw skalny staje się prawie nieprzepuszczalny.

Na rysunku 1 zaprezentowano zarys okolic modelowanego obszaru.

2.2 Warunki brzegowe

Warunki brzegowe określają warunki wymiany wody na brzegu między systemem a jego otoczeniem przez cały czas trwania procesu. Na granicy umownej strumieni wód podziemnych wzdłuż brzegów doliny został założony warunek ze stałym ciśnieniem piezometrycznym (I rodzaju). Dla wariantu modelu uwzględniającego piętrzenie wody w zbiornikach warunki

brzegowe I rodzaju przyjęto także dla rzepii kopalni. Wartości ciśnień w poszczególnych blokach zostały zadane na podstawie map hydroizophis, głównie dla drugiej warstwy wodonośnej, oznaczających swobodną wymianę wody między obszarem modelowym a otoczeniem. Na pozostałym obszarze założono warunek II rodzaju uwzględniając relacje pomiędzy wodami powierzchniowymi i gruntowymi.



Rys.1. Zarys okolic analizowanego obszaru

2.2 Opis matematyczny zjawiska

Rozkład wysokości hydraulicznych w gruncie jest opisany poprzez równanie [4]:

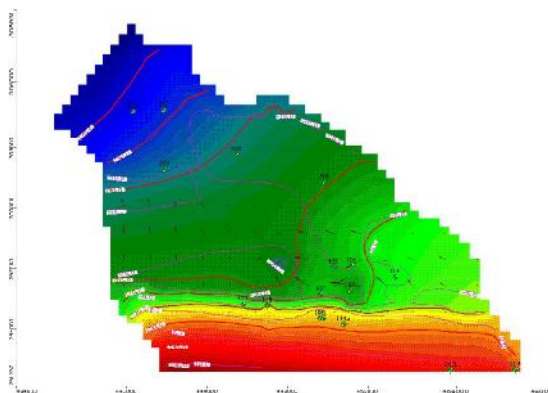
$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) + W = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

gdzie: x_i ($i = 1,2,3$), x_j ($j = 1,2,3$) - współrzędne układu, K_{ij} - kierunkowe współczynniki filtracji, h - wysokość hydrauliczna, W - źródła masy (dodatnie bądź ujemne), S_s - retencja właściwa gruntu, t - czas.

Zagadnienia rozwiązywane w niniejszej pracy dotyczą procesów ustalonych. Pochodna po prawej stronie równania (1) jest więc równa zero.

2.3 Przykładowe wyniki obliczeń

Przedstawiony model można rozwickać, po dyskretyzacji obszaru, jedną ze znanych metod numerycznych. W niniejszej pracy wykorzystano metodę bilansów elementarnych. Przykładowy rozkład wysokości hydraulicznej w pierwszej warstwie zaprezentowano na rysunku 2.



Rys.2 Rozkład wysokości hydraulicznych w pierwszej warstwie.

3. KALIBRACJA MODELU ZBIORNIKA TRIASOWEGO GZWP-333

3.1 Kalibracja modelu jako zagadnienie odwrotne

Jak już wspomniano, do poprawnej pracy modelu numerycznego konieczna jest znajomość parametrów gruntu, a w szczególności współczynników filtracji. Jednym ze sposobów pozyskania tej informacji jest przeprowadzenie odwiertów w terenie i następne laboratoryjne określenie wartości współczynników filtracji. Wierne odwzorowanie rozkładu współczynników filtracji związane jest z koniecznością przeprowadzenia dużej liczby odwiertów, co wiąże się z wysoką czasochłonnością przedsięwzięcia oraz z jego wysokimi kosztami. Dlatego też celowe wydaje się wykorzystanie częściowych pomiarów współczynnika filtracji oraz informacji o wysokości hydraulicznej wód gruntowych pozyskanej z pomiarów prowadzonych w studniach obserwacyjnych. Dodatkowo informację o wysokości hydraulicznej można pozyskać z eksploatowanych i nieczynnych kopalni na podstawie pomiaru poziomu lustra wody w rzepiach.

