

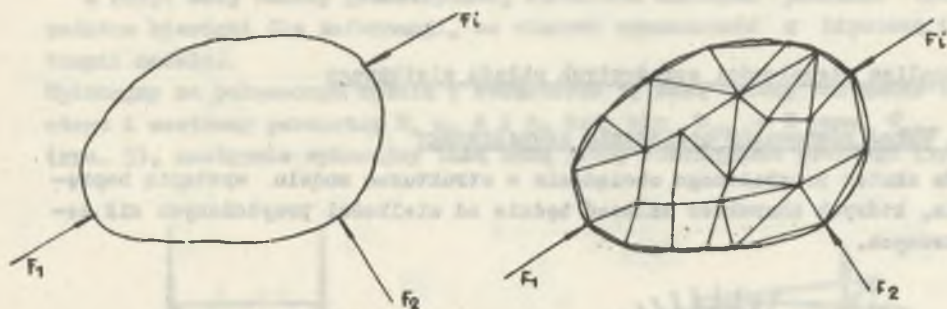
Stanisław Chwała, Lech Gładysz, Józef Straś

WYZNACZANIE NIEKTÓRYCH WSKAZNIKÓW MECHANICZNYCH  
DLA SPRĘŻYSTEJ PŁYTY PŁASKIEJ  
PRZY ZASTOSOWANIU RÓWNOWAŻNEGO SCHEMATU SIATKOWEGO

**Streszczenie.** Podano teoretyczne rozważania nad wyznaczeniem modułu sprężystości podłużnej  $E$  oraz współczynnika Poissona  $\nu$  na przykładzie sprężystej płyty płaskiej.

### 1. Wstęp

Rozważania nad powyższym tematem podjęto w oparciu o prace [4], w której zagadnienie sprowadzono do płaskiego stanu naprężeń. Dana jest sprężysta płyta płaska (rys. 1) poddana dowolnemu układowi obciążenia zewnętrznego, zachodzi pytanie: czy można jej dołączyć strukturę siatkową,



Rys. 1. Dowolnie obrana struktura siatkowa dla płaskiego modelu

tzn. złożoną z pewnej skończonej ilości prętów, która poddana ekwiwalentnemu, równoważnemu układowi obciążenia zewnętrznego deformować się będzie jak model? Jednym z prostszych schematów siatkowych jest schemat przedstawiony na rys. 2, składa się on z pewnej liczby jednakowych powierzchni o kształcie kwadratów ułożonych obok siebie i "związanych" między sobą na wzór sieci strukturalnej.

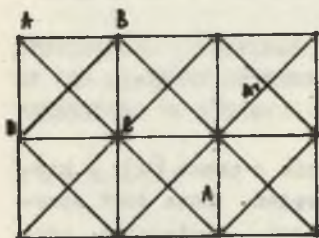
Element sieci stanowią cztery pręty o jednakowej długości  $a$  ułożone w kwadrat oraz dwa pręty ułożone po przekątnych kwadratu o długości  $a\sqrt{2}$  zapewniających spójność elementu.

Dla uproszczenia zagadnienia zakłada się, że tarcie w przegubach łączących pręty nie istnieje.

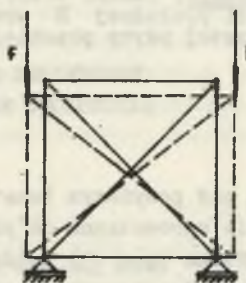
Jeżeli element sieci zostanie poddany obciążeniu jak na rys. 3, układ prętów ulegnie deformacji, której przebieg oznaczony jest na rys. 3 linią przerywaną, natomiast sprężystość  $E_{st}$  i współczynnik Poissona  $\nu_{st}$  będzie można określić jako funkcje

$$E, a, A_1, A.$$

(gdzie  $A_1$  - przekątna kwadratu;  $A$  - bok kwadratu).



