

SZYBKĄ WIELOBIEGUNOWĄ METODĄ ELEMENTÓW BRZEGOWYCH DLA DWUWYMIAROWYCH ZAGADNIENÍ ELASTOSTATYKI

JACEK PTASZNY
PIOTR FEDELIŃSKI

Katedra Wytrzymałości Materiałów i Metod Komputerowych Mechaniki, Politechnika Śląska

Streszczenie. W pracy przedstawiono algorytm obliczeń szybkiej wielobiegunowej metody elementów brzegowych (SWMEB) dla dwuwymiarowych zagadnień elastostatyki. Dla tradycyjnej MEB czas obliczeń i wymagana pamięć są wielkościami rzędu N^2 , gdzie N jest liczbą stopni swobody układu. Dla SWMEB rząd tych wielkości jest zredukowany do $O(N)$. Przedstawiono przykład numeryczny tarczy zdyskretyzowanej dużą liczbą elementów brzegowych. Zbadano wpływ liczby stopni swobody na dokładność obliczeń SWMEB. Porównano wymaganą pamięć i czas obliczeń za pomocą tradycyjnej MEB i SWMEB.

1. WSTĘP

Metoda elementów brzegowych (MEB) jest jedną z efektywnych metod numerycznych stosowanych w analizie układów mechanicznych [1]. Dla wielu zagadnień rozwiązanie uzyskuje się w wyniku dyskretyzacji jedynie brzegów obszarów. Analiza układów o dużej liczbie stopni swobody za pomocą MEB może jednak stać się nieekonomiczna (ze względu na czas obliczeń) lub nawet niemożliwa (ze względu na wymaganą pamięć komputera). W metodzie tej liczba operacji oraz wymagana pamięć są wielkościami rzędu N^2 , gdzie N jest liczbą stopni swobody układu. Redukcję czasu obliczeń oraz pamięci można uzyskać poprzez zastosowanie szybkiej metody wielobiegunowej.

Szybka metoda wielobiegunowa [2] została wprowadzona do celów wyznaczania stanów równowagi układów wielu ciał lub ładunków elektrycznych, oddziałujących na siebie siłami grawitacyjnymi lub siłami Coulomba. W metodzie tej wykorzystuje się rozwinięcie w szereg Taylora składników potencjałów pochodzących od ciał położonych w dużej odległości od punktu, dla którego wyznaczamy potencjał. Pozostałe składniki potencjałów obliczane są w sposób bezpośredni.

W szybkiej wielobiegunowej MEB (SWMEB) rozwijane potencjały mają postać całek brzegowych. W zależności od zastosowanego algorytmu, pamięć oraz czas obliczeń mogą być rzędu $N \log N$ lub N [4]. Metoda jest stosowana w analizie układów elektromagnetycznych, mechanicznych (mechanika układów odkształcalnych, mechanika płynów, akustyka), w zagadnieniach przepływu ciepła oraz w analizie pól sprzężonych o różnej naturze fizycznej.

W obszarze mechaniki układów odkształcalnych opracowane są programy komputerowe analizy układów dwu- i trójwymiarowych, obciążonych statycznie [6, 7] i dynamicznie [5], układów z wieloma wtrąceniami (także z fazą przejściową pomiędzy wtrąceniem a osnową) [8] oraz układów z wieloma pęknięciami [9].

Obszerny spis pozycji literaturowych dotyczących wymienionych zastosowań SWMEB można znaleźć w [3].

2. PODSTAWY METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

Rozpatrywane jest dwuwymiarowe, izotropowe ciało sprężyste, zajmujące obszar Ω i ograniczone brzegiem Γ . Na odpowiednich fragmentach brzegu zadane są warunki brzegowe w postaci przemieszczeń i sił powierzchniowych. Podstawowym równaniem MEB jest tożsamość Somigliany [1], która przy założeniu braku sił objętościowych ma postać:

$$C_{ij}(x')u_j(x') + \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x)u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x)t_j(x) d\Gamma(x), \quad (1)$$

