

ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ BRZEGOWYCH LINIOWEJ PIEZOELEKTRYCZNOŚCI POŚREDNIĄ METODĄ TREFFTZA

GRZEGORZ DZIATKIEWICZ

*Katedra Wytrzymałości Materiałów i Metod Komputerowych Mechaniki, Politechnika Śląska
e-mail: grzegorz.dziatkiewicz@polsl.pl*

Streszczenie. Analiza sprzężonych pól mechanicznych i elektrycznych w materiałach piezoelektrycznych wymaga rozwiązania układu sprzężonych równań różniczkowych cząstkowych mechaniki i elektrodynamiki ośrodków ciągłych. W niniejszej pracy, do rozwiązywania tego typu zadań brzegowych, wykorzystuje się pośrednią metodę Trefftza. W metodzie tej rozwiązanie problemu brzegowego jest aproksymowane za pomocą szeregu tzw. T-funkcji. Do ich wyznaczenia wykorzystano formalizm Stroha. Zaproponowano wersję kolokacyjną metody, co prowadzi do rozwiązań w sensie najmniejszych kwadratów.

1. WSTĘP

Najpopularniejsze metody numeryczne modelowania materiałów piezoelektrycznych to metoda elementów skończonych (MES) oraz metoda elementów brzegowych (MEB). W ostatnich latach można jednak zauważyć rozwój metod bezsiatkowych, które często nie wymagają kosztownego czasowo i obliczeniowo, procesu generacji siatek. Do tej grupy można również zaliczyć pośrednią metodą Trefftza [2,5].

Metoda Trefftza wymaga znajomości zbioru specjalnych funkcji, za pomocą których aproksymuje się rozwiązania danego zadania brzegowego [7,8]. Zbiór tych funkcji, nazywanych T-funkcjami, tworzy rozwiązania równania jednorodnego dla operatora opisującego dany problem brzegowy. W przypadku modelowania materiałów piezoelektrycznych konieczne jest uwzględnienie ich anizotropowych własności elektromechanicznych [2,7]. Sprawia to, że nawet w przypadku transwersalnej izotropii (ceramika piezoelektryczna) postać eliptycznego operatora różniczkowego opisującego zadanie brzegowe uniemożliwia proste wyznaczenie zbioru T-funkcji [2,7]. Podobny problem spotyka się, poszukując rozwiązań fundamentalnych, wymaganych przez MEB [4]. W celu rozwiązania tego problemu, dla MEB stosuje się rozszerzony formalizm Stroha [4,6]. W niniejszej pracy, po raz pierwszy, w systematyczny sposób zastosowano formalizm Stroha do wyznaczenia zbioru T-funkcji operatora różniczkowego liniowej piezoelektryczności.

Zbiór T-funkcji umożliwia aproksymację rozwiązania rozważanego problemu brzegowego za pomocą kombinacji liniowej tych funkcji. T-funkcje spełniają równanie jednorodne i jednocześnie powinny spełniać równania opisujące warunki brzegowe, zarówno mechaniczne jak i elektryczne [7]. Prowadzi to do problemu minimalizacji residuów na brzegu ze względu

na poszukiwane współczynniki kombinacji liniowej T-funkcji, opisujących pola uogólnionych przemieszczeń i uogólnionych sił powierzchniowych. Metoda kollokacji zakłada zerowanie się residuuów we wszystkich punktach brzegowych, stanowiących reprezentację geometrii rozważanego obszaru. Powstały układ równań algebraicznych liniowych, ze względu na poszukiwane współczynniki rozwinięcia, jest rozwiązywany w sensie najmniejszych kwadratów [7]. W niniejszej pracy, po raz pierwszy, zastosowano do rozwiązania tego układu metodę rozkładu według wartości osobliwych (SVD) wraz z automatyczną detekcją optymalnej wartości parametru regularyzacji [3].

