

Wiesław PIWOWARSKI¹⁾, Jan ZYCH²⁾

¹⁾Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

Wydział Geodezji Górniczej i Inżynierii Środowiska

²⁾Politechnika Śląska, Gliwice

Katedra Geomechaniki, Budownictwa Podziemnego
i Zarządzania Ochroną Powierzchni

ANALIZA TRAJEKTORII DYNAMIKI PROCESU PRZEMIESZCZEŃ POGÓRNICZYCH

Streszczenie. Artykuł dotyczy analizy trajektorii przemieszczania się punktów ośrodka w rejonie wpływów eksploatacji podziemnej. Oszacowany rozrzut procesu przemieszczeń – na podstawie analiz – wskazuje, że dokładność opisu deterministycznego jest tu istotnie ograniczona. Stąd w pracy podano równania opisu quasistochastycznego i przedstawiono stosowne odwzorowanie ilościowe konkretnego procesu. Ocena jakości odwzorowania – przez odpowiednie miary – potwierdza dobre pokrycie realnych wyników (pomiar) odwzorowaniem quasistochastycznym.

THE ANALYSIS TRAJECTORY OF THE DYNAMICS OF THE POST-MINING DISLOCATION PROCESS

Summary. The paper concerns the analysis of the dynamics of the points displacement in area of mining influences. The problem of changes of body configuration caused by underground mining influence has been described in the term of goodness of fit to results of field measurements.

Observations of the real process indicate that the trajectories of points movement are characterized by the irregularity therefore analysis has been characterized by randomness of the phenomenon. It follows that in general the description of a deterministic process can not be approximated with any accuracy of measurement results. In this paper the trial of reflection of analyzed process by stochastic formula has been presented.

1. Wprowadzenie

Proces przemieszczeń pogórnich jest skutkiem obciążeń powierzchniowych i objętościowych, wynikających z oddziaływania dokonanej lub istniejącej eksploatacji – co powoduje powstanie wektorowego pola przemieszczeń. Formalny opis procesów fizycznych stanowią najczęściej równania różniczkowe, zawierające pewne parametry, które charakteryzują właściwości fizyczne zjawisk i otoczenia [4, 8, 10]. Identyfikacja modelu – wyznaczanie parametrów – bazuje tu na wynikach pomiaru określonego atrybutu procesu.

Nieuniknione błędy pomiarowe oraz „losowość” rozważanych procesów powodują, że elementy te zazwyczaj nie mogą być określone przez funkcję $f(\cdot)$, lecz wyrażane są jako rodzina funkcji $f_{\omega}(\cdot)$. Stąd też opis większości procesów realnych prowadzi do zamiany funkcji $f(\cdot)$ na losową funkcję $f_{\omega}(\cdot)$ [1, 8, 10]. Przy czym parametr ω bywa interpretowany jako element przestrzeni probabilistycznej. Podobne przeformułowanie często obejmuje także warunki dodatkowe. Procedura zastępowania w równaniach współczynników elementami losowymi dotyczy ewolucji czasowej dużej liczby cząstek materialnych – równania Hamiltona. Stąd też dla konkretnych rozwiązań z reguły wprowadza się zespół zmiennych dynamicznych do układu równań różniczkowych, określających stan układu w chwili t , gdy określony jest stan układu w chwili $t = t_0$.

Przedmiotem rozważań jest problem opisu niestacjonarnego procesu pogórnich przemieszczeń.

2. Charakterystyka zagadnienia

Przemieszczenia i odkształcenia górotworu w stanie nieustalonym analizuje się z reguły na bazie sprzężenia teorii geometryczno-całkowych z równaniami różniczkowymi. Przy czym teorie geometryczno-całkowe *explicite* nie uwzględniają własności ośrodka.

Prace w tej dziedzinie sięgają początku XX wieku i były rozpoczęte głównie przez badaczy niemieckich. W Polsce podstawy do badań stworzyło równanie podane przez S. Knothego. Według jego koncepcji, prędkość osiadania punktu nad eksploatacją jest proporcjonalna do różnicy między osiadaniami końcowym, jakiemu podlega punkt, a osiadaniami chwilowym tego punktu:

$$\frac{dw(t)}{dt} = c[w_k - w(t)], \quad (1)$$

gdzie:

$w(t)$ – wartość osiadania w chwili t ,

w_k – wartość końcowa osiadania,

c – współczynnik proporcjonalności, zwany współczynnikiem czasu.