gdzie: T_{ij} i U_{ij} są rozwiązaniami podstawowymi elastostatyki, zależnymi od położenia punktu kolokacji x' i punktu całkowania x , t_j i u_j są wektorami brzegowych sił powierzchniowych i przemieszczeń, a C_{ij} jest macierzą współczynników zależnych od położenia punktu kolokacji. Rozwiązania podstawowe dla dwuwymiarowego zagadnienia elastostatyki mają postać:

$$U_{ij} = \frac{1}{8pm(1-n)} \left[(3-4n) \ln\left(\frac{1}{r}\right) d_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2} \right], \quad (2)$$

$$T_{ij} = \frac{-1}{4p(1-n)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2n) d_{ij} + \frac{2r_i r_j}{r^2} \right] - (1-2n) \frac{n_i r_j - n_j r_i}{r} \right\}, \quad (3)$$

gdzie: m jest modułem Kirchhoffa, n - współczynnikiem Poissona, \mathbf{r} - wektorem łączącym punkt kolokacji z punktem całkowania, a \mathbf{n} jest jednostkowym wektorem normalnym do brzegu w punkcie całkowania.

Rozwiązanie numeryczne otrzymuje się w wyniku podziału brzegu na elementy. Równania (1) stosuje się dla punktów kolokacji, które są węzłami brzegowymi, co wiąże się z koniecznością wielokrotnego obliczania całek brzegowych. Układ równań można zapisać w postaci macierzowej

$$\mathbf{HU} = \mathbf{GT}, \quad (4)$$

gdzie macierze \mathbf{H} i \mathbf{G} zależą od rozwiązań podstawowych oraz sposobu interpolacji wielkości brzegowych. Są one pełne i niesymetryczne. Wektory \mathbf{U} i \mathbf{T} zawierają brzegowe przemieszczenia i siły powierzchniowe. Czas obliczeń elementów macierzy układu równań oraz pamięć niezbędna do ich przechowania są wielkościami rzędu N^2 .

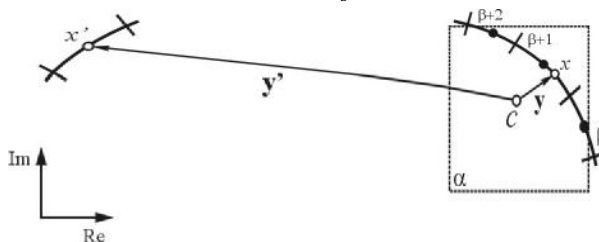
3. SZYBKĄ WIELOBIEGUNOWĄ METODĄ ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

3.1 Rozwinięcia całek brzegowych

Metody wielobiegunowe bazują na rozwinięciu w szereg Taylora odpowiednich potencjałów. W MEB potencjały te określone są całkami brzegowymi. Po prawej stronie równania (1) występuje potencjał warstwy pojedynczej, natomiast po lewej stronie – potencjał warstwy podwójnej.

Rozpatrzmy składnik potencjału warstwy pojedynczej wynikający z całkowania po fragmencie brzegu składającym się z elementów β , które należą do grupy α (rys. 1):

$$I_{ia}(x') = \sum_b \int_{\Gamma_b} U_{ij}(x', x) t_{jb}(x) d\Gamma(x). \quad (5)$$



Rys. 1. Punkt kolokacji i grupa elementów brzegowych

Dla grupy tej określa się punkt c , w otoczeniu którego rozwija się całkę (5). Rozwinięcie ma postać [7]:

$$I_{1a}(x') = (4n - 3) \operatorname{Re} \left[\sum_k f(\mathbf{y}', k) A_{1a}(k) \right] + \operatorname{Re} \left[\sum_k f^{\operatorname{Re}}(\mathbf{y}', k+1) a_{1a}(k) \right] - \operatorname{Re} \left[\sum_k f(\mathbf{y}', k+1) a_{1a}^{\operatorname{Re}}(k) \right] + \operatorname{Re} \left[\sum_k f^{\operatorname{Im}}(\mathbf{y}', k+1) a_{2a}(k) \right] - \operatorname{Re} \left[\sum_k f(\mathbf{y}', k+1) a_{2a}^{\operatorname{Im}}(k) \right], \quad (6)$$

$$I_{2a}(x') = (4n - 3) \operatorname{Re} \left[\sum_k f(\mathbf{y}', k) A_{2a}(k) \right] - \operatorname{Im} \left[\sum_k f^{\operatorname{Im}}(\mathbf{y}', k+1) a_{2a}(k) \right] + \operatorname{Im} \left[\sum_k f(\mathbf{y}', k+1) a_{2a}^{\operatorname{Im}}(k) \right] + \operatorname{Re} \left[\sum_k f^{\operatorname{Im}}(\mathbf{y}', k+1) a_{1a}(k) \right] - \operatorname{Re} \left[\sum_k f(\mathbf{y}', k+1) a_{1a}^{\operatorname{Im}}(k) \right].$$