2. POŚREDNIA METODA TREFFTZA DLA ZADAŃ BRZEGOWYCH LINIOWEJ PIEZOELEKTRYCZNOŚCI

2.1. Sformułowanie problemu brzegowego liniowej piezoelektryczności

Problem brzegowy dla dwuwymiarowych zagadnień brzegowych liniowej piezoelektryczności można sformułować, korzystając z tzw. wielkości uogólnionych. Wprowadza się następujące wektory wielkości uogólnionych [4]:

$$\mathbf{U}_J = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_J \\ f \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{T}_J = \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_J \\ w \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{B}_J = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_J \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

gdzie \mathbf{U}_J oznacza wektor uogólnionych przemieszczeń, zawierający wektor przemieszczeń mechanicznych \mathbf{u}_J oraz potencjał elektryczny φ ; wektor uogólnionych sił powierzchniowych \mathbf{T}_J zawiera wektor sił powierzchniowych \mathbf{t}_J oraz gęstość powierzchniową ładunku elektrycznego w ; wektor uogólnionych sił objętościowych \mathbf{B}_J zawiera tylko wielkości mechaniczne – składowe wektora siły objętościowej \mathbf{b}_J , ponieważ materiały piezoelektryczne, jako dielektryki nie zawierają swobodnych ładunków elektrycznych.

Korzystając z wielkości uogólnionych, można sformułować problem brzegowy liniowej piezoelektryczności w obszarze płaskim $\Omega \subset R^2$ jako problem poszukiwania wektora przemieszczeń uogólnionych, spełniającego równania pól sprzężonych uzupełnione o warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{JK} \mathbf{U}_K &= -\mathbf{B}_J \\ \Gamma_U : \mathbf{U}_J &= \bar{\mathbf{U}}_J, \\ \Gamma_T : \mathbf{T}_J &= \bar{\mathbf{T}}_J \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie \mathbf{L}_{JK} to eliptyczny operator różniczkowy liniowej piezoelektryczności, a Γ_U oraz Γ_T to oznaczenie odpowiednich fragmentów brzegu, gdzie zadano uogólnione przemieszczenia i uogólnione siły powierzchniowe, co odpowiada sformułowaniu warunków brzegowych Dirichleta i Neumanna. Dla ceramiki piezoelektrycznej, modelowanej jako materiał jednorodny, liniowo-sprężysty, liniowo-dielektryczny, transwersalnie izotropowy, w uogólnionym elektromechanicznym płaskim stanie odkształcenia, równanie operatorowe (2) przyjmuje postać [4]:

$$\begin{bmatrix} c_{11}\partial_{11} + c_{44}\partial_{33} & (c_{13} + c_{44})\partial_{13} & (e_{15} + e_{31})\partial_{13} \\ (c_{13} + c_{44})\partial_{13} & c_{44}\partial_{11} + c_{33}\partial_{33} & e_{15}\partial_{11} + e_{33}\partial_{33} \\ (e_{15} + e_{13})\partial_{13} & e_{15}\partial_{11} + e_{33}\partial_{33} & -\epsilon_{11}\partial_{11} - \epsilon_{33}\partial_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Rozważano płaszczyznę $x_1 - x_3$, stałe sprężystości, moduły piezoelektryczności oraz stałe przenikalności dielektrycznej oznaczono przez c_{ij} , e_{ij} oraz ε_{ij} . Założono, że kierunek polaryzacji pokrywa się z osią x_3 .