Rys. 2

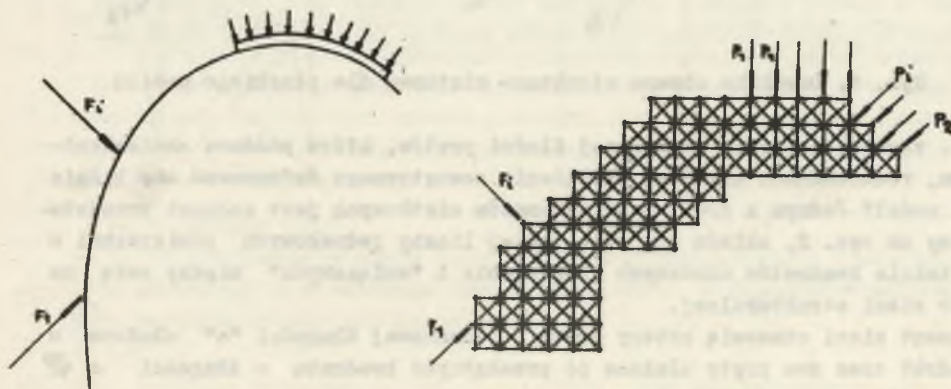


Rys. 3

## 2. Analiza właściwości sprężystych układu siatkowego

### 2.1. Układ równoważny obciążenia zewnętrznego

Na skutek przyłożonego obciążenia w strukturze modelu wystąpią naprężenia, których charakter zależeć będzie od wielkości przyłożonych sił zewnętrznych.



Rys. 4

Siły te o charakterze nieciągłym skupione będą w punktach węzłowych sieci a ich wypadkowa równać się będzie zero.

Układ równoważny obciążeniu zewnętrznemu określimy następująco (rys. 4):

- siły  $P_1, P_2, \dots, P_n$  skupione w odpowiednich punktach modelu przyłożymy odpowiednio w punktach węzłowych siatki.
- ciśnienie  $P$  oddziaływujące na powierzchnię  $S$  modelu zastąpimy siłami  $P_1 = P_2 = P_3 = \dots$  przyłożonymi w odpowiednich punktach węzłowych siatki tak, że ich zagęszczenie wyniesie  $P_1 = P_2 = \dots nP$
- siły objętościowe  $P_q$  zastąpiono w każdym punkcie struktury, siłą równą  $P \cdot g \cdot a^2$ .

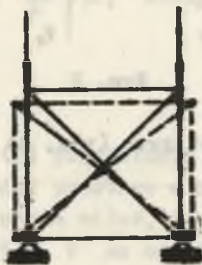
Przeprowadźmy teraz następujące rozumowanie; dowolnie obranemu modelowi przypiszmy pewną strukturę siatkową, następnie wyobraźmy sobie, że przed obciążeniem modelu dysponujemy schematem czworokątów takich samych jak struktura modelu. W takim przypadku możemy powiedzieć, że struktura siatkowa wówczas jest równoważna do modelu, jeżeli w każdej chwili czasowej obciążenia modelu i struktury, siatka odwzorowująca model da się nałożyć na strukturę modelu właściwego.

Z powyższego wynika, że siatka będzie nieskończenie małego rzędu nie większa od jedności w odniesieniu do  $ds$  elementu powierzchni modelu.

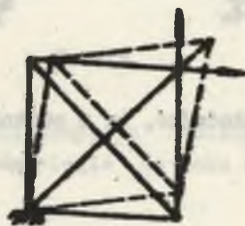
### 2.1.1. Warunek równoważności układu

Z racji swej budowy geometrycznej struktura siatkowa posiadać będzie podatne kierunki dla deformacji, co stanowi sprzeczność z hipotezą izotropii modelu.

Wykonajmy na połączonym modelu i strukturze tę samą próbę ściskania czystego i zestawmy parametry  $E, a, A$  i  $A_1$  tak, aby  $E_{str} = E$  oraz  $v_{str} = v$  (rys. 5), następnie wykonajmy taką samą próbę rozciągania prostego (rys. 6



Rys. 5



Rys. 6

Nie można oczywiście stwierdzić, że deformacje w tych przypadkach pokrywają się, w gruncie rzeczy nie pokrywają się one nawet najbardziej ogólnie.

Postawmy więc następujące twierdzenie: jeżeli struktura siatkowa była li-czona w taki sposób, że jej deformacje w dwa próbach ściskania (lub roz-



ciągania) prostego oraz ściskania czystego nakładają się z deformacją modelu, wówczas struktura jest równoważna modelowi dla wszelkich praw obciążeń równoważnych.