W rozwinięciu występują funkcje zależne od wektora \mathbf{y}' :

$$f(\mathbf{y}', k) = \begin{cases} \ln(\mathbf{y}'), & k = 0, \\ (\mathbf{y}')^{-k}, & k = 1, 2, \dots, K, \end{cases} \quad (7)$$

$$f^{\operatorname{Re}}(\mathbf{y}', k) = (\mathbf{y}')^{-k} \operatorname{Re} \mathbf{y}', \quad f^{\operatorname{Im}}(\mathbf{y}', k) = (\mathbf{y}')^{-k} \operatorname{Im} \mathbf{y}',$$

oraz współczynniki zależne od wektorów \mathbf{y} :

$$a_{ia}(k) = \sum_b \int_{\Gamma_b} \mathbf{y}^k t_{ib} d\Gamma(x), \quad a_{ia}^{\operatorname{Re}}(k) = \sum_b \int_{\Gamma_b} \mathbf{y}^k \operatorname{Re} \mathbf{y} t_{ib} d\Gamma(x),$$

$$a_{ia}^{\operatorname{Im}}(k) = \sum_b \int_{\Gamma_b} \mathbf{y}^k \operatorname{Im} \mathbf{y} t_{ib} d\Gamma(x), \quad A_{ia}(k) = \begin{cases} a_{ia}(k), & k = 0, \\ -\frac{1}{k} a_{ia}(k), & k = 1, 2, \dots, K, \end{cases} \quad (8)$$

gdzie K jest liczbą wyrazów rozwinięcia. Analogicznie tworzy się rozwinięcie potencjału warstwy podwójnej. Omawiane rozwinięcia nazywamy wielobiegunowymi. Są one zbieżne, gdy spełniony jest warunek:

$$y \leq \frac{1}{2} y'. \quad (9)$$

Dla każdego z punktów kolokacji określa się obszary bliskie, od których potencjały obliczane są w sposób bezpośredni, oraz obszary odległe, od których potencjały obliczane są za pomocą rozwinięcia. Jeśli spełniony jest warunek (9), dana grupa elementów leży w obszarze odległym. W przeciwnym wypadku – grupa leży w obszarze bliskim.

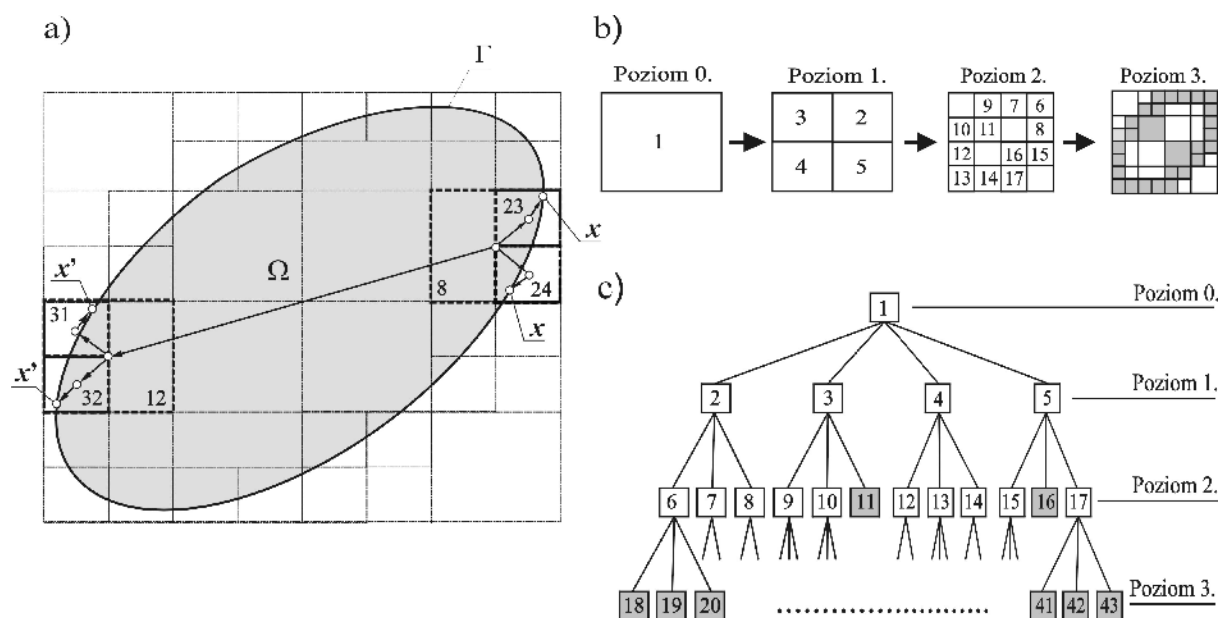
Uwzględniając podział obszarów na bliskie i odległe od punktów kolokacji możemy równanie (4) zapisać w postaci:

$$[\mathbf{H}]^{bl} \mathbf{U} + \{\mathbf{HU}\}^{odl} = [\mathbf{G}]^{bl} \mathbf{T} + \{\mathbf{GT}\}^{odl}. \quad (10)$$

Z rozwinięć otrzymuje się składniki wektorów $\{\mathbf{HT}\}^{odl}$ i $\{\mathbf{GT}\}^{odl}$, pochodzące od obszarów odległych. Całki pochodzące od obszarów bliskich umieszcza się w macierzach $[\mathbf{H}]^{bl}$ i $[\mathbf{G}]^{bl}$. Są to macierze rzadkie. W zależności od geometrii układu mają strukturę blokową lub pasmową. Czas obliczeń elementów macierzy oraz pamięć potrzebna do ich przechowania są rzędu N .

3.2 Grupowanie elementów w obszarach

Określa się prostokąt zawierający w całości obszar Ω analizowanego ciała [2, 3, 6, 7]. Prostokąt ten jest dzielony na cztery mniejsze. Każdy z nich jest dalej dzielony do momentu, gdy najmniejsze z prostokątów zawierają liczbę elementów brzegowych nie większą, od pewnej ustalonej liczby. Schemat podziału został przedstawiony na rysunkach 2a i 2b.



Rys. 2. Grupowanie elementów: a), b) schemat podziału, c) struktura drzewa

Podział zapisywany jest w postaci struktury drzewa (rys. 2c). Korzeń drzewa (węzeł na poziomie 0.) stanowi największy prostokąt. Jego potomkami są prostokąty (komórki) otrzymane w wyniku podziału, zaś on sam jest ich rodzicem. W ten sposób tworzone są kolejne węzły drzewa, leżące na coraz wyższych poziomach. Węzły nie posiadające potomków nazywane są liśćmi. Każdemu z węzłów drzewa przypisywany jest zbiór współczynników rozwinięcia.

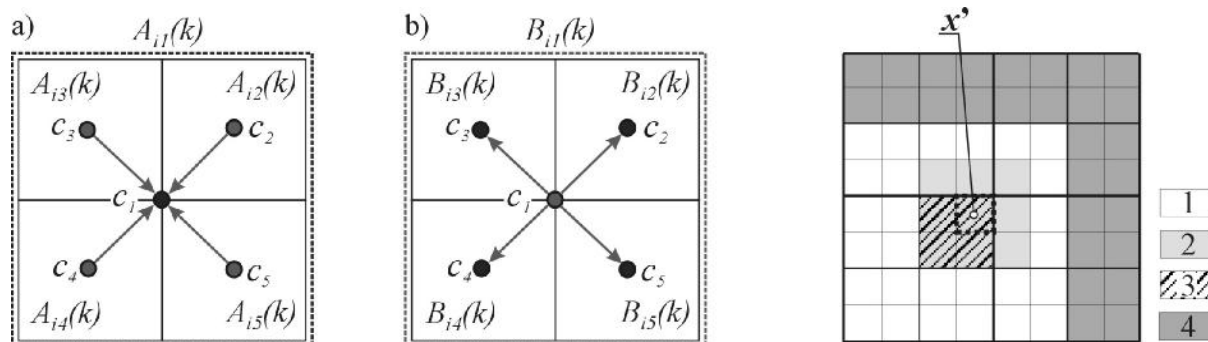
3.3 Transformacje współczynników rozwinięcia