Zagadnienie takie, będące w swej istocie klasycznym sformułowaniem zagadnienia odwrotnego, nazywane jest kalibracją modelu numerycznego. Istnieje wiele metod rozwiązywania zagadnień odwrotnych. W niniejszej pracy wykorzystano ideę współczynników wrażliwości (ang. sensitivity coefficients) opracowaną przez Jamesa Becka [1]. Zalety płynące ze stosowania współczynników wrażliwości zostały szeroko opisane w literaturze. Współczynniki te pozwalają, między innymi, określić dogodne położenie przeprowadzenia pomiarów oraz szanse uzyskania zbieżności procedury odwrotnej itp.

Wykorzystując wyznaczone współczynniki wrażliwości dokonano kalibracji modelu, wykorzystując w celach stabilizacyjnych metodę Levenberga-Marquardta [2, 3].

3.2 Współczynniki wrażliwości.

Współczynniki wrażliwości określają wrażliwość wielkości mierzonej na zmiany wielkości będącej celem procedury odwrotnej. Z matematycznego punktu widzenia są więc pierwszą pochodną wielkości mierzonej względem wielkości odtwarzanej:

$$Z_h = \frac{\partial h}{\partial K} \quad (2)$$

gdzie:

Z_h - oznacza współczynnik wrażliwości,

h - wysokość hydrauliczną,

K - estymowaną składową tensora przewodności hydraulicznej.

Współczynniki wrażliwości najczęściej wyznacza się poprzez:

- rozwiązanie analityczne,
- rozwiązanie odpowiedniego zagadnienia brzegowego (ang. Boundary Value Approach),
- zastosowanie różnic skończonych we wzorze (2).

Pierwsza ze wspomnianych ogranicza się w zasadzie do przypadków, w których znane jest rozwiązanie analityczne, a więc do przypadków mocno uproszczonych. Wyznaczenie współczynników wrażliwości poprzez rozwiązywanie zagadnień brzegowych dokonywane jest poprzez różniczkowanie równań modelu matematycznego zjawiska wraz z warunkami brzegowymi. Podejście to posiada szereg zalet, komplikuje się niestety w przypadkach nieliniowych. Jest jednak warte rozważenia, szczególnie wówczas gdy rozwiązanie zagadnienia bezpośredniego jest problemem bardzo czasochłonnym, jak ma to miejsce w obliczeniach CFD.

Gdy rozwiązanie zagadnienia bezpośredniego przebiega szybko, najlepszą metodą wyznaczenia współczynników wrażliwości jest zastosowanie różnic skończonych, wymagające kilkakrotnego (w zależności od przyjętej aproksymacji) rozwiązania zagadnienia bezpośredniego. Podejście takie zostało wykorzystane w niniejszej pracy.

3.3 Kalibracja modelu

Rozwiązanie zagadnienia odwrotnego, a więc kalibracja modelu, sprowadza się do minimalizacji sumy kwadratów odchylek wysokości hydraulicznej będącej odpowiedzią modelu i pomiarów ze studni obserwacyjnych i rzepii kopalnianych:

$$R(\mathbf{K}) = \sum_{j=1}^J [H_j - h_j(\mathbf{K})]^2 \quad (3)$$

gdzie $R(K)$ oznacza sumę kwadratów błędów odtwarzanej funkcji, H_j wartość zmierzonej wysokości hydraulicznej przez sensor j , \mathbf{K} jest wektorem poszukiwanych N wartości współczynników filtracji, $h_j(\mathbf{K})$ wartość wysokości hydraulicznej w punkcie j obliczona dla aktualnej estymaty \mathbf{K} . Liczba sensorów jest równa J , przy czym $J \geq N$

Zależność (3) można przedstawić w zapisie macierzowym:

$$R = [\mathbf{H} - \mathbf{h}]^T [\mathbf{H} - \mathbf{h}] \quad (4)$$

gdzie indeks T oznacza transpozycję, a wektory \mathbf{H} i \mathbf{h} zawierają odpowiednio wyniki obserwacji ze wszystkich studni i rzepii oraz symulacji wysokości hydraulicznych w tych punktach.

