

Bernard Drzęźła

## O PEWNEJ MOŻLIWOŚCI ZASTOSOWANIA RACHUNKU WARIACYJNEGO DO OPTIMALIZACJI KSZTAŁTÓW KOLAN RUR PODSADZKOWYCH

**Streszczenie.** Rozpatrzono kolana rur podsadzkowych pracujące w płaszczyźnie poziomej i pionowej. W przypadku pierwszym stwierdzono, że praca sił tarcia, której minimum przyjęto jako warunek optymalności kształtu kolana, nie zależy od tego kształtu. Dla przypadku drugiego wyprowadzono równanie różniczkowo-całkowe określające optymalny kształt kolana. Dla obu przypadków podano wzory, umożliwiające takie profilowanie grubości ścianki grzbietowej kolana o dowolnym kształcie, przy którym na całej długości kolana wielkość starcia dochodzi jednocześnie do starcia dopuszczalnego. Przy określonym kształcie kolana jest to warunek jego ekonomicznego wykorzystania.

### 1. Wstęp

Rury podsadzkowe, w związku z ich ścieraniem przez przepływający materiał podsadzkowy, stanowią jeden z poważniejszych składników kosztów podszadki płynnej. Dotychczasowe sposoby ograniczenia kosztów rur podsadzkowych idą w kierunku stosowania wkładek trudnościeralnych i optymalizacji obszaru podsadzania z jednego szybu podsadzkowego. W niniejszej pracy przedstawiono możliwość ograniczenia zużycia się najszybciej ścieranego elementu rur podsadzkowych, tj. kolana przez odpowiedni dobór jego kształtu. Stosowane powszechnie kolana mają kształt kołowy (ściślej mówiąc os kolana jest odcinkiem łuku kołowego).

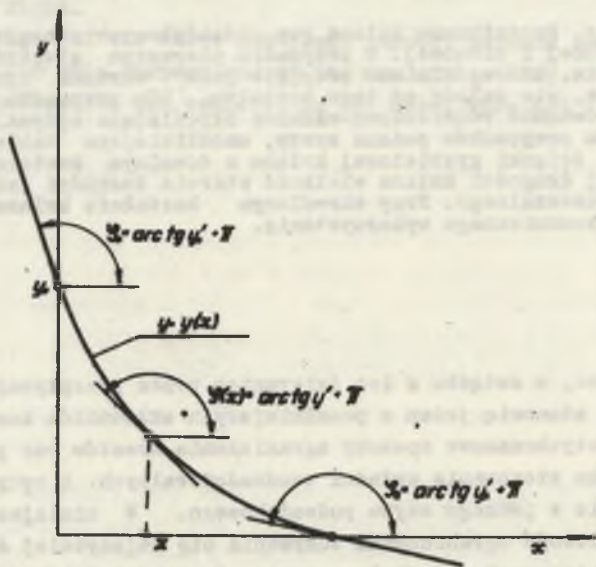
W pracy będziemy kształt kolana optymalizować, a kryterium optymalności będzie minimum pracy tarcia materiału podsadzkowego o ścianki kolana, co można uważać za równoznaczne z minimum ścierania. Rozpatrzymy dwa podstawowe przypadki pracy kolan, czyli kolano pracujące w płaszczyźnie poziomej i kolano pracujące w płaszczyźnie pionowej. Dla uproszczenia rozważań zamiast ruchu podsadzki w przewodzie, będziemy przy tym rozpatrywać ruch cząstki materialnej po łuku określonym równaniem osi kolana. Trudno określić czy i w jakim stopniu przyjęte uproszczenia odnośnie ruchu podsadzki w przewodach rzutują na niedokładności uzyskanego obrazu ścierania się kolan, ponieważ, o ile autorowi wiadomo, niniejsza praca jest pierwszą próbą analitycznego rozwiązania przedmiotowego zagadnienia.

Przeprowadzone w pracy rozważania na temat ścierania się kolan rur podsadzkowych można by, z nieznacznymi modyfikacjami, odnieść do zagadnienia

ścierania się kolan przy transporcie podsadzki suchej. Uzyskane przy tym wyniki byłyby przypuszczalnie w większym stopniu adekwatne do rzeczywistości.

## 2. Kolano poziome

W przypadku kolana poziomego możemy zaniedbać działanie siły ciężkości a uwzględnić jedynie siły wynikające ze zmiany kierunku przepływu materiału podsadzkowego.