Rozwiązaniem równania różniczkowego (1) przy założeniu, że w_k jest const. (model dyskretny) dla $t = 0$, $w(t) = 0$, jest wzór:

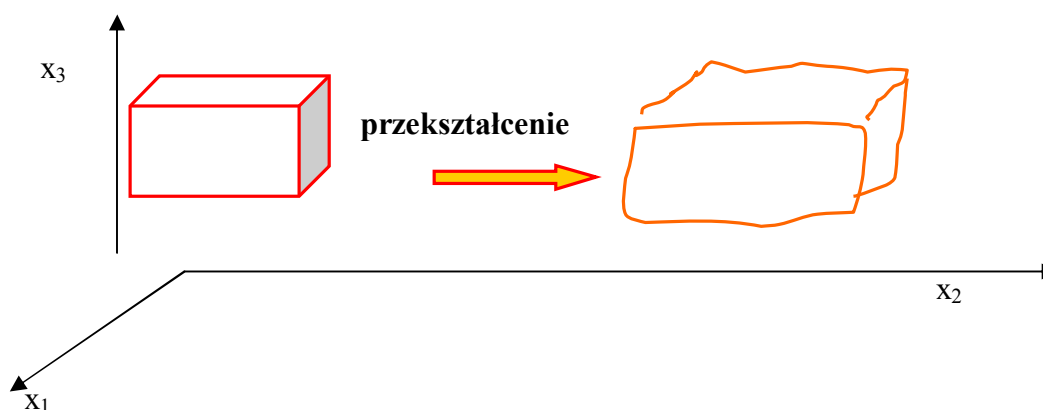
$$w(t) = w_k [1 - \exp(-ct)], \quad (2)$$

Podane wyżej wzory dały podstawę wielu polskim badaczom do dalszych badań.

3. Trajektorie procesu przemieszczeń

Zawarte w artykule rozważania dotyczyć będą granicznego przybliżenia wyników opisu nieustalonego pola przemieszczeń na podstawie stosowanych teorii ruchów górotworu, względem wyników pomiaru. Nie zakłada się, by graniczne przybliżenie obydwu odwzorowań stanowiło koherencję, oczekuje się jedynie, by odpowiednia miara przybliżenia nie przekraczała ustalonych wielkości dopuszczalnych. Implikacją złamania dopuszczalnej miary przybliżenia będzie zdefiniowanie innej formuły odwzorowania analizowanego procesu.

Niech proces dynamiczny opisuje układ równań różniczkowych I-go rzędu (1).



Rys. 1. Ewolucja konfiguracji ośrodka w przestrzeni trójwymiarowej
Fig. 1. Evolution of medium configuration in three-dimensional space

Równania przemieszczeń w stanie nieustalonym:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, x_3, \gamma_1) \\ \frac{du_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, x_3, \gamma_2) \\ \frac{du_3}{dt} &= F_3(x_1, x_2, x_3, \gamma_3) \end{aligned} \right\} . \quad (3)$$

Układ równań (3) wymaga zdefiniowania operatorów $[F_i]$ oraz identyfikacji parametrów $\gamma_i \Big|_{i=1}^3$. Identyfikacje γ_i przeprowadza się na podstawie pomiarów trajektorii procesu.

Odpowiednikiem – w pewnym sensie – układu równań (3) jest równanie (4).

Przeanalizujmy więc rozwiązanie równania (2):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad ; \quad t > 0, \quad x \in R^n \\ u(0, x) &= f(x) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Funkcję $u : [0, \infty) \times R^n \rightarrow R$ nazywamy *klasycznym* rozwiązaniem problemu (4) [11], jeśli spełnia następujące warunki:

- 1) u jest ciągła w $[0, \infty) \times R^n$,
- 2) u ma ciągłe pochodne, tzn. $\exists u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j}$; $(i, j = 1, \dots, n)$, i spełnia równanie (4)

w zbiorze $(0, \infty) \times R^n$,

- 3) $u < \infty$.

W teorii równań różniczkowych dowodzi się, że dla $\forall f : R \rightarrow R$ ciągłej i ograniczonej, problem (4) ma dokładnie jedno rozwiązanie dla $t > 0, x \in R^n$, mamy więc:

$$u(t, x) = \int_{R^n} \Gamma(t, x - y) f(y) dy, \quad (5)$$

gdzie:

$$\Gamma(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{4t} |x|^2\right). \quad (6)$$

Można udowodnić, że rozwiązanie równania (4) w formie (5) *istnieje* i jest *jednoznaczne*.

Jeżeli $f : R^n \rightarrow R$ jest ciągła i ograniczona, to, jak już zaznaczono, rozwiązanie jest klasyczne.

Operator różniczkowy w równaniu (4) zapiszmy jako:

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{(\partial x_i)^2}.$$

Po zróżniczkowaniu $\forall c \in R^n$ zachodzi tożsamość:

$$L(\Gamma(t, x - c)) = 0, \quad \text{dla } t > 0 \quad x \in R^n \quad (7)$$

Dalej różniczkując formalnie (5), mamy:

$$Lu(t, x) = \int_{R^n} L\Gamma(t, x - y) f(y) dy, \quad \text{dla } t > 0, \quad x \in R^n \quad (8)$$

Różniczkowanie prowadzi się tu po czasie t i dwukrotnie po zmiennych przestrzennych x_i . Po wykonaniu tych operacji wszystkie składniki mają postać:

$$\frac{Q(x, y)}{t^\alpha} \exp\left\{-\frac{|x - y|^2}{4t}\right\}, \quad (9)$$

gdzie:

Q – wielomian stopnia co najwyżej II-go,

α – dodatnia stała,

ponieważ $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = f(x)$ jest niemal jednostajnie względem x . Ponadto, z ciągłości f

wynika ciągłość rozwiązania w $(0, x)$, $|u(t, x)| \leq \sup|f|$ implikuje ciągłość rozwiązania (5).

