

Tadeusz Skubis  
 Marian Miłek  
 Katedra Technologii  
 i Metrologii Elektrycznej

#### ANALIZA BŁĘDÓW MOSTKA DWUTRANSFORMATOROWEGO

**Streszczenie.** Artykuł omawia analizę błędów systematycznego mostka dwutransformatorowego wnoszonego do pomiaru przez zastosowanie transformatorów. Podane są wzory na ten błąd oraz wyciągnięte są wnioski odnośnie konstrukcji odpowiednich transformatorów.

Wiele praktycznych zalet, jakie łączą w sobie mostki transformatorowe, powoduje stały wzrost zainteresowania tymi układami. Istnieje szereg rozwiązań mostków transformatorowych różniących się zasadniczym schematem ideowym, w konsekwencji także przeznaczeniem, zakresem pomiarowym, dokładnością itd.

Spśród tych układów wybrano do praktycznej realizacji mostek z dwoma transformatorami połączonymi przeciwnie, przystosowany do niezależnego pomiaru rezystancji, indukcyjności i pojemności, a także dobroci cewek  $Q$  i tangensa kąta stratności kondensatorów  $\text{tg } \delta$ . Cechą zasadniczą tego układu jest możliwość uzyskania bardzo szerokiego zakresu pomiarowego i dużej dokładności pomiarów pod warunkiem zastosowania odpowiednio wykonanych transformatorów.

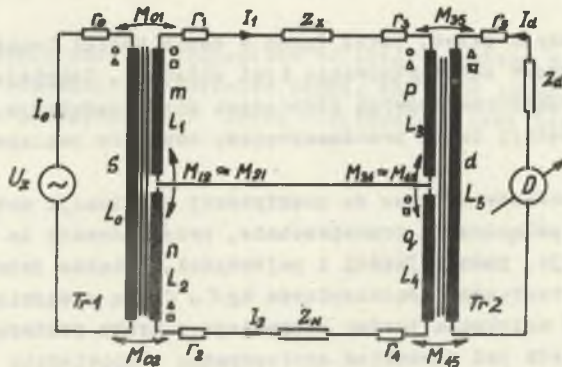
Przedmiotem dalszej analizy są przyczyny powstawania i możliwości minimalizacji błędów systematycznych, wnoszonych do pomiaru przez transformatory w układzie mostka dwutransformatorowego podanego na rys. 1. Zastosowano następujące oznaczenia:

- $L_k$  - indukcyjność własna uzwojenia  $k$
- $M_{k1}$  - indukcyjność wzajemna uzwojenia  $k$  względem uzwojenia  $1$
- $r_k$  - rezystancja uzwojenia  $k$
- $m, n, p, q, s, d$  - ilość zwojów w poszczególnych uzwojeniach
- $I_d$  - prąd w gałęzi detektora
- $I_o$  - prąd w gałęzi zasilania
- $Z_d$  - impedancja wejściowa detektora
- $Z_n$  - impedancja wzorowa
- $Z_x$  - impedancja mierzona

- $c_k$  - pojemność zastępcza bocznikująca uzwojenie k
- $i_k$  - prąd w pojemności zastępczej  $c_k$
- $l_0$  - indukcyjność rozproszenia uzwojenia zasilającego względem uzwojeń stosunkowych m oraz n
- $l_{k1}$  - indukcyjności rozproszenia uzwojeń stosunkowych
- $l_5$  - indukcyjność rozproszenia uzwojenia detekcyjnego względem uzwojeń stosunkowych p oraz q
- Tr1 - transformator "napięciowy"
- Tr2 - transformator "prądowy"
- $\circ, \Delta, \square$  - oznaczenia jednoimiennych końcówek uzwojeń.

Równowagę mostka dwutransformatorowego określa związek [5]

$$\frac{Z_x}{Z_M} = \frac{mp}{nq} \quad (1)$$



Rys. 1. Schemat idealny mostka dwutransformatorowego

Relacja ta obowiązuje dla mostka idealnego, w którym transformatory pozbawione są parametrów resztkowych takich jak indukcyjności rozproszenia, pojemności wzajemne i doziemne uzwojeń oraz rezystancje uzwojeń i doprowadzeń. Wielkości te stanowią wewnętrzne obciążenie mostka i wpływają na stan jego równowagi.

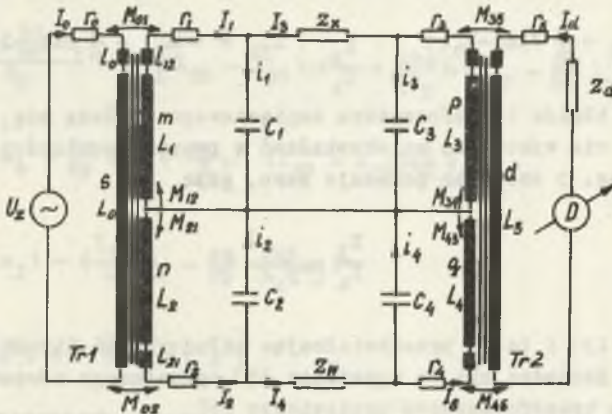
Jest jasne, że zupełnie uniknięcie parametrów resztkowych w transformatorach nie jest możliwe, jednakże ich wartość zależy od cech konstrukcyjnych i staranności wykonania transformatorów. Przyjęcie odpowiednich proporcji między tymi parametrami prowadzi do zmniejszenia uchybu systematycznego emawianego mostka.