2.2 Formalizm Stroha i T-funkcje

W przypadku transwersalnej izotropii odkształcenia w płaszczyźnie $x_1 - x_3$ są rozprężone z odkształceniami w płaszczyznach prostopadłych. Stosując formalizm Stroha, można założyć, że rozwiązanie ogólne operatorowego równania (2), czyli pola przemieszczeń oraz potencjału, ma postać [4]:

$$\mathbf{U} = \mathbf{a}f(z), \quad (4)$$

gdzie \mathbf{a} to nieznaną wektor, natomiast $f(z)$ jest analityczną funkcją zmiennej zespolonej z , która zależy od współrzędnych x_1 oraz x_3 oraz pewnej nieznaną stałą p :

$$z = x_1 + px_3. \quad (5)$$

Wprowadzając powyższe zależności do równań pól sprzężonych (2), dla przypadku rozwiązań ogólnych, otrzymuje się następującą relację, opisującą pewne kwadratowe zagadnienie własne:

$$\{\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2\mathbf{T}\}\mathbf{a} = 0, \quad (6)$$

gdzie macierze \mathbf{Q} , \mathbf{R} oraz \mathbf{T} zależą tylko od stałych materiałowych. Kwadratowe zagadnienie własne (6) można transformować do postaci liniowej – standardowego zagadnienia własnego [4]:

$$\mathbf{N}\xi = p\xi, \quad (7)$$

gdzie:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^T & \mathbf{T}^{-1} \\ \mathbf{R}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^T - \mathbf{Q} & (-\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^T)^T \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

gdzie wektor \mathbf{b} jest dany zależnością:

$$\mathbf{b}_j = -\frac{1}{p_j}(\mathbf{Q} + p_j\mathbf{R})\mathbf{a}. \quad (9)$$

Znając wektor \mathbf{b} , można wprowadzić tzw. uogólnioną funkcję naprężeń Ψ :

$$\Psi = \mathbf{b}f(z). \quad (10)$$

Za pomocą pochodnych tej funkcji można wyrazić składowe tensora uogólnionych naprężeń:

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{3j} \\ D_3 \end{cases} = \Psi_{,1} \\ \cdot \\ \begin{cases} \mathbf{S}_{1j} \\ D_1 \end{cases} = -\Psi_{,3} \end{cases} \quad (11)$$

Wiadomo, że rozwiązanie problemu własnego (6) lub (7), w przypadku dwuwymiarowym, daje trzy pary zespolonych sprzężonych wartości własnych oraz odpowiadających im zespolonych wektorów własnych [4, 6]. Uwzględniając różne wartości własne z dodatnią częścią urojoną (co zapewnia dodatnią określoność energii odkształcenia), można rozwiązania ogólne – pola uogólnionych przemieszczeń oraz wartości uogólnionej funkcji naprężeń – przedstawić w postaci [4]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{A} \langle \mathbf{f}(z_*) \rangle \mathbf{q} \right\}, \\ \boldsymbol{\Psi} &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{B} \langle \mathbf{f}(z_*) \rangle \mathbf{q} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie \mathbf{A} i \mathbf{B} to macierze, których kolumny zawierają wektory własne zagadnienia własnego (7), $\langle \mathbf{f}(z_*) \rangle$ to macierz diagonalna zawierająca wartości dowolnej funkcji zespolonej zmiennej zespolonej postaci:

$$z_j = x_1 + p_j x_3, \quad (13)$$

gdzie p_j to wartości własne z dodatnią częścią urojoną. Przez \mathbf{q} oznaczono dowolny wektor zespolony.

Można zauważyć, że formalizm Stroha pozwala na wyznaczenie rozwiązań ogólnych dla operatora różniczkowego liniowej piezoelektryczności. Rozwiązania te są dane przez dowolne funkcje zespolone zmiennej zespolonej oraz przez wartości i wektory własne, otrzymane po rozwiązaniu zagadnienia własnego formalizmu Stroha. Rozwiązanie ogólne zostało wyznaczone z dokładnością co do stałej zespolonej. Jak wiadomo, zbiór T-funkcji jest zbiorem rozwiązań ogólnych dla danego operatora różniczkowego [8]. Zbiór ten powinien się odznaczać szeregiem własności, które zostały szczegółowo zbadane w literaturze [2, 5, 7, 8]. W niniejszej pracy zaproponowano postać T-funkcji, opartą na bazie wielomianów zmiennej zespolonej, analogicznie jak dla operatora Laplace'a [8]:

$$B = \{1, z^k, iz^k\}, \quad (14)$$

gdzie $k=1,2,\dots,a$ i to jedność urojona.