Ponieważ trajektorie przemieszczeń uzyskane z pomiarów procesu charakteryzują się wahaniami w otoczeniu wartości przeciętnej, sensownie jest więc analizować entropie rozwiązań równania (4).

Rozważmy rodzinę operatorów $\{p^t\}_{t \geq 0}$ zdefiniowanych następująco:

$$\left. \begin{aligned} p^t f(x) &= \int_{R^n} \Gamma(t, x-y) f(y) dy \\ p^0 f(x) &= f(x) \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

Operatory $p^t : L^1(R^n) \rightarrow L^1(R^n)$ są podwójnie stochastyczne.

Dla $f \in L^1(R^n)$ zachodzi:

$$u(t, \cdot) = p^t f, \quad t \geq 0. \quad (11)$$

Zauważmy, że jeżeli $f : R^n \rightarrow R$ jest ciągła i $f < \infty$, to funkcja $u(t, x) = p^t f(x)$ jest półgrupowym rozwiązaniem problemu początkowego (4). Dla równania (4) istnieje silny związek pomiędzy rozwiązaniem *klasycznym* a *półgrupowym*, a mianowicie:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} \|u(t, \cdot) - u_k(t, \cdot)\|_{L^1} = 0. \quad (12)$$

Zależność (12) wynika z następującego rozumowania: funkcje ciągłe o nośnikach zwartych tworzą zbiór gęsty w $L^1(R^n)$, jeżeli $f \in L^1(R^n)$. Niech (f_k) będzie ciągiem funkcji ciągłych i ograniczonych $\rightarrow f$ w normie L^1 i $u_k(t, x) = p^t f_k(x)$, a operatory p^t są stochastyczne, zatem:

$$\|u(t, \cdot) - u_k(t, \cdot)\|_{L^1} = \|p^t f - p^t f_k\|_{L^1} \leq \|f - f_k\|_{L^1}. \quad (13)$$

Dla dalszych rozważań podane zostanie twierdzenie o wzroście entropii.

Entropia charakteryzuje losowość wyników przed doświadczeniem. Entropia rozważanego procesu przemieszczeń, generowanego równaniem (4), jest różna od zera, co oznacza, że proces posiada własności procesu losowego. Ponieważ proces przemieszczeń zależy od czasu i warunków górniczo-geologicznych (a więc od parametrów), może więc być rozważany jako proces stochastyczny. Proces $u(t, \omega)$ jest funkcją mierzalną, tzn. $u(t, \omega) := \phi$,

przy czym $\phi: \Omega \rightarrow U$; gdzie Ω – przestrzeń zdarzeń, U – przestrzeń realizacji $\omega \in \Omega$; $u \in U$. Proces $u(t, \omega): T \times \Omega \rightarrow R$.

Jeżeli proces $u(t, \omega)$ jest mierzalnym procesem stochastycznym, to na mocy tw. Fubiniego [11] jest mierzalny jako funkcja t dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$, a więc realizacje (trajektorie) są mierzalne.

4. Próba opisu stochastycznego procesu przemieszczeń pogórnicznych

Rozpatrzmy proces losowy $\{\zeta_t\}_{t \in T}$ opisany następująco:

$$\zeta_t = u(\bar{t}-t; \bar{\xi}_t). \quad (14)$$

Funkcję $u(\bar{x}, \bar{t})$ generuje równanie różniczkowe (15):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}, \quad (15)$$

gdzie:

$\sigma_{ij}(\cdot)$ oraz $a_i(\cdot)$ – parametry.

Odniesienie do fizykalnego procesu przemieszczeń górotworu

Uwzględniając losowy charakter procesu [8], równanie trajektorii przemieszczeń można zapisać w postaci:

$$\begin{cases} \frac{d\zeta(t)}{dt} = k[t, \zeta(t)] + \sigma[t, \zeta(t)]\xi(t) \\ \zeta(t=0) = 0 \end{cases}. \quad (16)$$

Pierwszy człon w równaniu (16) stanowi opis deterministyczny, drugi wyraz to stochastyczne ujęcie nieregularności trajektorii procesu.

Część *deterministyczną* (16), zgodnie [3], przyjmijmy jako rozwiązanie równania różniczkowego liniowego (17):

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = f(\zeta_k; \gamma) \\ \zeta(t=0) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Z teorii równań różniczkowych wiadomo, że problem (17) posiada *jednoznaczne* rozwiązanie:

$$\zeta(x, t) = e^{t\gamma} f(\zeta_k(x)), \quad (18)$$

gdzie:

$\zeta_k(x)$ – asymptotyczna wartość przemieszczenia w chwili t .

W artykule przyjęto, że $\zeta_k(\cdot)$ wyznaczana będzie na podstawie teorii S. Knothego [6] dla $x \in \mathbf{R}^2$, mamy więc:

$$\zeta_k(\xi, t_k; t) = D \sum_{i=1}^k \left\{ f(t_i, \Lambda) \frac{\partial}{\partial x^i} \iint_{P[t_i, J]} \exp\left[-\frac{\pi}{\rho^2}((x^1)^2 + (x^2)^2)\right] dx^1 dx^2 \right\}, \quad (19)$$

gdzie:

$f(t_i, \Lambda)$ – funkcja czasu,

D, Λ, ρ – odpowiednie współczynniki i parametry teorii,

P – ślad rzutu pola eksploatacji na płaszczyznę poziomą.

