

## BEZWYMIAROWE TRANSFORMACJE I RETRANSFORMACJE W SYNTEZIE MECHATRONICZNYCH UKŁADÓW DRGAJĄCYCH

ANDRZEJ BUCHACZ, DAMIAN GAŁĘZIOWSKI

*Instytut Automatykacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania, Politechnika Śląska*

*e-mail: andrzej.buchacz@posl.pl , damian.galeziowski@interia.pl*

Streszczenie. W pracy przedstawiono syntezę układów drgających ze względu na podane wymagania dynamiczne w postaci widm częstości.

Zadanie odwrotne rozwiązuje się, korzystając z klasycznych metod syntezy (rozkład na ułamki proste, rozkład na ułamki rozgałęzione, metoda rozszerzona przez Gliwicki Ośrodek Naukowy). Otrzymane, na drodze rozwiązania zadania odwrotnego, układy mechaniczne, transformuje się do układów bezwymiarowych, a następnie retransformuje do struktur mechatronicznych, zbudowanych z dyskretnych układów mechanicznych i elementów piezoelektrycznych. Piezoelektryki połączone są z zewnętrznymi obwodami elektrycznymi  $L_x R_x C_x$ .

W pracy pokazano problem bezwymiarowych transformacji i retransformacji na przykładzie wybranych układów kaskadowego i rozgałęzionego.

### 1. WSTĘP

Literatura dotycząca syntezy układów fizycznych, zarówno elektrycznych jak i mechanicznych, jest dobrze poznana [1-4]. Niejednoznaczność opisu modelu w porównaniu z układem rzeczywistym, w przypadku struktur mechanicznych spowodował dalszy rozwój prac badawczych z tego zakresu. Na początku lat osiemdziesiątych, w gliwickim ośrodku naukowym, podjęto prace nad syntezą i projektowaniem drgających układów ciągłych [5], dyskretnych [6,7] i dyskretno ciągłych [8,9].

Brak jest natomiast w znanej literaturze pozycji dotyczących syntezy struktur mechatronicznych składających się z części mechanicznej i elementów piezoelektrycznych. W pracach [10,11] wykazano możliwość zastosowania piezo aktuatora jako elementu tłumiącego w funkcji tłumienia pasywnego oraz pół-aktywnego, ale ograniczono się do analizy układu o jednym stopniu swobody.

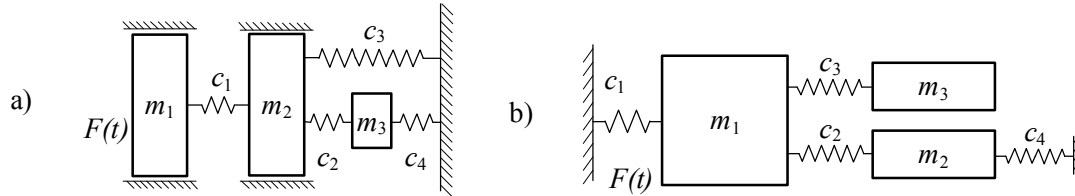
Praca jest kontynuacją dotychczasowych badań autorów w zakresie projektowania mechatronicznych układów drgających w ujęciu rozwiązania zadania odwrotnego ze względu na obrane wymagania w postaci ciągu zer i biegunów [12-14].

W pracy, na podstawie [1-14], jest przedstawiony kluczowy etap projektowania, polegający na bezwymiarowych transformacjach otrzymanych na drodze syntezy układów dyskretnych mechanicznych i ich retransformacjach do układów mechatronicznych.

Transformacje uszczegółowiono na przykładzie syntezy wybranej struktury kaskadowej i rozgałęzionej.

## 2. BEZWYMIAROWE TRANSFORMACJE W SYNTEZIE MECHATRONICZNYCH UKŁADÓW DRGAJĄCYCH

Zastosowanie odpowiedniej metody rozwiązywania zadania odwrotnego umożliwia projektowanie układów ze względu na wymagany typ struktury układu mechanicznego.



Rys.1. Przykładowe struktury mechaniczne otrzymane na drodze syntezy: a) metodą rozkładu na ułamki łańcuchowe, b) metodą rozkładu na ułamki proste

Syntezy dokonuje się w oparciu o wymagania dynamiczne w postaci ciągu biegunów i zer wyrażonych w [rad/s]. Funkcje charakterystyczne natomiast rozpatruje się w postaci powolności lub ruchliwości.

$$V(s) = \frac{1}{U(s)}, \quad (1)$$

gdzie:  $V(s)$  – ruchliwość,  $U(s)$  – powolność.