Wtedy zbiór T-funkcji, zbudowany na podstawie rozwiązania ogólnego formalizmu Stroha (12), dla operatora (3) ma postać:

$$\left. \begin{aligned} & \left. \begin{aligned} f_1 &= 2 \operatorname{Re} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{A}_{21} \\ \mathbf{A}_{31} \end{bmatrix}, f_2 = 2 \operatorname{Re} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{22} \\ \mathbf{A}_{32} \end{bmatrix}, f_3 = 2 \operatorname{Re} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \\ f_{6k-2} &= 2 \operatorname{Re} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} z_1^k \\ \mathbf{A}_{21} z_2^k \\ \mathbf{A}_{31} z_3^k \end{bmatrix}, f_{6k-1} = 2 \operatorname{Re} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{12} z_1^k \\ \mathbf{A}_{22} z_2^k \\ \mathbf{A}_{32} z_3^k \end{bmatrix}, f_{6k} = 2 \operatorname{Re} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{13} z_1^k \\ \mathbf{A}_{23} z_2^k \\ \mathbf{A}_{33} z_3^k \end{bmatrix} \\ f_{6k+1} &= 2 \operatorname{Re} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} iz_1^k \\ \mathbf{A}_{21} iz_2^k \\ \mathbf{A}_{31} iz_3^k \end{bmatrix}, f_{6k+2} = 2 \operatorname{Re} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{12} iz_1^k \\ \mathbf{A}_{22} iz_2^k \\ \mathbf{A}_{32} iz_3^k \end{bmatrix}, f_{6k+3} = 2 \operatorname{Re} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{13} iz_1^k \\ \mathbf{A}_{23} iz_2^k \\ \mathbf{A}_{33} iz_3^k \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} k = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Analogicznie buduje się bazę T-funkcji dla wektora uogólnionych sił powierzchniowych – wprowadza się elementy macierzy \mathbf{B} oraz wykonuje stosowne różniczkowanie uogólnionej funkcji naprężeń, zgodnie z (11).

2.3 Metoda kollokacji

Pośrednia metoda Trefftza zakłada, że rozwiązanie rozpatrywanego zagadnienia brzegowego dla uogólnionych przemieszczeń i sił powierzchniowych, w dowolnym punkcie P_i obszaru Ω , jest dane jako kombinacja liniowa [5]:

$$\begin{aligned} U(P_i) \text{ ! } \mathcal{U}^0(P_i) &= \sum_{i=1}^N c_i U_i^* = \mathbf{c}^T \mathbf{U}^*(P) \\ T(P_i) \text{ ! } \mathcal{T}^0(P_i) &= \sum_{i=1}^N c_i T_i^* = \mathbf{c}^T \mathbf{T}^*(P) \end{aligned}, \quad (16)$$

gdzie przez wielkości z gwiazdką oznaczono T-funkcje metody Trefftza. Wektor \mathbf{c} zawiera nieznanne współczynniki rozwinięcia.

Należy zauważyć, że T-funkcje, jako rozwiązania ogólne, nie spełniają warunków brzegowych, co powoduje powstanie residuów na brzegu:

$$\begin{aligned} P_i \in \Gamma_U : R_1 &= \mathcal{U}^0 - \bar{U} = \mathbf{c}^T \mathbf{U}^*(P_i) - \bar{U}(P_i) \neq 0 \\ P_i \in \Gamma_T : R_2 &= \mathcal{T}^0 - \bar{T} = \mathbf{c}^T \mathbf{T}^*(P_i) - \bar{T}(P_i) \neq 0 \end{aligned}. \quad (17)$$