Rys. 1. Przyjęte w rozważaniach warunki pracy kolana poziomego

Położenie kolana w układzie współrzędnych  $(x, y)$  pokazano na rys. 1, gdzie przez  $y = y(x)$  oznaczono równanie osi kolana. Punktem początkowym kolana jest punkt  $(0, y_0)$ , a końcowym  $(x_k, 0)$ . Materiał podsadzkowy wpływa do kolana z prędkością początkową  $v_0$ . Kierunek poprzedzającego kolano odcinka rur jest określony przez pochodną  $y'(0) = y'_0$ , a kierunek rur za kolaniem przez pochodną  $y'(x_k) = y'_k$ . Dodatkowo przyjmujemy oznaczenia

$$\arctg y'_0 = \psi_0 - \pi$$

$$\arctg y' = \psi - \pi$$

$$\arctg y'_k = \psi_k - \pi$$

Na początek musimy określić prędkość ruchu materiału w kolanie. Skorzystamy przy tym z prawa zachowania energii.

Początkowa energia przepływającej przez kolano cząstki materialnej o masie  $m$  wynosi

$$L_1 = \frac{mv^2}{2}. \quad (2.1)$$

W czasie ruchu przez kolano energia kinetyczna cząstki jest zmienna i wynosi

$$L_2 = \frac{mv^2}{2}, \quad (2.2)$$

gdzie

$v = v(x)$  - prędkość cząstki w czasie ruchu przez kolano.

Różnica między początkową energią kinetyczną cząstki a jej energią kinetyczną w czasie ruchu jest wynikiem pracy tarcia  $L_3$ . Z kolei praca tarcia jest wynikiem działania siły bezwładności, która wynosi

$$P_1(x) = mv^2 K, \quad (2.3)$$

gdzie

$$K = K(x) = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} - \text{krzywizna krzywej } y = y(x).$$

Jeśli przyjmiemy, że współczynnik tarcia materiału podsadzkowego o ścianki kolana wynosi  $\mu$ , to siła tarcia przedstawi się wzorem

$$T = T(x) = \mu mv^2 K. \quad (2.4)$$

Praca tarcia  $L_3$  w punkcie  $x$  będzie całką siły tarcia po łuku krzywej  $y = y(x)$ . Mamy więc

$$L_3 = \int_0^x \mu mv^2 K \sqrt{1 + y'^2} dt. \quad (2.5)$$

Wychodząc z bilansu energii dla poruszającej się cząstki materialnej

$$L_3 = L_1 - L_2 \quad (2.6)$$



otrzymujemy następujące równanie całkowe ze względu na niewiadomą funkcję  $v = v(x)$

$$v^2 + 2\mu \int_0^x \frac{v^2 y''}{1 + y'^2} dt = v_0^2. \quad (2.7)$$

Po obustronnym zróżniczkowaniu tego równania względem  $x$  otrzymujemy równanie różniczkowe

$$v' = -\mu v \frac{y''}{1 + y'^2} \quad (2.8)$$

z warunkiem początkowym

$$v(0) = v_0.$$

Rozwiązaniem równania (2.8) jest

$$v(x) = v_0 \exp[\mu(\arctg y'_0 - \arctg y')] = v_0 e^{\mu(\varphi_0 - \varphi)}. \quad (2.9)$$

Znając już prędkość przepływu materiału podsadzkowego przez kolano możemy korzystając ze wzoru (2.5), przedstawić pracę tarcia w kolanie, jako funkcjonak  $L$  zależny od doboru krzywej  $y = y(x)$

$$L[y] = \mu m v_0^2 \int_0^k \frac{e^{2\mu(\varphi_0 - \varphi)}}{1 + y'^2} dx \quad (2.10)$$

Całkę z prawej strony wzoru (2.10) można łatwo rozwiązać biorąc pod uwagę, że

$$\frac{y'' dx}{1 + y'^2} = d\varphi.$$

Otrzymamy wtedy

$$L = \frac{m v_0^2}{2} \left[ 1 - e^{-2\mu(\varphi_k - \varphi_0)} \right]. \quad (2.11)$$

Widzimy więc, że praca tarcia w kolanie poziomym nie zależy jednak od doboru jego kształtu, a zależy jedynie od kąta odchylenia przepływającego strumienia od pierwotnego kierunku.