Otrzymane następnie na drodze syntezy i odpowiednich przekształceń równań ruchu, struktury mechaniczne sprowadza się do postaci bezwymiarowej. Proces ten opisano w kolejnych podrozdziałach.

### 2.1. Układ kaskadowy i rozgałęziony

Równania ruchu układu przedstawionego na rys.1a, zapisano w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{c_1} \ddot{x}_1 + (x_1 - x_2) &= \frac{F \sin(\Omega t)}{c_1}, \\ \frac{m_2}{c_3} \ddot{x}_2 + \frac{c_1}{c_3} (x_2 - x_1) + \frac{c_2}{c_3} (x_2 - x_3) + x_2 &= 0, \\ \frac{m_3}{c_2} \ddot{x}_3 + (x_3 - x_2) + \frac{c_4}{c_2} x_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Zastosowano odpowiednie parametry zdefiniowane jako:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 = \frac{c_1}{m_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{c_3}{m_2}, \quad \omega_3^2 = \frac{c_2}{m_3}, \quad x_0 = \frac{F}{c_1}, \quad \eta = \frac{\Omega}{\omega_m}, \\ \beta = \frac{c_2}{c_3}, \quad \gamma = \frac{c_1}{c_3}, \quad \delta = \frac{c_4}{c_2}, \quad \lambda_1 = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

układ rozpatrzono w bezwymiarowym czasie  $\tau$ :

$$\tau = \omega_1 t, \quad \ddot{x}_i = \omega_1^2 x_i'', \quad i = 1 \dots 3, \quad (4)$$

dzięki czemu zapisano

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\gamma & 1+\gamma+\beta & -\beta \\ 0 & -1 & 1+\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \sin(\eta\tau) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

W przypadku struktur rozgałęzionych postępuje się wg podobnego schematu. Równanie ruchu układu z rys. 1b. zapisano w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \frac{m_1}{c_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2}{c_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3}{c_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+\frac{c_3+c_2}{c_1} & -\frac{c_2}{c_1} & -\frac{c_3}{c_1} \\ -1 & 1+\frac{c_4}{c_2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F \sin(\Omega t)}{c_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Następnie zdefiniowano:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{c_1}{m_1}, & \omega_2^2 &= \frac{c_2}{m_2}, & \omega_3^2 &= \frac{c_3}{m_3}, & x_0 &= \frac{F}{c_1}, & \eta &= \frac{\Omega}{\omega_m}, \\ \gamma &= \frac{c_3}{c_1}, & \beta &= \frac{c_2}{c_1}, & \alpha &= \frac{c_4}{c_2}, & \lambda_1 &= \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}, & \lambda_2 &= \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2} \end{aligned} \quad (7)$$

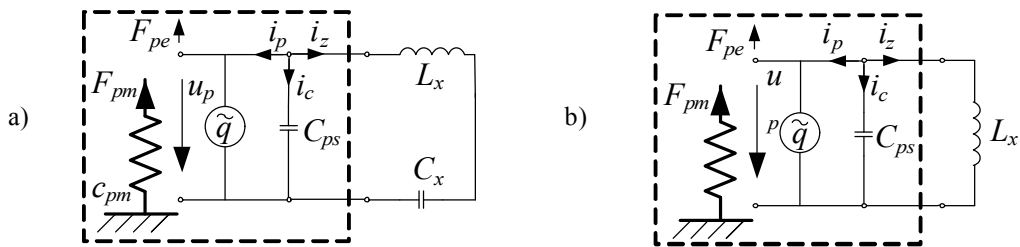
oraz korzystając z zależności (4), zapisano bezwymiarowy układ równań w postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+\gamma+\beta & -\beta & -\gamma \\ -1 & 1+\alpha & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \sin(\eta\tau) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

### 3. RETRANSFORMACJE WYMIAROWE

Na podstawie (5) i (8) przeprowadzono retransformację do postaci wymiarowej struktury mechatronicznej, składającej się z części mechanicznej i elementu piezoelektrycznego, przyłączonego do zewnętrznego obwodu elektrycznego.

W tym celu ograniczony ośrodek piezoelektryczny, w przypadku rozpatrywanych układów, modeluje się wg schematu z rys. 2.