W metodzie kollokacji żąda się spełnienia warunków brzegowych, co prowadzi do:

$$\begin{aligned} P_i \in \Gamma_U : R_1 &= \mathcal{U}^0 - \bar{U} = \mathbf{c}^T \mathbf{U}^*(P_i) - \bar{U}(P_i) = 0 \quad (i=1, \dots, M_1) \\ P_i \in \Gamma_T : R_2 &= \mathcal{T}^0 - \bar{T} = \mathbf{c}^T \mathbf{T}^*(P_i) - \bar{T}(P_i) = 0 \quad (i=1, \dots, M_2) \end{aligned}, \quad (18)$$

gdzie przez M_1 oraz M_2 oznaczono ilość węzłów brzegowych, na których założono warunki Dirichleta i Neumanna. Postać macierzową układu równań (18) przedstawiono poniżej:

$$\begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{12}^* & \dots & U_{1N}^* \\ U_{21}^* & U_{22}^* & \dots & U_{2N}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{M_1 1}^* & U_{M_1 2}^* & \dots & U_{M_1 N}^* \\ T_{11}^* & T_{12}^* & \dots & T_{1N}^* \\ T_{21}^* & T_{22}^* & \dots & T_{2N}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{M_2 1}^* & T_{M_2 2}^* & \dots & T_{M_2 N}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \dots \\ \bar{U}_{M_1} \\ \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \dots \\ \bar{T}_{M_2} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Jeśli przez \mathbf{D} oznaczyć macierz główną układu, a przez \mathbf{F} wektor wyrazów wolnych, to otrzymuje się podstawowy układ równań metody Trefftza w postaci:

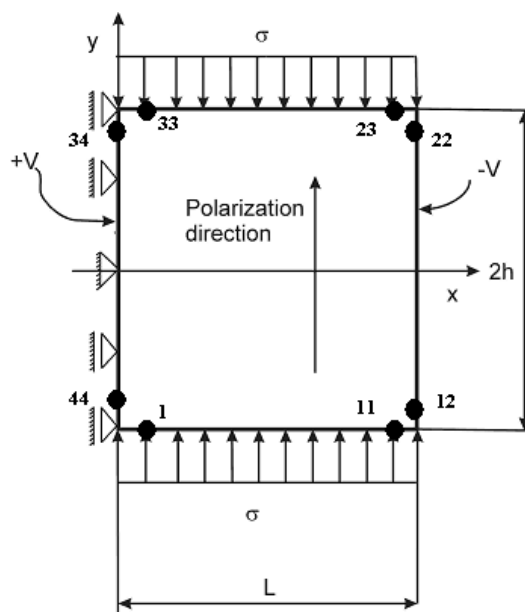
$$\mathbf{Dc} = \mathbf{F}. \quad (20)$$

Należy zauważyć, że macierz \mathbf{D} jest zazwyczaj macierzą prostokątną, pełną i źle uwarunkowaną [5]. Powyższe cechy determinują poszukiwanie rozwiązań układu (20) w sensie najmniejszych kwadratów w połączeniu z technikami regularyzacji.

Gdy w układzie (20) macierz główna jest prostokątna i źle uwarunkowana, to w takim przypadku należy stosować metody regularyzacji [3]. Do najbardziej popularnych technik regularyzacji stosowanych podczas rozwiązywania zadań źle uwarunkowanych i źle postawionych należą metody regularyzacji wariacyjnej [3]: metoda rozkładu wg wartości osobliwych (ang. *singular value decomposition* - SVD) wraz ze swym uogólnieniem, równoważna jej metoda pseudoodwrotności Monroe'a – Penrose'a, metoda regularyzacji Philipsa – Tikhonova, metoda gradientów sprzężonych oraz inne metody. Dodatkowo stosuje się szereg metod pomocnych w określeniu optymalnych wartości parametrów regularyzacji: metodę krzywej L i metodę krzyżowego uwiarygadniania (ang. *cross-validation*) wraz ze swym uogólnieniem. W niniejszej pracy wykorzystano metodę opartą na rozkładzie SVD.