W celu określenia minimum normy R należy ją zróżniczkować względem poszukiwanych parametrów, a otrzymane różniczki przyrównać do zera:

$$\frac{\partial R}{\partial K_1} = \frac{\partial R}{\partial K_2} = \mathbf{L} = \frac{\partial R}{\partial K_N} = 0 \quad (5)$$

co można przedstawić macierzowo:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{K})}{\partial \mathbf{K}} \right]^T [\mathbf{H} - \mathbf{h}(\mathbf{K})] = \mathbf{0} \quad (6)$$

Pierwszy człon w powyższym równaniu jest *macierzą wrażliwości (Jakobianem)*

$$\mathbf{J} = \left[\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{K})}{\partial \mathbf{K}} \right]^T \quad (7)$$

i zawiera wartości Z_h w miejscach lokalizacji punktów pomiarowych.

Wobec powyższego:

$$\mathbf{J}(\mathbf{K})[\mathbf{H} - \mathbf{h}(\mathbf{K})] = \mathbf{0} \quad (8)$$

Ponieważ wysokość hydrauliczna jest funkcją współczynników filtracji, można ją rozwinąć w szereg Taylora wokół dowolnej wartości h , przy czym może być to wartość pochodząca z poprzedniej, k -tej iteracji. Po pominięciu wyrazów:

$$h_j = h_j(\mathbf{K}^k) + \mathbf{J}_j^k (\mathbf{K} - \mathbf{K}^k) \quad (9)$$

i w zapisie macierzowym:

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathbf{K}^k) + \mathbf{J}^k (\mathbf{K} - \mathbf{K}^k) \quad (10)$$

gdzie \mathbf{J}_j^k jest j -tym wierszem Jakobianu w k -tej iteracji. Wykorzystując (8) i (10) otrzymuje się:

$$\mathbf{K}^{k+1} = \mathbf{K}^k + \left[(\mathbf{J}^k)^T \mathbf{J}^k \right]^{-1} (\mathbf{J}^k)^T [\mathbf{H} - \mathbf{h}(\mathbf{K}^k)] \quad (11)$$

Opisana metoda iteracyjna jest metodą Gaussa. Rozwiązanie równania (11) jest możliwe, jeżeli macierz $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ nie jest osobliwa. Niestety, w zagadnieniach odwrotnych, szczególnie w początkowych iteracjach, macierz ta jest często osobliwa bądź bardzo bliska osobliwości. Problemy takie określane są jako źle uwarunkowane. W celu rozwiązania tego problemu w niniejszej pracy wykorzystano metodę Levenberga-Marquardta. Wykorzystując tę metodę, procedura iteracyjna zostaje zmodyfikowana do postaci:

$$\mathbf{K}^{k+1} = \mathbf{K}^k + \left[(\mathbf{J}^k)^T \mathbf{J}^k + b^k \mathbf{\Omega}^k \right]^{-1} (\mathbf{J}^k)^T [\mathbf{H} - \mathbf{h}(\mathbf{K}^k)] \quad (12)$$

Człon $b \mathbf{\Omega}$ wprowadza się w celu zmniejszenia oscylacji i niestabilności spowodowanych złym uwarunkowaniem problemu. Wartość parametru tłumiącego winna się zmniejszać z kolejnymi iteracjami z uwagi na poprawiające się uwarunkowanie układu równań. W efekcie więc metoda zmierza ku metodzie Gaussa.

Istnieje wiele odmian metody Lavenberga-Marquardta różniących się między sobą doбором macierzy $\mathbf{\Omega}^k$. W niniejszej pracy macierz ta jest zdefiniowana następująco:

$$\mathbf{\Omega}^k = \text{diag}[(\mathbf{J}^k)^T (\mathbf{J}^k)] \quad (13)$$

Wykorzystując powyższe zależności pełna procedura odwrotna może być przedstawiona następująco:

1. założenie startowej wartości wektora \mathbf{K}^k oraz startowej wartości parametru tłumiącego b^k ($k = 1$);
2. rozwiązanie zagadnienia bezpośredniego (1) dla aktualnej estymaty \mathbf{K}^k w celu określenia wektora wysokości hydraulicznej $\mathbf{h}(\mathbf{K}^k)$;
3. określenie sumy kwadratów odchylek wg zależności (3);
4. obliczenie pola współczynników wrażliwości Z_h^k , a następnie określenie Jakobianu \mathbf{J}^k (7) oraz macierzy $\mathbf{\Omega}^k$ (13),
5. rozwiązanie układu równań wynikającego z metody Levenberga-Marquardta:

$$\left[(\mathbf{J}^k)^T \mathbf{J}^k + b^k \mathbf{\Omega}^k \right] \Delta \mathbf{K}^k = (\mathbf{J}^k)^T [\mathbf{H} - \mathbf{h}(\mathbf{K}^k)] \quad (14)$$

ze względu na $\Delta \mathbf{K}^k = \mathbf{K}^{k+1} - \mathbf{K}^k$;

6. obliczenie nowej estymaty \mathbf{K}^{k+1} jako:

$$\mathbf{K}^{k+1} = \mathbf{K}^k + \Delta \mathbf{K}^k \quad (15)$$

7. rozwiązanie zagadnienia bezpośredniego (1) z nową estymatą \mathbf{K}^{k+1} w celu wyznaczenia $\mathbf{h}(\mathbf{K}^{k+1})$ oraz $R(\mathbf{K}^{k+1})$;
 8. jeżeli $R(\mathbf{K}^{k+1}) \geq R(\mathbf{K}^k)$ zastąpienie b^k przez $10 b^k$ i powrót do punktu 5.;
 9. jeżeli $R(\mathbf{K}^{k+1}) < R(\mathbf{K}^k)$ zaakceptowanie nowej estymaty \mathbf{K}^{k+1} oraz zastąpienie b^k przez $0.1 b^k$;
 10. sprawdzenie kryterium zbieżności i jeżeli nie uzyskano zadawalającej zbieżności zastąpienie k przez $k+1$ oraz powrót do punktu 4.
- Jako kryterium zbieżności przyjmuje się:

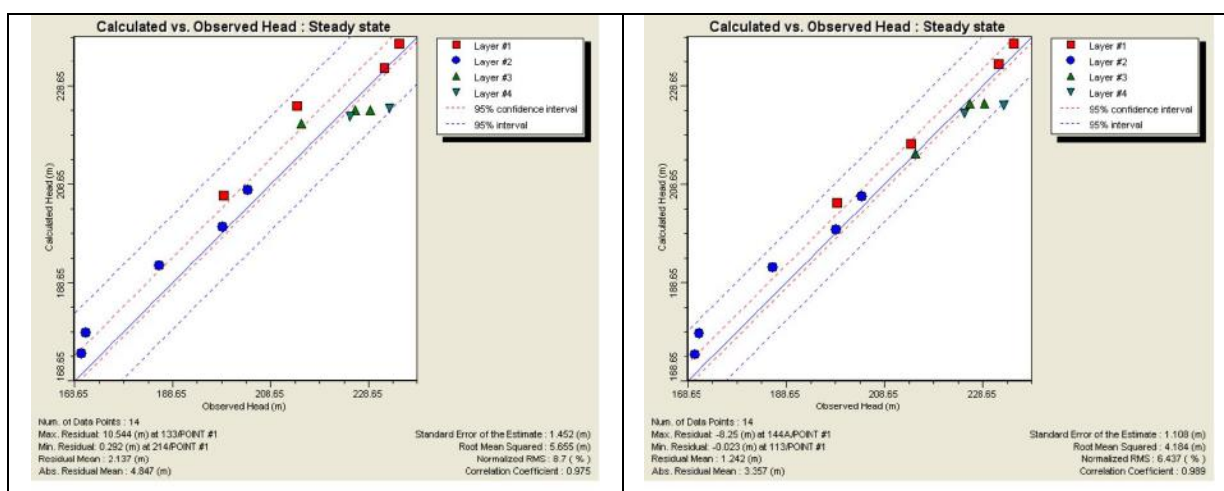
$$\begin{aligned} R(\mathbf{K}^{k+1}) &< e_1 \\ \|(\mathbf{J}^k)^T [\mathbf{H} - \mathbf{h}(\mathbf{K}^k)]\| &< e_2 \\ \|\mathbf{K}^{k+1} - \mathbf{K}^k\| &< e_3 \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie e_1, e_2 oraz e_3 oznaczają przyjęte wskaźniki dokładności.