Rys.2. Model elementu piezoelektrycznego: (a) połączonego z obwodem  $L_x C_x$  – rozpatrywany układ kaskadowy, (b) połączonego z obwodem  $L_x$  – układ rozgałęziony

Na podstawie znanych związków opisujących efekt piezoelektryczny (równanie naprężeń mechanicznych i przesunięcia elektrycznego ośrodka piezoelektrycznego) zdefiniowano ładunek elektryczny na płytkach piezoelektryka jako:

$$Q_p = e \frac{A_p}{l_p} x_i + \varepsilon_s \frac{A_p}{l_p} u_p, \quad (9)$$

gdzie:  $i$  – zależne jest od miejsca przyłączenia piezoelektryka do układu mechanicznego oraz liczby jego stopni.

W przypadku układu rozgałęzionego, równanie obwodu elektrycznego zapisano w postaci:

$$i_p + i_C + i_{LC} = e \frac{A_p}{l_p} \dot{x}_2 + C_{p,s} \dot{u}_p + \frac{1}{L_x} \frac{\partial}{\partial t} u_p = 0, \quad (10)$$

natomiast w odniesieniu do syntezowanej struktury kaskadowej:

$$i_p + i_C + i_{LC} = e \frac{A_p}{l_p} \dot{x}_2 + C_{p,s} \dot{u}_p + \frac{1}{L_x \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{C_x} \int dt} u_p = 0. \quad (11)$$

Po przekształceniach otrzymano:

$$L_x C_{p,s} (\ddot{x}_2 + \frac{\varepsilon_s}{e} \ddot{u}_p) + \frac{C_{p,s}}{C_x} (x_2 + \frac{\varepsilon_s}{e} u_p) + \frac{\varepsilon_s}{e} u_p = 0. \quad (12)$$

Siłę  $F_p$  pochodzącą od elementu piezoelektrycznego definiuje się jako:

$$F_p = F_{pm} + F_{pe}. \quad (13)$$

Na podstawie (4), (9) i (12), oraz definiując zmienną  $x_3$  jako:

$$x_3 = x_2 + u_p \frac{\varepsilon_s}{e}. \quad (14)$$

Można zapisać równania dynamiczne układu kaskadowego mechatronicznego

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & L_x C_{p,s} & \frac{\varepsilon_s}{e} LC_{p,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{u}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_3 & -\frac{c_2 \varepsilon_s}{e} \\ 0 & \frac{C_{p,s}}{C} & \frac{\varepsilon_s}{e} \left(1 + \frac{C_{p,s}}{C_x}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

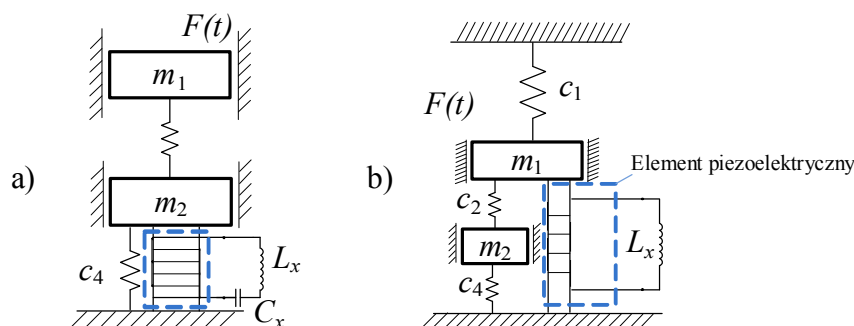
oraz w przypadku układu rozgałęzionego:

$$x_3 = x_1 + u_p \frac{\varepsilon_s}{e}. \quad (16)$$

Równania dynamiczne struktury mechatronicznej rozgałęzionej zapisano jako:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ L_x C_{p,s} & 0 & \frac{\varepsilon_s}{e} LC_{p,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{u}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & -\frac{c_3 \varepsilon_s}{e} \\ -c_2 & c_2 + c_4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_s}{e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

W wyniku tak przeprowadzonych transformacji, z układów mechanicznych, otrzymanych bezpośrednio z rozwiązania zadania odwrotnego odpowiednią metodą (rys. 1.), otrzymano struktury mechatroniczne jak na rys. 3.



Rys. 3. Struktury mechatroniczne uzyskane w wyniku syntezy i transformacji: układ kaskadowy (a), układ rozgałęziony (b)

Na podstawie porównania równań (15) z (5) oraz pamiętając o (3) i (4) na przykładzie struktury kaskadowej, wyznaczono parametry  $L_x$  i  $C_x$  zewnętrznego obwodu elektrycznego:

$$L_x = \frac{C_{p,s} \omega_2^2}{\lambda_2} [\text{H}], \quad C_x = \frac{C_{p,s}}{\delta} [\text{F}]. \quad (18)$$

Wymienione w artykule wielkości elektryczne opisujące element piezoelektryczny wyznacza się, korzystając ze znanych związków opisujących efekt piezoelektryczny, łączący naprężenia mechaniczne z przesunięciem elektrycznym ośrodka.