Model (17) dla dyskretnej realizacji możemy zapisać następująco:

$$\zeta_{n+1} = \sum_{j=1}^n c_j \cdot \zeta_{n-j+1} + \varepsilon_{n+1}, \quad (20)$$

gdzie:

ε_i – człon losowy,

c_j – parametry wynikające z rozwiązania równania wyjściowego.

Zależność (20) jest tu modelem prognozy niestacjonarnego procesu przemieszczeń pogórnich, wywołanego eksploatacją podziemną.

5. Weryfikacja odwzorowań procesu

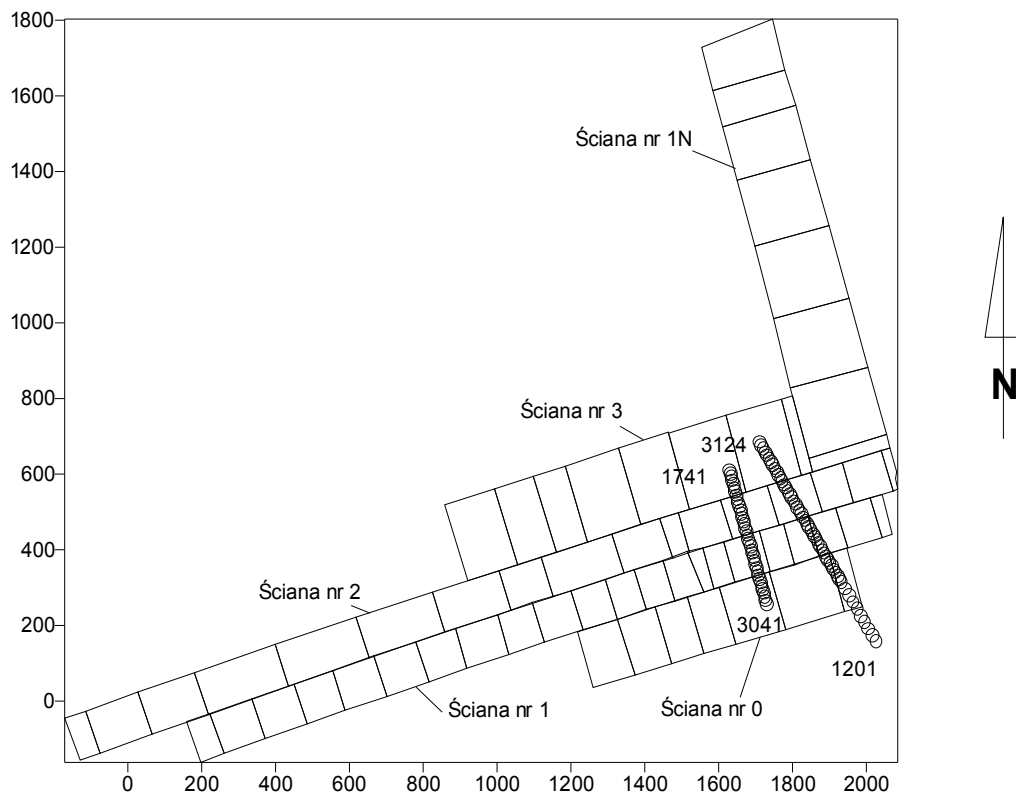
Charakterystyka linii obserwacyjnych i eksploatacji podziemnej

Do analizy wybrano dwie linie obserwacyjne (linia nr 1 i nr 2) znajdujące się na terenie KWK „Bogdanka”. Wymienione linie usytuowane są nad ścianami zawałowymi nr 0, 1, 2, 3, znajdującymi się w centralnej części kopalni (rys. 2), w pokładzie 382/2. Średnia grubość eksploatowanej warstwy wynosi 2,9 m, natomiast średnia głębokość eksploatacji wynosi 690 m. Odległość pomiędzy punktami linii pomiarowych (nr 1 i nr 2) wynosi około 10 m.

W wyniku indentyfikacji parametrów teorii S. Knothego dla linii obserwacyjnych uzyskano następujące wartości optymalnych parametrów $tg\beta$ oraz a :

Linia 1	$tg\beta = 1,65$	$a = 0,94$	$mW = 38,6$ [mm]
Linia 2	$tg\beta = 1,89$	$a = 0,79$	$mW = 32,6$ [mm],

Czasookres (1 do 62); Pomiar 5 (09.1992 r.)