### 2.1.2. Następstwa wynikające z warunku równoważności

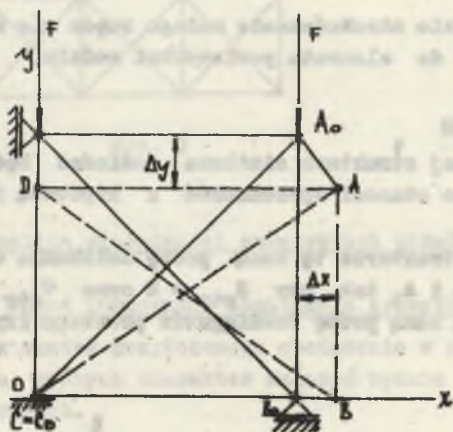
(obliczenie  $E_{st}$  i  $\nu_{str}$ )

#### a) ściskanie proste

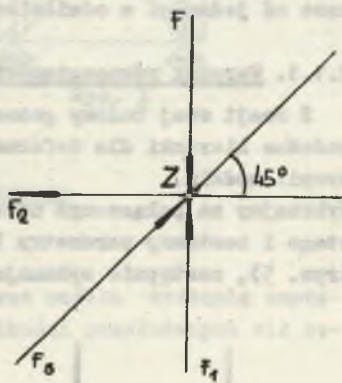
Oznaczając przemieszczenie punktu A przez  $\Delta x$  i  $\Delta y$  (rys. 7) możemy określić:

$$E_{st} = \frac{F/a}{\Delta y/a} = \frac{F}{\Delta y} \quad (1)$$

$$\nu_{st} = \frac{\Delta x/a}{\Delta y/a} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$



Rys. 7



Rys. 8

Zakładając, że w punkcie Z suma sił równa jest zero (rys. 8) napiszemy:

$$F_1 = E' \cdot A \frac{\Delta y}{a}$$

$$F_2 = E' \cdot A \frac{\Delta x}{a} \quad (2)$$

$$F_3 = E' \cdot A_1 \frac{\Delta l}{l}$$

gdzie

$A$  - bok kwadratu,

$A_1$  - przekątna kwadratu

$$l = a\sqrt{2}.$$

Na podstawie rys. 7 można napisać

$$l^2 = (CB)^2 + (AB)^2.$$

Różniczkując powyższe wyrażenie względem  $l$  otrzymamy

$$2l \Delta l = -2a \Delta x + 2a \Delta y,$$

stąd

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta y - \Delta x}{2a} \quad (3)$$

Rzutuując siłę  $F_2$  na oś  $O_x$  (rys. 8) otrzymamy

$$F_2 = F_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

oraz

$$E A \frac{\Delta x}{B} = E A_1 \frac{\Delta y - \Delta x}{2a} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zakładając  $\frac{A_1}{A} = \beta$ , wtedy

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\beta \sqrt{2}}{4 + \beta \sqrt{2}}. \quad (5)$$

Wyrażenie (5) przedstawia współczynnik Poissona obliczony dla ściskania (rozciągania) prostego w kierunku działania siły równoległe do boku kwadratu; wyraźnie widać, że zależy on jedynie od  $\beta$ .

Rzutuując siłę  $F$  na oś  $O_y$  (rys. 8) otrzymamy

$$F = E' A \frac{\Delta y}{a} + E A_1 \frac{\Delta y - \Delta x}{2a} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$

skąd

$$\frac{F}{\Delta y} = \frac{E' A}{a} \cdot \frac{4 + 2\beta \sqrt{2}}{4 + \beta \sqrt{2}}. \quad (6)$$

Wzór (6) wyraża moduł sprężystości struktury dla ściskania (rozciągania) w kierunku działania siły równoległe do boku kwadratu.

b) ściskanie czyste

Rozpatrzmy element kwadratowy o boku "a" nieskończenie mały wycięty z obszaru modelu sprężystego i poddamy go ściskaniu czystemu. Stan napięcia, jaki wytworzy się podczas ściskania (w układzie płaskim) charakteryzować będą wyłącznie naprężenia styczne (ścinające) powodujące odkształcenie elementu (rys.9). Zgodnie z zasadą wzajemności naprężeń stycznych napiszemy

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{E}{1+\nu} \cdot \delta_{xy} \quad (7)$$

Dla bardzo małych odkształceń będzie

$$\delta_{xy} = d\theta = \frac{dx}{a},$$

Rys. 9.

a więc

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{dx}{a} \quad (8)$$

Prześledźmy następnie element siatki (kwadrat), którego strukturę poddano działaniu sił ścinających (rys. 10).