Współczynniki wielobiegunowe (8) oznaczymy ogólnie symbolem $A_{ia}(k)$. Funkcje (7) rozwija się w szereg Taylora w otoczeniu punktu c określonego dla komórki zawierającej punkt kolokacji. W ten sposób tworzy się rozwinięcie lokalne o postaci podobnej do rozwinięcia (6), o współczynnikach $B_{ia}(k)$ [2, 3, 6, 8]. Współczynniki rozwinięcia lokalnego można otrzymać poprzez transformację współczynników wielobiegunowych $A_{ia}(k)$ komórek leżących w obszarze odległym. Jest to transformacja W-L (od: „wielobiegunowy – lokalny”).

Na rysunku 3 przedstawiono komórkę 1 wraz z potomkami 2÷5. Rozwinięcia tworzy się w otoczeniu punktów c_{1-5} . Znając współczynniki wielobiegunowe potomków można wyznaczyć nowe współczynniki dla rodzica, bez konieczności ponownego całkowania po tych samych elementach. Jest to transformacja W-W (od: „wielobiegunowy – wielobiegunowy”) – rys. 3a.

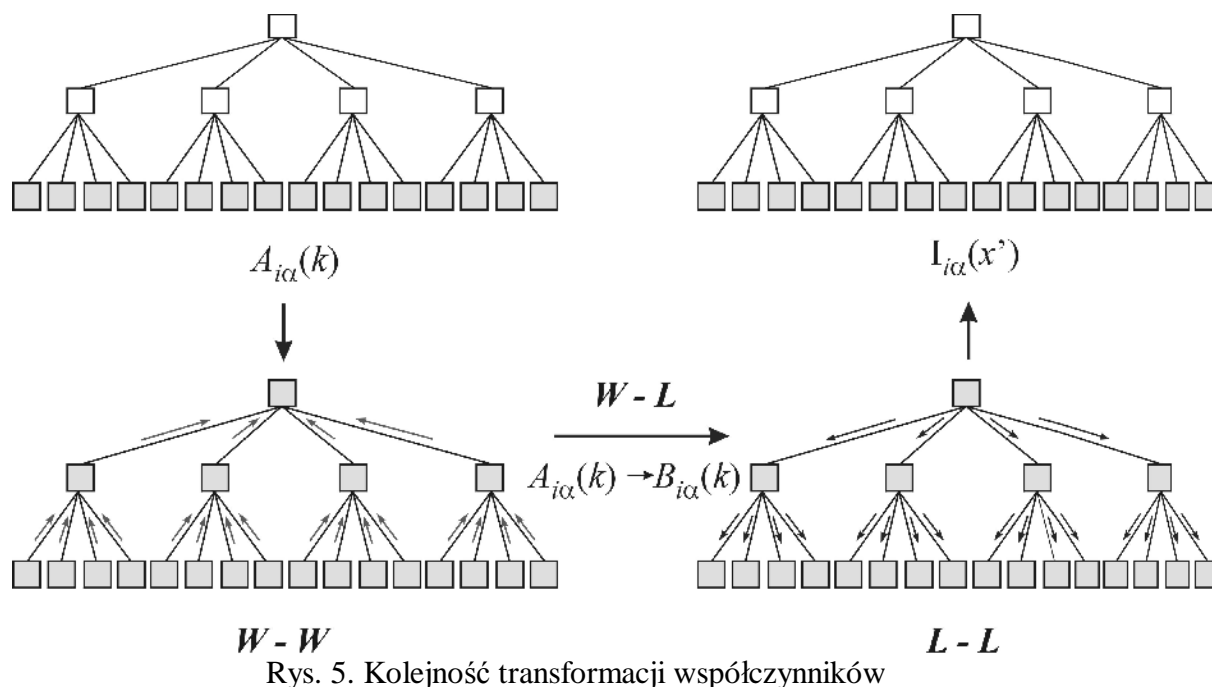
Współczynniki lokalne komórek zawierają elementy potencjałów pochodzących od punktów całkowania leżących w obszarach odległych od tych komórek. Współczynniki lokalne ich rodziców zawierają elementy potencjałów pochodzących od punktów leżących w obszarach większych i bardziej odległych (rys. 4). Można je dodać do współczynników potomków, uwzględniając przesunięcie punktów rozwinięcia. Jest to transformacja L-L (od: „lokalny – lokalny”) – rys. 3b.