#### 4. SPOSTRZEŻENIA

Synteza układów fizycznych jest dobrze poznana [1-9]. Wskutek zastosowania bezwymiarowych transformacji i retransformacji możliwe jest poszerzenie jej wykorzystania o projektowanie układów mechatronicznych składających się ze struktur mechanicznych (różnorodność budowy) oraz elementów piezoelektrycznych, połączonych z zewnętrznymi obwodami elektrycznymi.

Dodatkowo, rodzaj użytej metody rozwiązywania zadania odwrotnego determinuje nie tylko schemat zewnętrznego obwodu elektrycznego, do którego przyłączony jest element piezoelektryczny, ale i funkcję jego tłumienia - jako pasywnego bądź półaktywnego, co przedstawiono w [13,14]. Dzięki czemu możliwe jest zwiększenie obszaru wykorzystania materiałów piezoelektrycznych.

Dalsze badania, próba sformalizowania oraz przykłady obliczeniowe będą kolejnymi tematami artykułów oraz publikacji.

#### LITERATURA

1. Bellert S., Wojciechowski J.: Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych. Warszawa : WNT, 1968.
2. Biało M. [red]: Filtry aktywne RC. Warszawa: WNT, 1979,
3. Arczewski K.: Analiza i synteza drgających układów mechanicznych metodą liczb strukturalnych. Praca doktorska. Warszawa: Pol. Warsz., 1974.

4. Soluch W. [red.]: Filtry piezoelektryczne. Warszawa: WKŁ, 1982.
5. Buchacz A.: Synteza drgających układów prętowych w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. Zesz. Nauk. Pol. Śl. „Mechanika” z. 104, Gliwice 1991.
6. Dymarek A.: Odwrotne zadanie dynamiki tłumionych mechanicznych układów drgających w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. Praca doktorska. Gliwice: Pol. Śl., 2000.
7. Dymarek A.: Komputerowo wspomagana synteza dyskretnych układów mechanicznych z tłumieniem. Zesz. Nauk. Kat. Automatykacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania. Gliwice 2003, z. 1, s. 15-22.
8. Dzitkowski T.: Komputerowo wspomagana synteza dyskretno-ciągłych układów mechanicznych z tłumieniem. Zesz. Nauk. Kat. Automatykacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania. Gliwice 2003, z. 3, s. 23-32.
9. Dzitkowski T.: Odwrotne zadania dynamiki dyskretno-ciągłych układów mechanicznych w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. Praca doktorska. Gliwice: Pol. Śl., 2001.,
10. H. Ahlers: Passive Dämpfung reibungsinduzierter Bremsgerausche mit Piezoelementen. VDI Verlag GmbH, Dusseldorf 2002.
11. Neubaer M., Oleskiewicz R., Popp K., Krzyżynski T.: Optimization of damping and absorbing performance of shunted piezo elements utilizing negative capacitance. “Journal of Sound and Vibration” 2006, Vol. 298, No1-2, p. 84-107..
12. Buchacz A., Gałęziowski D.: Zadanie odwrotne jako projektowanie mechatronicznych układów drgających. W: XLVIII sympozjon „Modelowanie w mechanice”. Streszczenia referatów. Wisła, 2009.
13. Buchacz A., Gałęziowski D.: Introduction to synthesis and transformations of mechatronic systems. “Journal of Proceedings of 16<sup>th</sup> International Science-Technical Conference-Mašinostroenie i Technosfera XXI. Veka” 2009, Vol. 4, p. 38-41.
14. Buchacz A., Gałęziowski D.: Introduction to reverse task as a designing of mechatronics systems. Sevastopol (2009), p.171-172 [in:] Kopp V.Ya. Ed.: Automation: Problems, Ideas, Solutions: Journal of Proceedings of International Scientific and Technical Conference, Publishing House SevNTU, 2009

## **DIMENSIONLESS TRANSFORMATIONS AND RETRANSFORMATIONS OF MECHATRONIC VIBRATING SYSTEMS**

Summary. In this paper mechatronic vibrating systems have been synthesized in terms of dynamical properties in the form of frequency spectrum. Inverse task is solved using classical methods of synthesis and extended method, developed by Gliwice Research Centre. Received cascade and branched systems by use of dimensionless transformation have been replaced by non-dimensional model and in the next step retransformed to mechatronic structures built of mechanical discrete systems with piezoelectric material connected to external  $L_x R_x C_x$  network.