3. PRZYKŁAD NUMERYCZNY

Piezoelektryczna tarcza prostokątna (w uogólnionym elektromechanicznym płaskim stanie odkształcenia) pokazana na rys.1. jest poddana działaniu ciśnienia ściskającego o wartości $\sigma=5$ MPa. Wymiary tarczy przyjęto jako $L=2h=1$ mm, jest ona wykonana z ceramiki piezoelektrycznej typu PZT-4 [1,4]. Przyjęto, że gęstość powierzchniowa ładunku jest równa zero na poziomych krawędziach tarczy. Na krawędziach pionowych założono istnienie potencjału o wartości $V_0=\pm 1000$ V. Na brzegu tarczy wprowadzono 44 węzły brzegowe, maksymalny stopień wielomianu funkcji Trefftza – 21.. Dla porównania wyników układ analizowano metodą elementów brzegowych i stąd brzeg układu podzielono również na 44 stałe elementy brzegowe. Prezentowany przykład numeryczny był już analizowany wcześniej MEB [1].



Rys.1. Tarcza piezoelektryczna wraz z warunkami brzegowymi

W tabeli 1. porównano błąd rozwiązania, dla uogólnionych przemieszczeń: potencjału elektrycznego ϵ_ϕ oraz przemieszczeń wypadkowych ϵ_{uw} , uzyskanego metodą Trefftza oraz MEB. Jako miarę jakości przyjęto błąd średniokwadratowy wyznaczony względem rozwiązania analitycznego [1].

Tabela 1 Jakość rozwiązania numerycznego

Metoda	Błąd średniokwadratowy	
	ϵ_{φ} [%]	ϵ_{uw} [%]
Trefftz	0.73	2.04
Trefftz bez regularyzacji	2.31	2.34
MEB	0.74	2.20

Można zauważyć dobrą zgodność wyników otrzymanych metodami Trefftza i MEB. Zastosowanie regularyzacji pozwoliło zmniejszyć błędy rozwiązania. Należy również podkreślić, że w przykładzie zastosowano małą liczbę punktów kolokacji.

W tabeli 2 pokazano wpływ ilości składników rozwinięcia (16) (wyrażony stopniem wielomianów T-funkcji) na jakość rozwiązania.

Można zauważyć jednoczesny spadek wartości residuum oraz błędu rozwiązania wraz ze wzrostem liczby składników rozwinięcia. Wzrost ten ma charakter skokowy, co pokazuje różnica między wynikami dla wielomianów stopnia 12 i 15.

Tabela 2 Wpływ ilości składników rozwinięcia szeregu T-funkcji na błąd rozwiązania

Stopień funkcji Trefftza	Residuum $\ Dc - F\ _2$	Błąd średniokwadratowy	
		ϵ_{φ} [%]	ϵ_{uw} [%]
12	$5.69 \cdot 10^{-5}$	81.50	57.33
15	$5.81 \cdot 10^{-6}$	2.02	2.45
18	$2.48 \cdot 10^{-6}$	0.74	1.93
21	$1.19 \cdot 10^{-6}$	0.73	2.04

W kolejnej tabeli przedstawiono wpływ ilości składników rozwinięcia na wskaźnik uwarunkowania macierzy głównej układu (20) $\text{Cond}(A)$.

Tabela 3 Wskaźnik uwarunkowania macierzy głównej układu (20)

Stopień funkcji Trefftza	$\text{Cond}(A)$
3	$3.90 \cdot 10^4$
6	$1.69 \cdot 10^6$
9	$1.34 \cdot 10^{10}$
12	$1.26 \cdot 10^{14}$
15	$1.78 \cdot 10^{18}$
18	$2.92 \cdot 10^{22}$
21	$1.19 \cdot 10^{27}$

Na podstawie wyników przedstawionych w tabeli 3. można potwierdzić przydatność oraz efektywność wprowadzonych technik regularyzacji.