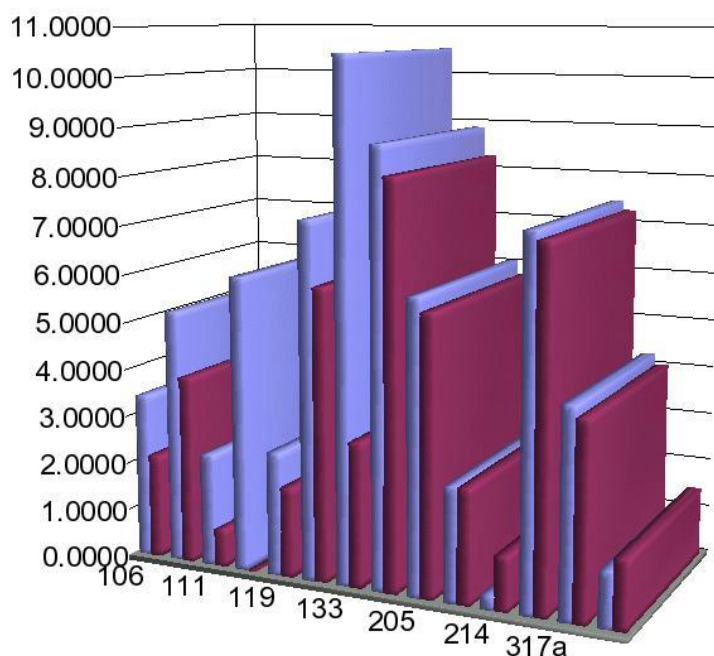
3.3 Wyniki przykładowych obliczeń i wnioski

Przy wykorzystaniu zaprezentowanego algorytmu przeprowadzono kalibrację modelu numerycznego zbiornika GZWP-333. W związku z posiadanymi informacjami na temat współczynników filtracji kalibrowano parametry gruntu wchodzące w skład trzeciej warstwy geologicznej. Założono izotropowość poziomą gruntu, tj. $K_{xx} = K_{yy}$ dla każdego gruntu. Odtwarzano więc 5 parametrów.

Miarą jakości kalibracji jest odchyłka wynikowej wysokości hydraulicznej modelu i odpowiadającym im wartościom obserwacji w studniach. Na rysunkach 3 i 4 zaprezentowano wspomniane odchyłki przed oraz po kalibracji modelu. Rezultaty te wskazują, że w wyniku zastosowanego do kalibracji omówionych procedur rozwiązywania zadań odwrotnych osiągnięto znaczną poprawę zgodności symulacji modelowych z pomiarami terenowymi wysokości hydraulicznej wód gruntowych.



Rys.3 Modelowa i obserwowana wysokość hydrauliczna w studniach zbiornika GZWP-333 przed (rysunek lewy) i po kalibracji modelu (rysunek prawy).



Rys.4 Różnice wysokości obliczonej i obserwowanej [m] w poszczególnych studniach obserwacyjnych przed (słupki z lewej strony) i po (słupki z prawej strony) kalibracji modelu

LITERATURA

1. Ozisik, M.N., Orlande, H.R.B., Inverse heat transfer Taylor and Francis, 2000
2. Kurpisz, K., Nowak A.J.: Inverse thermal problems, Computational Mechanics Publications, 1995
3. Szczygiel, I., Estimation of the boundary conditions in convectional heat transfer problems inverse problems in heat transfer and fluid flow, vol. 2, HTD vol. 340, 17-24, G.S. Dulikravich and K.A. Woodburry (eds.) ASME 1997
4. Anderson M.P., Woessner W.W.: Applied groundwater modeling. Academic Press, London, 1991.

PARAMETRIC INVERSE PROBLEM OF ESTIMATING THE GROUND HYDRAULIC CONDUCTIVITY

Summary. In the paper, inverse method for the ground parameters estimation is presented. This method was utilized during the calibration of the numerical model of the triassic water reservoir located near the Strzelce Opolskie. Both the inverse procedure and exemplary results on the model calibration are presented.

Praca została wykonana w ramach projektu KBN 4T10B05624.