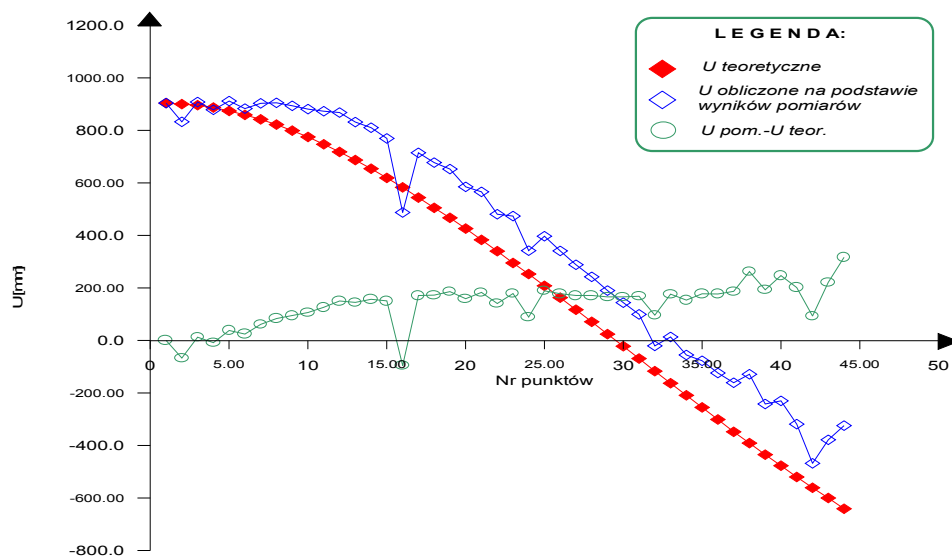


Rys. 2. Schemat rozwoju eksploatacji podziemnej
 Fig. 2. Scheme of development of underground exploitation

Weryfikacja obejmuje:

- porównanie odwzorowań według teorii S. Knothego, według modelu z uwzględnieniem zaburzeń stochastycznych, z wynikami pomiaru,
- przeprowadzenie analizy korelacyjnej pomiędzy wyszczególnionymi zmiennymi,
- test statystyczny t dla zmiennych zależnych,
- wykresy rozstępu dla parametrów statystycznych,
- histogramy rozkładu odchylek pomiędzy wynikami pomiaru a odwzorowaniami teoretycznymi.

Przesunięcia poziome punktów LINIA nr 1 (pomiar 09.1992 r.)



Rys. 3. Rozkład przemieszczeń poziomych dla optymalnych parametrów teorii \supset przemieszczeń pionowych

Fig. 3. Distribution of horizontal displacement for optimal parameters of horizontal displacement theory

Tabela 1

<i>Linia nr 1</i>											
Lp. pkt	Nr pkt.	U teor. [mm]	U pom. [mm]	U max. [mm]	Upom-U teor. [mm]	Lp. pkt	Nr pkt.	U teor. [mm]	U pom. [mm]	U max. [mm]	U pom-U teor. [mm]
1	1210	904	904,0	974	0,0	23	1221	295	473,6	428	178,6
2	3058	900	832,7	973	-67,3	24	3069	253	342,0	392	89,0
3	1211	896	908,3	971	12,3	25	1222	208	396,9	356	188,9
4	3059	887	878,4	964	-8,6	26	3070	163	340,9	323	177,9
5	1212	874	911,8	954	37,8	27	1223	117	288,1	293	171,1
6	3060	859	883,1	942	24,1	28	3071	71	242,3	267	171,3
7	1213	842	903,2	927	61,2	29	1224	24	189,8	247	165,8
8	3061	822	905,3	909	83,3	30	3072	-22	144,0	236	166,0
9	1214	799	893,8	889	94,8	31	1225	-69	99,2	233	168,2
10	3062	775	881,2	867	106,2	32	3118	-117	-20,8	241	96,2
11	1215	747	873,1	842	126,1	33	1226	-163	13,2	257	176,2
12	3063	718	868,1	814	150,1	34	3119	-209	-55,5	281	153,5
13	1216	687	831,8	785	144,8	35	1227	-255	-77,5	310	177,5
14	3064	654	810,6	755	156,6	36	3120	-301	-124,2	343	176,8
15	1217	619	769,4	722	150,4	37	1228	-348	-161,0	379	187,0

cd. tabeli 1

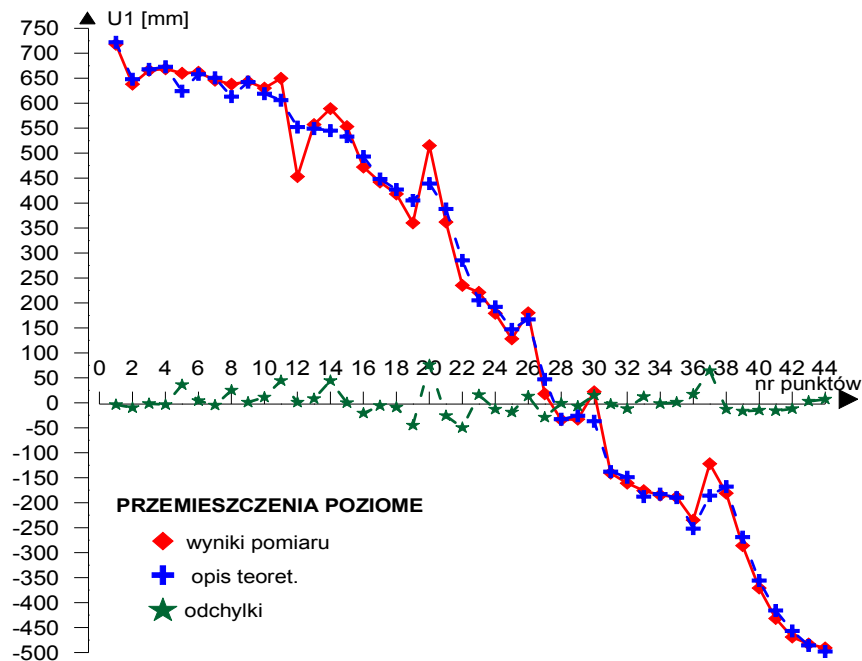
16	3065	583	487,2	688	-95,8	38	3121	-391	-128,7	416	262,3
17	1218	544	714,8	651	170,8	39	1229	-435	-242,0	454	193,0
18	3066	505	677,4	615	172,4	40	3122	-477	-230,0	492	247,0
19	1219	467	652,8	581	185,8	41	1230	-520	-318,8	530	201,2
20	3067	426	585,0	544	159,0	42	3123	-561	-468,1	568	92,9
21	1220	383	566,0	504	183,0	43	1231	-600	-378,6	605	221,4
22	3068	340	480,5	467	140,5	44	3124	-641	-324,6	645	316,4