Jeżeli  $\frac{\Delta l}{l}$  będzie określać wydłużenie jednostkowe na skutek działania sił C wtedy

$$A : \frac{\Delta l}{l} = \frac{C \sqrt{2}}{A_1 B}$$

Punkt D (rys. 10) przemieści się o wielkość  $\delta x$  taką, że

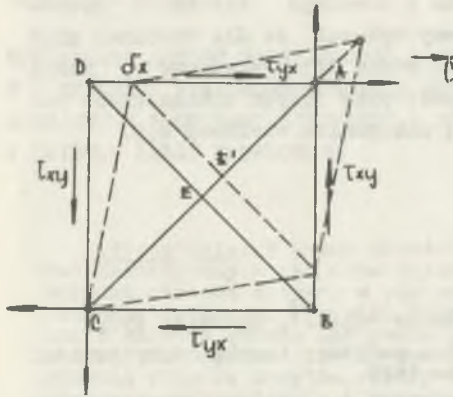
$$\delta x = \sqrt{2} E E' = \frac{\Delta l}{2} \cdot \sqrt{2}$$

Naprężenia ścinające wyrażone stosunkiem  $\frac{C}{a}$  będą równe

$$\frac{C}{a} = \frac{A_1 E''}{a^2 \cdot \sqrt{2}} \quad (9)$$

Wobec powyższego można napisać

$$\text{jeżeli } \tau_{xy} = \frac{C}{a}, \text{ a więc } dx = \delta x.$$



Rys. 10

Uwzględniając zależności (8) i (9) będziemy mieli

$$\frac{E}{1+\nu} \frac{dx}{a} = \frac{A_1 E'}{a^2 \sqrt{2}} \delta x. \quad (10)$$

Ze wzoru (10) wynika:

$$\frac{A_1 E'}{a \sqrt{2}} = \frac{E}{1+\nu} = \frac{E_{st}}{1+\nu_{st}}. \quad (11)$$

Wykorzystując zależności na  $E_{st}$  i  $\nu_{st}$  otrzymamy

$$\frac{E_{st}}{1+\nu_{st}} = \frac{E' A}{a}$$

oraz

$$\frac{A_1 E'}{a \sqrt{2}} = \frac{E' \cdot A}{a}$$

stąd

$$\frac{A_1}{A} = \sqrt{2},$$

a więc

$$\nu_{st} = \frac{1}{3}. \quad (12)$$

Zastępując  $\nu$  przez  $\sqrt{2}$  w wyrażeniu na  $E_{st}$  otrzymamy

$$E_{st} = \frac{4}{3} \frac{E' A}{a}. \quad (13)$$



Zakończenie

Podany sposób wyznaczania własności sprężystych na przykładzie płyty płaskiej jest prosty i łatwy do praktycznego zastosowania. Obliczenia w zakresie  $E$  i  $\nu$  można prowadzić nie tylko przy pomocy siatki kwadrato-wej, lecz np. trójkątnej, prostokątnej lub o dowolnym kształcie geometrycznym. Przeprowadzony rachunek analogowy wykazał, że dla dowolnej siatki współczynnik Poissona przyjmuje wartość równą  $1/3$ . Własność tę można wykorzystać np. w mechanice skał, gdyż nawet przy dużych obciążeniach realne wartości współczynnika  $\nu$  przyjmują maksymalną wielkość  $0,5$ .

## LITERATURA

1. M. Chudek, M. Borecki: Mechanika górotworu "Śląsk", Katowice 1972.
2. J. Walczak: Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności. Tom I, Warszawa-Kraków 1970.
3. J. Walczak: Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności. Tom II, III. Warszawa-Kraków 1971.
4. Ph. Weber: Presentation de la methode des elements finis. Centre de mecanique des roches. Paris 1967.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ  
ДЛЯ УПРУГОЙ ПЛОСКОЙ ПЛЫТЫ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ  
СЕТКОБРАЗНОЙ СХЕМЫ

## Резюме

Поданы теоретические рассуждения, касающиеся определения модуля продольной упругости  $E$ , а также числа Пуассона на примере упругой плоской плиты.

DETERMINATION OF SOME MECHANICAL INDICATORS FOR AN ELASTIC  
FLAT PLATE WITH THE APPLICATION OF AN EQUIVALENT NETWORK DIAGRAM

## Summary

Theoretical considerations concerning the determination of the modulus of the oblong elasticity  $E$ , as well as of Poisson's coefficient have been presented on the example of a flat plate.