Kolejność transformacji przedstawiono na rysunku 5. Współczynniki wielobiegunowe są obliczane tylko dla liści drzewa (pierwsze drzewo na rysunku). Zakładamy, że zawierają one stałą liczbę elementów. Dodatkowo całkowanie bezpośrednio przeprowadza się dla obszarów bliskich komórkom będącym liśćmi drzewa (rys. 4). Liczba operacji całkowania bezpośredniego jest więc w przybliżeniu proporcjonalna do liczby stopni swobody układu.



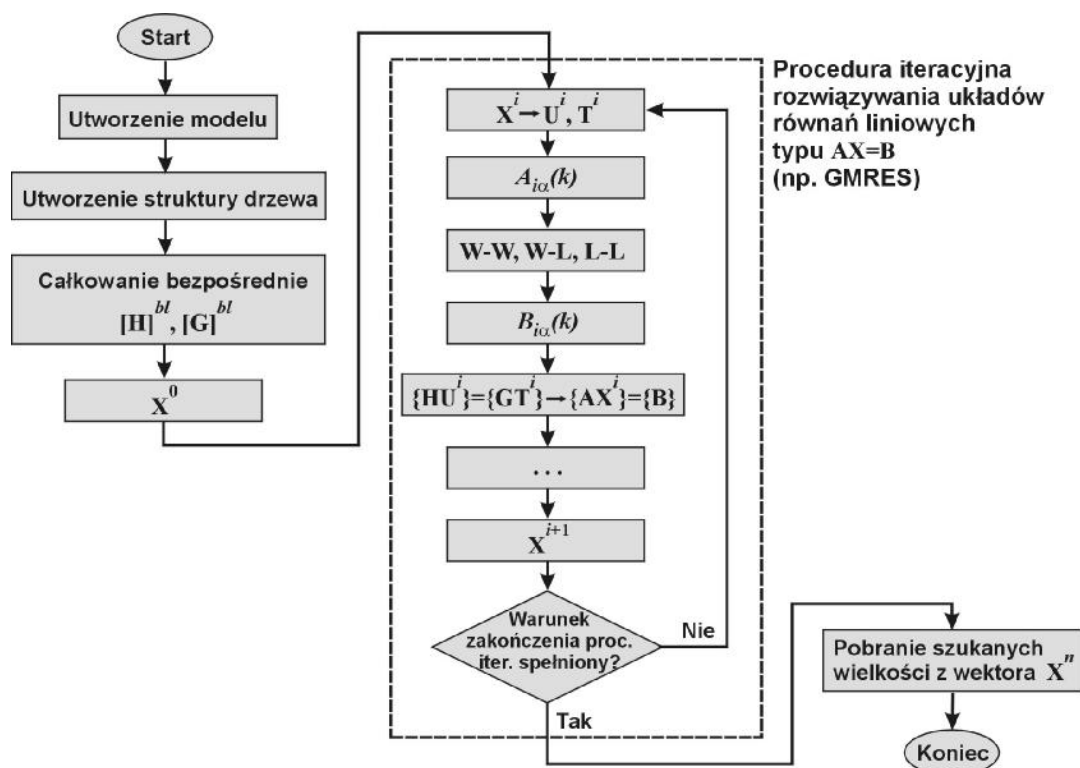
Rys. 3. Transformacje współczynników:
a) W-W, b) L-L

Rys. 4. Obszary: x' – obszar z punktem kolokacji, 1 – obszar rozwinięcia, 2 – obszar bliski, 3 – rodzic, 4 – obszar rozwinięcia dla rodzica



4. PROGRAM KOMPUTEROWY SZYBKIEJ WIELOBIEGUNOWEJ MEB

Opracowano program komputerowy SWMEB do analizy statycznej tarcz liniowosprężystych, wykorzystujący kwadratowe elementy brzegowe. Schemat blokowy programu przedstawiono na rysunku 6.