Tabela 2

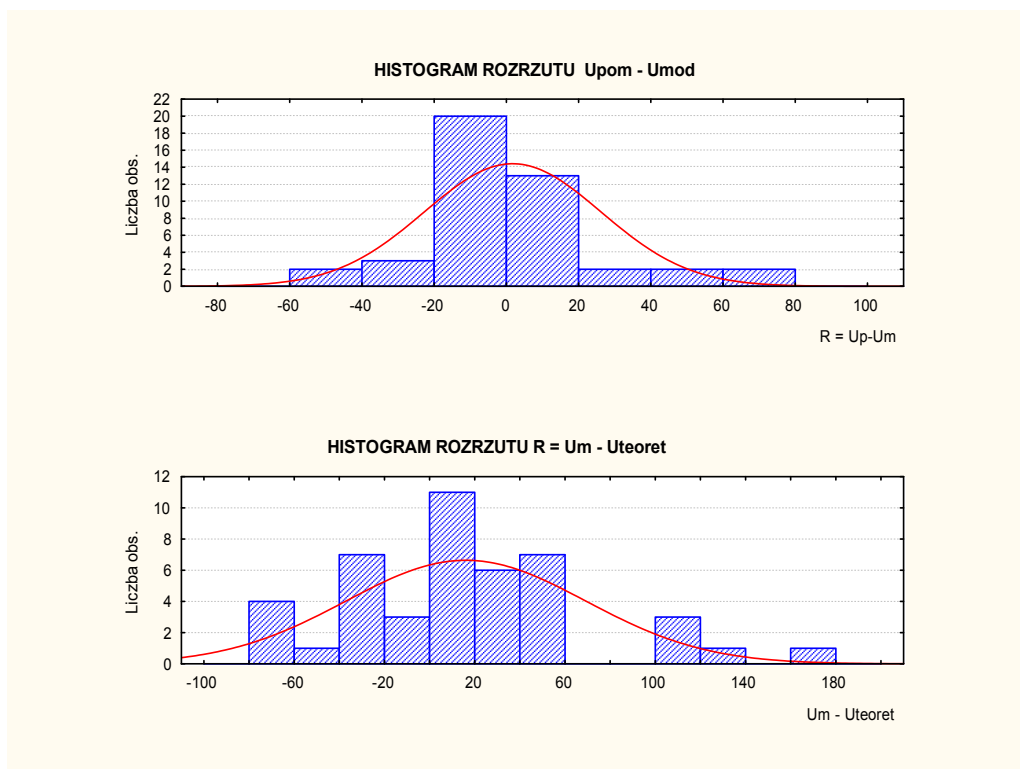
<i>Linia nr 2</i>									
Nr pkt.	U teor. [mm]	U pom. [mm]	U max. [mm]	U pom- U teor. [mm]	Nr pkt.	U teor. [mm]	U pom. [mm]	U max. [mm]	U pom- U teor. [mm]
3010	888	888	889	0	3029	142	249,8	146	107,8
3011	855	894,6	856	39,6	3030	108	226,6	112	118,6
3012	819	1205,2	820	386,2	3031	76	150,1	82	74,1
3013	780	993	781	213	3032	43	87,4	51	44,4
3014	739	837,8	740	98,8	3033	10	44,8	29	34,8
3015	699	809,6	701	110,6	3034	-23	-163,6	34	-140,6
3016	657	779	658	122	3035	-54	-76,9	59	-22,9
3017	614	774,7	615	160,7	3036	-88	52	91	140
3018	570	774,2	572	204,2	3037	-122	-96,8	124	25,2
3019	528	710,1	530	182,1	3038	-156	-234,9	157	-78,9
3020	484	705	486	221	3039	-191	-304,1	191	-113,1
3021	441	631,8	443	190,8	3040	-226	-350,8	226	-124,8
3022	399	591,6	401	192,6	3103	-263	-367,1	264	-104,1
3023	361	544	363	183	3104	-303	-316,3	303	-13,3
3024	321	467,6	323	146,6	3105	-344	-443,3	344	-99,3
3025	282	395,9	285	113,9	3106	-387	-720,6	387	-333,6
3026	245	393,4	247	148,4	3107	-430	-1148,3	430	-718,3
3027	209	370,3	212	161,3	3108	-475	-1726,3	475	-1251,3
3028	177	277,1	180	100,1	3109	-520	-2033,9	520	-1513,9

Przedstawiony na rysunku 3 rozkład *przemieszczeń poziomych* teoretycznych $u_i(t = \cos t, x)$, stanowi odwzorowanie U_{teor} na podstawie odpowiednich równań teorii [6,7].