4. WNIOSKI

W niniejszej pracy sformułowano pośrednią metodę Trefftza dla rozwiązywania płaskich zagadnień brzegowych liniowej piezoelektryczności. Wyprowadzono, stosując formalizm

Stroha, zbiór funkcji Trefftza, zaproponowano rozwiązanie kollokacyjnej wersji metody za pomocą regularyzowanego rozkładu SVD. Utworzono program komputerowy według algorytmu metody, za pomocą którego przeprowadzono test numeryczny potwierdzający skuteczność wprowadzonych rozwiązań. Wyprowadzone funkcje Trefftza można stosować tylko dla obszarów jednorodnych i bez osobliwości geometrycznych, co stanowi pewne ograniczenie metody [5]. Dodatkowo formalizm Stroha wymaga obliczeń z wykorzystaniem liczb zespolonych, a rozwiązywanie głównych równań metody wymaga regularyzacji. Mimo to wprowadzone sformułowanie ma wiele zalet: jest to brzegowa metoda bezsiatkowa, rozmiary macierzy układy rozwiązującego są zazwyczaj mniejsze niż w MES lub MEB, metoda nie wymaga całkowania, jej dokładność jest porównywalna z MES i MEB [5]. Należy również podkreślić, że wprowadzone techniki regularyzacji umożliwiają uzyskanie rozwiązań o stosunkowo wysokiej dokładności. Zastosowany formalizm Stroha zapewnia zwarte i proste postaci zbioru T-funkcji. Zalety te umożliwiają również zastosowanie go w przypadkach innych sprzężeń (piezomagnetyczność, termopiezoelektryczność).

LITERATURA

1. Dziatkiewicz G.: Analiza materiałów piezoelektrycznych metodą elementów brzegowych – wpływ kierunku polaryzacji. Modelowanie Inżynierskie, 32 (2006), s. 127-134.
2. Jin W.G., Sheng N., Sze K.Y., Li J.: Trefftz indirect method for plane piezoelectricity. Int. J. Num. Meth. Eng., 63 (2005), s. 139-158.
3. Marin L., Elliot L., Ingham D.B., Lesnic D.: Boundary element regularisation methods for solving the Cauchy problem in linear elasticity. Inv. Probl. Eng., 10 (2002), s. 335-357.
4. Pan E.: A BEM analysis of fracture mechanics in 2D anisotropic piezoelectric solids. Eng. Anal. Bound. Elem., 23 (1999), s. 67-76.
5. Portela A., Charafi A.: Programming Trefftz boundary elements. Adv. Eng. Soft., 28 (1997), s. 509-523.
6. Qin Q.-H.: Variational formulations for TFEM of piezoelectricity. Int. J. Sol. Struct., 40 (2003), s. 6335-6346.
7. Sheng N., Sze K.Y., Cheung Y.K.: Trefftz solutions for piezoelectricity by Lekhnitskii's formalism and boundary-collocation method. Int. J. Num. Meth. Eng., 65 (2006), s. 2113-2138.
8. Xiaoping Z., Zhen-han Y.: Some applications of the Trefftz method in linear elliptic boundary-value problems. Adv. Eng. Soft., 24 (1995), s. 133-145.

SOLVING BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF LINEAR PIEZOELECTRICITY USING THE INDIRECT TREFFTZ METHOD

Summary. The coupled field analysis of piezoelectric materials requires solution of continuum mechanics and continuum electrodynamics equations. In this work, formulation of the indirect Trefftz method is introduced. In the Trefftz method, the solution of the boundary-value problem is approximated by the T-complete functions. The Stroh formalism allows to obtain the T-complete functions. The collocation method assumes that the residuals vanish at the boundary points. The resulting system of algebraic equations is usually solved by using the least square method.