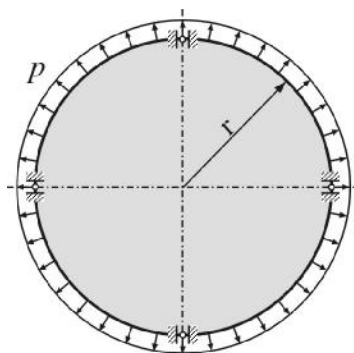
Do rozwiązywania układów równań wykorzystano metodę iteracyjną GMRES (ang. Generalized Minimal Residual). Jako wektor startowy przyjmowano wektor zerowy. Warunkiem zakończenia iteracji było zmniejszenie normy reszty tak, aby stosunek normy w ostatniej iteracji do normy w punkcie startowym wynosił 10^{-6} . W celu zminimalizowania liczby iteracji poprawiano uwarunkowanie układu równań techniką wykorzystującą strukturę drzewa, opisaną w [6].

5. PRZYKŁAD NUMERYCZNY

Analizowano tarczę kołową, rozciąganą w kierunku promieniowym siłą powierzchniową, rozłożoną równomiernie na obwodzie tarczy (rys. 7). Przyjęto następujące parametry układu: promień tarczy $r = 10$ m, moduł Younga $E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa, liczba Poissona $\nu = 0.3$, wartość siły powierzchniowej $p = 10^8$ Pa. Układ znajdował się w płaskim stanie naprężenia. Rozpatrywano różne sposoby dyskretyzacji układu – dla liczby elementów brzegowych od 500 do 4 000. Liczba stopni swobody układów wynosiła od 2 000 do 16 000. Wykorzystano rozwinięcia potencjałów w szereg Taylora o pięciu wyrazach. Dla największego z badanych układów rozwiązanie uzyskano w 10 iteracjach.

Badano wartość przemieszczeń promieniowych punktów leżących na obwodzie tarczy. Wyniki porównano z rozwiązaniem analitycznym i przedstawiono w tabeli 1.

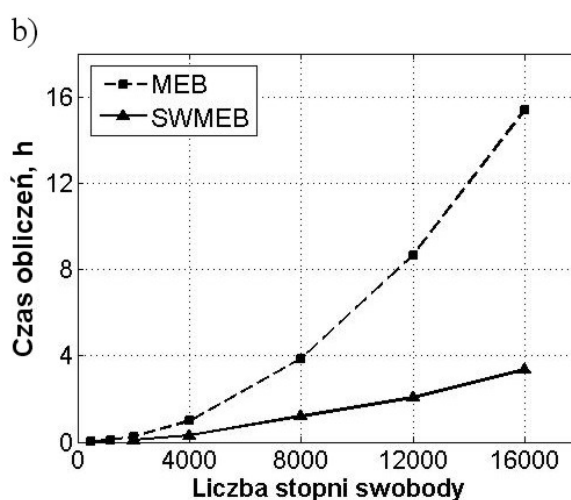
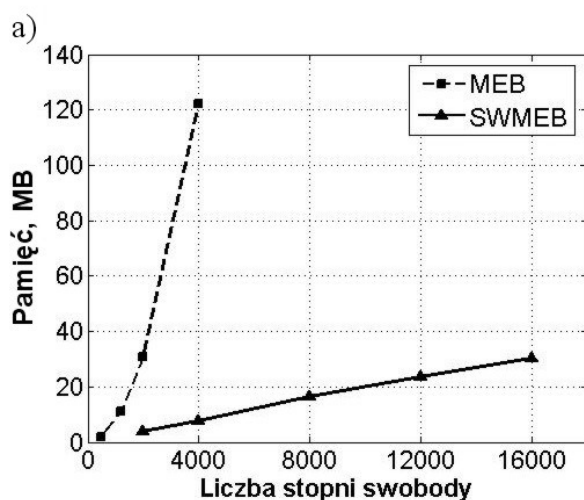
Rysunek 8 przedstawia zależności pamięci oraz czasu obliczeń od liczby stopni swobody układu.