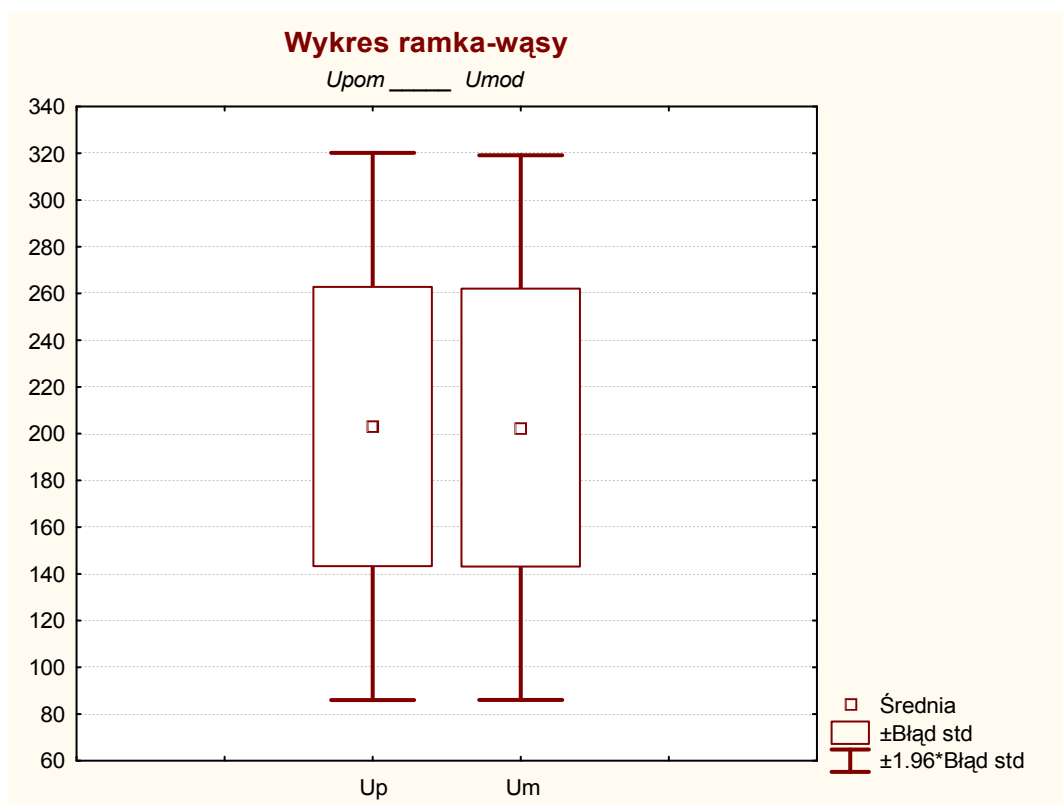
Przy czym optymalne parametry równań wyznaczono na podstawie wyników pomiaru *przemieszczeń pionowych*. Nie przeprowadzono identyfikacji parametrów dla ruchów poziomych, gdyż równania opisujące proces stanowią zamkniętą całość.



Rys. 4. Rozkład przemieszczenia poziomego $U(x; t = const)$: wyniki pomiaru, wyniki modelowania
 Fig. 4. Distribution of horizontal displacement $U(x; t = const)$: survey results, results for model



Rys. 5. Histogramy odchyłek pomiędzy $U_{pom} - U_{model}$ oraz $U_{model} - U_{teoret}$
 Fig. 5. Histograms of deviation between $U_{pom} - U_{model}$ and $U_{model} - U_{teoret}$



Rys. 6. Wykres rozstępu parametrów: średnia, błąd stand. zmiennych U_{pom} ; U_{mod}

Fig. 6. Graph of parameters' range: average, standard error of variables U_{pom} ; U_{mod}

Tabela 3

Zmienna	MACIERZ KORELACJI				
	U_{pom}	U_{model}	U_{teoret}	$U_{pom} - U_{model}$	$U_{model} - U_{teoret}$
U_{pom}	1	1	0,99	0,19	-0,23
U_{model}		1	0,99	0,12	-0,24
U_{teoret}			1	0,11	-0,36
$U_{pom} - U_{model}$				1	0,09
$U_{model} - U_{teoret}$					1

gdzie:

U_{pom} – wyniki pomiaru składowej poziomej przemieszczeń,

U_{model} – wyniki modelowania składowej poziomej przemieszczeń z uwzględnieniem losowości,

U_{teoret} – wyniki modelowania składowej poziomej przemieszczeń według teorii S. Knothego.