Wyprowadzone w tym rozdziale wzory mogą jednak znaleźć pewne zastosowanie. Wiadomo, że dla przedłużenia żywotności kolana, wykonuje się go ze ścianką grzbietową grubszą aniżeli wewnętrzna. Wyprowadzone wzory wskazują, co zresztą stwierdzone jest doświadczalnie, że ścianka grzbietowa nie zużywa się jednakowo na całej swej długości. Można więc tak wyprofilować jej grubość, żeby w określonym czasie na całej długości kolana nastąpiło dopuszczalne starcie, a nie tylko w pewnych punktach.

Jeśli założymy, że prędkość ścierania w danym punkcie jest wprost proporcjonalna do siły tarcia w tym punkcie, to do siły tarcia powinna być również proporcjonalna grubość ścianki grzbietowej kolana w tym punkcie. Uwzględniając wzory (2.4) i (2.9) otrzymujemy

$$g(x) = c_1 e^{-2\mu\psi} \cdot \frac{y^n}{(1+y'^2)^{3/2}}, \quad (2.12)$$

gdzie

$g(x)$  - grubość ścianki grzbietowej kolana,

$c_1$  - współczynnik proporcjonalności,

$\psi = \psi(x) = \arctg y' + x$ .

Jeśli jeszcze przyjąć, że oś kolana jest odcinkiem łuku kołowego, co oznacza, że promień krzywizny  $R$

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = \text{const}$$

jest stały na całej długości kolana, to grubość ścianki grzbietowej kolana powinna spełniać warunek

$$g(x) = c e^{-2\mu\psi}, \quad (2.13)$$

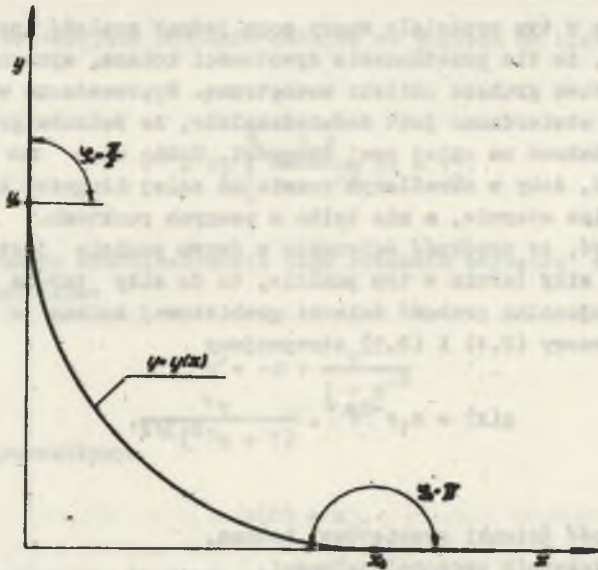
gdzie

$c$  - współczynnik proporcjonalności.

Wzór (2.13) umożliwia takie profilowanie ścianki grzbietowej kolana kołowego, żeby na całej jego długości w tym samym czasie nastąpiło dopuszczalne starcie. Takie profilowanie powinno jednak dodatkowo uwzględniać wszystkie wymiary geometryczne kolana i rur sąsiednich.

### 3. Kolano pionowe

Zakładamy, że rura poprzedzająca kolano jest pionowa i pokrywa się z osią  $y$ , a rura za kolanem jest pozioma i pokrywa się z osią  $x$  (rys. 2).



Rys. 2. Przyjęte w rozważaniach warunki pracy kolana pionowego

Punktem początkowym kolana jest, jak poprzednio, punkt  $(0, y_0)$ , a punktem końcowym  $(x_k, 0)$ . Pozostałe warunki są następujące:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y' = -\infty, \quad \text{czyli} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \arctg y' = -\frac{\pi}{2}$$

$$y'(x_k) = 0, \quad \text{czyli} \quad \arctg y'(x_k) = 0$$

Ponieważ kolano pracuje w płaszczyźnie pionowej, więc w bilansie energetycznym musimy dodatkowo uwzględnić energię potencjalną oraz pracę tarcia pochodzącego od składowej siły ciężkości prostopadłej do osi kolana.

Składowa ta wynosi

$$P_2(x) = \frac{mg}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad (3.1)$$

gdzie

$g$  - przyspieszenie ziemskie.