Rys. 7. Tarcza kołowa

Tabela 1. Rozwiązanie analityczne i wyniki SWMEB

Liczba stopni swobody	Rozwiązanie analityczne u_r [m]	Rozwiązanie SWMEB u_r [m]	Błąd względny
2000	$3,5 \cdot 10^{-3}$	$3,497 \cdot 10^{-3}$	0,09%
4000		$3,496 \cdot 10^{-3}$	0,13%
8000		$3,494 \cdot 10^{-3}$	0,17%
12000		$3,493 \cdot 10^{-3}$	0,21%
16000		$3,492 \cdot 10^{-3}$	0,23%



Rys. 8. Pamięć (a) i czas obliczeń (b) dla MEB i SWMEB

6. WNIOSKI

Zastosowanie SWMEB pozwala na znaczną redukcję czasu obliczeń oraz pamięci dla dużych układów, w porównaniu z tradycyjną MEB. W pracy analizowano układy o liczbie stopni swobody do 16 000. Dla największego z badanych układów czas obliczeń SWMEB jest około czterokrotnie krótszy od czasu obliczeń tradycyjną MEB. Już dla układów o 4 000 stopni swobody pamięć jest o rząd wielkości mniejsza. Stosując SWMEB można analizować większe układy, których analiza tradycyjną MEB byłaby niemożliwa z powodu ograniczenia pamięci komputera.

Dla badanych układów uzyskano dokładność rzędu 0,1%. Błąd ten rośnie wraz ze wzrostem liczby stopni swobody układu. Jest to spowodowane zwiększoną liczbą przybliżonych obliczeń (rozwinień) dla większych układów.

LITERATURA

1. Brebbia A., Dominguez J.: Boundary elements an introductory course. McGraw-Hill, New York 1992.
2. Greengard L., Rokhlin V.: A fast algorithm for particle simulations. J. Comp. Phys., 73, 1987, s. 325-348.
3. Nishimura N.: Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. Appl. Mech. Rev., 55, 4, 2002, s. 299-324.
4. Popov V., Power H.: Numerical comparison between two possible multipole alternatives for the BEM solution of 3D elasticity problems based upon Taylor series expansion. Eng. Anal. Boundary Elem., 27, 2003, s. 521-531.
5. Takahashi T., Nishimura N., Kobayashi S.: A Fast BIEM for three-dimensional elastodynamics in time domain. Eng. Anal. Boundary Elem., 28, 2004, s. 165-180.
6. Wang H., Yao Z., Wang P., On the preconditioners for fast multipole boundary element methods for 2D multi-domain elastostatics. Eng. Anal. Boundary Elem., 29, 2005, s. 673-688.
7. Yamada Y., Hayami K.: A multipole boundary element method for two dimensional elastostatics. Tech. Report, METR 95-07, Math. Eng. Section, Dept. Math. Eng., Information Phys., Univ. Tokyo 1995.
8. Yao Z., Kong F., Wang H., Wang P.: 2D simulation of composite materials using BEM. Eng. Anal. Boundary Elem., 28, 2004, s. 927-935.
9. Yoshida K., Nishimura N., Kobayashi S.: Application of fast multipole Galerkin boundary integral equation method to elastostatic crack problems in 3D. Int. J. Numer. Meth. Engng, 50, 2001, s. 525-547.

FAST MULTIPOLE BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR TWO-DIMENSIONAL ELASTOSTATIC PROBLEMS

Summary. In the work, the fast multipole boundary element method (FMBEM) algorithm for two-dimensional elastostatics is presented. The computation time and the memory for the standard BEM are of order of N^2 , where N is the number of degrees of freedom (DOF) of the structure. For the FMBEM the quantities are reduced to $O(N)$. A numerical example of a plate discretized with many boundary elements is presented. The dependence of accuracy on number of DOF is investigated. The memory and the computation time for the standard BEM and the FMBEM are compared.