Test T dla prób zależnych

Tabela 4

Zmienna	Średnia	Odchylenie stand.	N	Różnice	t	P
U_{pom}	203,07	396,36	44			
U_{model}	202,59	394,50	-	0,48	0,105	0,917
$U_{pom} - U_{teoret}$	18,7	410,19	-	15,93	1,658	0,105
$U_{pom} - U_{model}$	1,29	24,36	-			
$U_{model} - U_{teoret}$	15,45	52,86	-	-14,16	-1,67	0,102

6. Spostrzeżenia wynikające z dokonanej analizy problemu

W artykule przedstawiono analizę dynamiki niestacjonarnego procesu przemieszczeń poziomych punktów linii pomiarowej w rejonie wpływów eksploatacji górniczej. Wzorzec składowej poziomej górniczych przemieszczeń stanowią tu wyniki pomiaru przemieszczeń punktów w całym przedziale czasu obserwacji $\{t_0, \dots, t_k\}$.

Dokładność opisu niestacjonarnych przemieszczeń na bazie odwzorowania deterministycznego – teoria S. Knothego z uwzględnieniem rozwoju eksploatacji podziemnej – z reguły nie stanowi akceptowalnego przybliżenia w sensie miary błędu średniego, tzn. $m_u > m_{u_{dop}}$. Potwierdzenie relacji, że $m_u > m_{u_{dop}}$ (relacji niepożądaney), stanowią rezultaty oszacowania entropii procesu przemieszczeń. Wynikająca z analizy formalnej zmienność entropii procesu stanowi argumentację odnośnie stochastycznego charakteru procesu przemieszczeń. Z analizy wynika, że istnieją *silne ograniczenia* w zakresie *dokładności opisu* deterministycznego, dotyczącego procesu stochastycznego.

Podjęto próbę zbudowania formuły uwzględniającej losową nieregularność procesu. Przyjęto, że analizowany proces jest złożeniem składowej deterministycznej i wielkości losowej. Wahania wokół wartości przeciętnej estymowano na podstawie chronologicznie uporządkowanego zbioru wyników pomiaru przemieszczeń, przyporządkowanego odpowiedniemu czasowi:

$$\{u_i(t_0), u_i(t_1), \dots, u_i(t_n)\} \rightarrow E \{u_i(t_{n+1}) | u_i(t_0), u_i(t_1), \dots, u_i(t_n)\}.$$

Wyniki numeryczne modelowania dynamiki przemieszczeń poziomych, według zmodyfikowanej formuły w obszarze rozwijającej się eksploatacji podziemnej, przedstawiono w postaci wykresów – charakterystyki jakościowe opisu są tu zadawalające. Również przeprowadzona statystyczna *ocena odwzorowania* oraz *odpowiednie miary* oraz *test t*

stanowią podstawę do wnioskowania, że formuła zmodyfikowana (quasilosowa) opisu w restrykcji do wyników pomiaru stanowi ich lepsze przybliżenie.

Pracę zrealizowano w ramach badań statutowych 11.11.150.007

BIBLIOGRAFIA

1. Bugiel P., Piwowarski W.: Formation of the post mining subsidence as a process described by stochastic Itô's Equation. Prace WUG, Katowice 2003.
2. Farin G.: Curves and surfaces for Computer Aided Geometric Design. Academic Press, 1993
3. Lasota A.: Matematyczna teoria entropii. Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2002 (niepublikowana).
4. Litwiniszyn J.: Zastosowanie równań procesów stochastycznych do mechaniki górotworu. Archiwum Górnicztwa i Hutnictwa, t.1, z. 3, Warszawa 1956.
5. Klingenberg W.: A course in differential geometry. Springer, New York 1978.
6. Knothe S.: Równanie profilu ostatecznie wykształconej niecki osiadania. Archiwum Górnicztwa i Hutnictwa, t.1, z. 1, Warszawa 1953.
7. Knothe S.: Wpływ czasu na kształtowanie się niecki osiadania. Archiwum Górnicztwa i Hutnictwa, t.1, z. 1, Warszawa 1953.
8. Oksendal B.: Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin – New York 1998.
9. Papoulis A.: Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne. PWN, Warszawa 1972.
10. Piwowarski W.: Chaotic system as a possible description of the post-mining dislocation process. NARMS-TAC 2002. Printed and bound by University of Toronto Press, Toronto 2002.
11. Rudin W.: Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, London – New York – Toronto 1970.

Recenzent: Dr hab. inż. A. Kowalski, prof. GIG

Abstract

The paper is concerned with the analysis of the dynamics of the dislocation process which affects medium points within the area of underground exploitation. The problem of the estimation of the limiting change that concerns the body configuration under the influence of the operation of tensile forces has been presented as the criterion of the destruction of the body (medium) continuity. Moreover, with regard to the fact that the trajectories indicating the dislocations of the medium points are irregular, the author has analysed the perturbation of the process characterising the randomness of the given phenomenon. Hence the determinist description of the process cannot be approximated to the results of the measurement with arbitrary precision. Therefore the attempt at the description of the given process has been presented as a stochastic formula.