Przyjmując wszystkie oznaczenia, jak w poprzednim rozdziale bilans energetyczny cząstki materialnej o masie  $m$  w czasie jej ruchu w kolanie przedstawia się następująco:

$$\frac{mv^2}{2} + mgy + \int_0^x \mu m (v^2 K + \frac{K}{\sqrt{1+y'^2}}) \sqrt{1+y'^2} dt = \frac{mv_0^2}{2} + mgy_0 \quad (3.2)$$

Związek (3.2) jest równaniem całkowym ze względu na nieznaną prędkość ruchu  $v = v(x)$ . Po zróżniczkowaniu (3.2) obu stronnie względem  $x$  otrzymujemy równanie różniczkowe

$$vv' + \mu v^2 \frac{y''}{1+y'^2} + gy' + \mu g = 0 \quad (3.3)$$

z warunkiem początkowym

$$v(0) = v_0.$$

Równanie (3.3) całkujemy metodą uzmienniania stałej otrzymując

$$v(x) = e^{-\mu(\varphi-x)} \sqrt{v_0^2 e^{-\mu x} - 2g \int_0^x (\mu + y') e^{2\mu(\varphi-x)} dt}, \quad (3.4)$$

gdzie

$$\varphi - x = \arctg y''$$

Praca sił tarcia  $L$  na całej długości kolana będzie funkcjonalem zależnym od doboru krzywej  $y = y(x)$  i przedstawi się wzorem

$$\begin{aligned} L[y] &= \mu m \int_0^{x_k} \left\{ \left[ v_0^2 e^{-\mu x} - 2g \int_0^x (\mu + y') e^{2\mu(\varphi-x)} dt \right] e^{-2\mu(\varphi-x)} \frac{y''}{1+y'^2} + g \right\} dx = \\ &= \frac{mv_0^2}{2} (1 - e^{-\mu x_k}) + \mu mg x_k - 2\mu mg \int_0^{x_k} e^{-2\mu(\varphi-x)} \frac{y''}{1+y'^2} \left[ \int_0^x (\mu + y') e^{2\mu(\varphi-x)} dt \right] dx. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Będziemy teraz szukać takiego kształtu kolana, czyli funkcji  $y = y(x)$ , spełniającej wymagane ograniczenia, który minimizuje pracę tarcia. Zamiast

jednak rozpatrywać funkcjonal  $L$  możemy rozpatrzyć funkcjonal  $M$  powstały z  $L$  przez odrzucenie części niezależnej od krzywej  $y(x)$ , w którym dodatkowo pomija się stałe współczynniki.

$$M[y] = \int_0^{x_k} e^{-2\mu(\varphi - \pi)} \frac{y''}{1 + y'^2} \left[ \int_0^x (\mu + y') e^{2\mu(\varphi - \pi)} dt \right] dx. \quad (3.6)$$

Warunkiem optymalności krzywej  $y = y(x)$  jest spełnienie równania Eulera-Poissona, które w danym przypadku sprowadza się do równania różniczkowo-całkowego

$$\left[ 2(\mu + y')y''^2 - y'''(1 + y'^2) \right] \int_0^x \left[ 1 + \frac{2\mu(\mu + y')}{1 + y'^2} \right] e^{2\mu(\varphi - \pi)} dt = 2(\mu + y')^2 y'' e^{2\mu(\varphi - \pi)}, \quad (3.7)$$

gdzie

$$\varphi - \pi = \arctg y'$$

Rozwiązanie równania (3.7) jest dość trudnym problemem numerycznym, który jest obecnie w trakcie opracowywania.

Przejdźmy teraz do zagadnienia profilowania grubości ścianki grzbietowej kolana. Siła tarcia w kolanie pracującym w płaszczyźnie pionowej (rys 2) wynosi

$$T(x) = \mu m (v^2 K + \frac{K}{\sqrt{1 + y'^2}}) =$$

$$= \mu m \left\{ e^{-2\mu(\varphi - \pi)} \left[ v_0^2 e^{-\mu\pi} - 2g \int_0^x (\mu + y') e^{2\mu(\varphi - \pi)} dt \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} + \frac{K}{\sqrt{1 + y'^2}} \right] \right\} \quad (3.8)$$

Jeśli jest dany kształt kolana, tzn. dana jest funkcja  $y = y(x)$ , to wzór (3.8) może służyć do wyznaczenia grubości ścianki przy założeniu, że jest ona proporcjonalna do siły tarcia.

W przypadku, gdy kolano ma kształt kołowy o promieniu  $R$ , to wzór na siłę tarcia można doprowadzić do postaci

$$T(\varphi) = \mu m \left[ \frac{v_0^2}{R} e^{\mu(\pi - 2\varphi)} - \frac{2g}{1 + 4\mu^2} \left[ (1 + 2\mu^2) \cos \varphi - 3\mu \sin \varphi + 3\mu e^{\mu(\pi - 2\varphi)} \right] - g \cos \varphi \right];$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi \quad (3.9)$$



#### 4. Podsumowanie

W pracy rozpatrzono dwa podstawowe przypadki pracy kolan rur podsadzkowych, a mianowicie: kolano pracujące w płaszczyźnie poziomej i kolano pracujące w płaszczyźnie pionowej.

W przypadku pierwszym stwierdzono, że praca sił tarcia (wzór (2.11)) w kolanie nie zależy od jego kształtu oraz wyprowadzono wzory (2.12) i (2.13) umożliwiające takie profilowanie grubości ścianki grzbietowej kolana o dowolnym kształcie, przy którym na całej długości kolana wielkość starcia dochodzi jednocześnie do starcia dopuszczalnego. W tym przypadku jest to jedyny warunek ekonomicznej pracy kolana.

W przypadku drugim stwierdzono, że praca sił tarcia jest zależna od kształtu kolana i podano warunek w postaci równania różniczkowo-całkowego (3.7), jaki musi spełniać kształt kolana minimizujący pracę sił tarcia. Ponadto podano warunki ekonomicznego profilowania grubości ścianki grzbietowej kolana przy dowolnym jego kształcie (wzór 3.8), a w szczególności dla kolana o kształcie kołowym (wzór 3.9).

#### LITERATURA

1. T. Czechowicz: Ekonomiczna analiza kosztów podsadzki płynnej. "Przegląd Górniczy", nr 9/1957 i "Przegląd Górniczy", nr 9/1959.
2. L.E. Elagolc: Rachunek wariacyjny. PWN, Warszawa 1960.
3. B. Głazowski: Zagadnienie lokalizacji podsadzkowni w dowolnym obszarze górniczym. "Przegląd Górniczy" 1961, nr 5.
4. F. Jopek: Podsadzanie wyrobisk, cz. I: Podsadzka płynna. Górnictwo t. VIII. PWT, Katowice 1950.
5. K. Tatarkiewicz: Rachunek wariacyjny. WNT, Warszawa 1969 (t. I) i 1970 (t. II).
6. Z. Węgrzyk: Warunki optymalnego wykorzystania rurociągów podsadzkowych "Przegląd Górniczy" 1959, nr 9.

О НЕКОТОРОЙ ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ  
В ОПТИМАЛИЗАЦИИ ФОРМ КОЛЕН ЗАКЛАДОЧНЫХ ТРУБ

Резюме

Рассмотрены колена закладочных труб, работающие в горизонтальной и вертикальной плоскостях. В первом случае установлено, что работа сил трения, которой минимум принят как условие оптимальности формы колена, не зависит от этой формы. Для второго случая выведено дифференциально-интегральное уравнение, определяющее оптимальную форму колена. Для обоих случаев поданы формулы, предоставляющие возможность такого профилирования толщины внешней стенки колена любой формы, при которой по всей длине колена величина износа приближается одновременно к допускаемому износу. При определенной форме колена это является условием его экономичного использования.

ABOUT SOME POSSIBILITIES OF APPLYING VARIATION CALCULATIONS  
FOR THE OPTIMALIZATION OF THE ELBOWS SHAPES OF FILLING PIPES

Summary

This paper discusses the elbows of filling pipes, working in horizontal and vertical planes.

In the first case it has been pointed out that the friction force, the minimum of which was accepted to be the optimum condition of the elbow shape, does not depend on this shape.

In the second case a differential - integral equation has been derived for determining the optimal elbow shape.

For both cases formulae have been provided, which make it possible to profile the back - wall thickness, regardless of the shape, which gave the admissible abrasion along the whole length of the elbow.

This is a condition of its economic utility.