Celem artykułu jest określenie tych proporcji i wyodrębnienie wniosków odnośnie konstrukcji transformatorów dla układu z rys. 1.

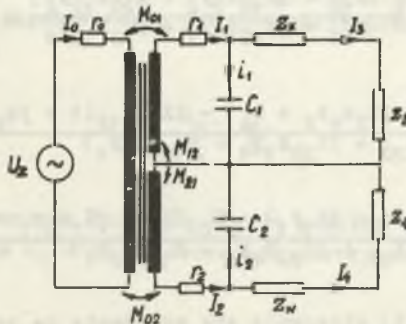
Równanie stanu równowagi dla mostka rzeczywistego napisać można przez wprowadzenie do równania (1) względnego błędu mostka, oznaczonego dalej ogólnie przez  $\Delta$ .

$$\frac{Z_x}{Z_H} = \frac{m}{n} (1 + \Delta) \quad (2)$$

Wyrażenie na  $\Delta$  może być wyprowadzone z równań Kirchhoffa dla obwodu uwzględniającego obciążenie wewnętrzne (rys. 2). Ponieważ analiza teoretyczna obwodu zawierającego dwa transformatory rzeczywiste jest bardzo trudna i nie prowadzi do przejrzystych wyrażeń opisujących błąd, przeprowadzono ją oddzielnie dla każdego transformatora, zastępując drugi równoważną impedancją. Przy tym założeniu rozpatruje się transformator napięciowy pracujący w układzie mostkowym jak na rys. 3.



Rys. 2. Układ zastępczy mostka dwutransformatorowego z uwzględnieniem obciążenia wewnętrznego



Rys. 3. Układ zastępczy do analizy błędów wnoszonych przez transformator napięciowy



$\varepsilon_3$  oraz  $\varepsilon_4$  oznaczają zastępcze impedancje, równoważne włączeniu rzeczywistego transformatora prądowego z detektorem. Dla uproszczenia zapisu wprowadzono jeszcze kilka oznaczeń:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \omega C_1 & Y_2 &= \omega C_2 \\ Z_1 &= r_1 + j\omega L_1 & Z_2 &= r_2 + j\omega L_2 \\ X_{12} &= \omega M_{12} = \frac{p}{q} \omega(L_{12} - l_{12}) & X_{21} &= \omega M_{21} = \frac{p}{q} \omega(L_{21} - l_{21}) \\ X_{10} &= \omega M_{10} = \frac{p}{q} \omega(L_{10} - l_{10}) & X_{20} &= \omega M_{20} = \frac{p}{q} \omega(L_{20} - l_{20}) \\ X_{53} &= \omega M_{53} = \frac{p}{q} \omega(L_{53} - l_{53}) & X_{54} &= \omega M_{54} = \frac{p}{q} \omega(L_{54} - l_{54}) \end{aligned} \quad (3)$$

Przy analizie błędów transformatora napięciowego zakłada się, że transformator prądowy nie wprowadza zniekształceń w proporcjonalności, czyli niewidoczny na rys. 3 detektor pokazuje zero, gdy:

$$\frac{I_3}{I_4} = \frac{q}{p} \quad (4)$$

Uwzględniając (3) i (4) i przekształcając układ równań Kirchhoffa dla obwodu z rys. 3 dochodzi się do wyrażenia (5) opisującego równowagę mostka z rzeczywistym transformatorem napięciowym [5]

$$\begin{aligned} \frac{Z_X}{Z_N} &= \frac{\frac{p}{q} (X_{10} + jX_{10}Z_2Y_2 + X_{20}X_{12}Y_2)}{X_{20} + jX_{20}Z_1Y_1 + X_{10}X_{12}Y_1} + \\ &+ \frac{\frac{p}{q} [X_{10}(Z_2 + jZ_2\varepsilon_4Y_2 + \varepsilon_4) - jX_{20}X_{12}(1 + j\varepsilon_4Y_2)]}{Z_N(X_{20} + jX_{20}Z_1Y_1 + X_{10}X_{12}Y_1)} + \\ &+ \frac{jX_{10}X_{21}(1 + j\varepsilon_3Y_1) - X_{20}(Z_1 + jZ_1\varepsilon_3Y_1 + \varepsilon_3)}{Z_N(X_{20} + jX_{20}Z_1Y_1 + X_{10}X_{12}Y_1)} \end{aligned} \quad (5)$$

Porównując wzór (2) i (5) otrzymuje się wyrażenie na względny błąd mostka, wnoszony przez transformator napięciowy. Ze względu na skomplikowaną budowę tego wyrażenia i dla łatwego wyciągnięcia wniosków błąd ten rozbito na kilka składników  $\Delta_1$  (6, 7, 8, 9). W mianownikach tych wzorów opuszczono składniki wnożone przez parametry resztkowe transformatora, ponieważ

są one o kilka rzędów mniejsze od pozostałych członów. W licznikach omawianych wyrażeń wprowadzono uproszczenia polegające na opuszczeniu składników, w których parametry resztkowe występowały w potęgce wyższej niż druga.

$$\Delta_1 = \frac{1_{20} - 1_{10}}{L_0} \quad (6)$$

$$\Delta_2 = \omega^2(1_{12}o_1 - 1_{21}o_2) + \omega^2(1_{10} - 1_{20})\left(\frac{n^2}{s^2}o_2 + \frac{m^2}{s^2}o_1\right) + j\omega(x_2o_2 - x_1o_1) \quad (7)$$

$$\Delta_3 = \frac{x_2 - \frac{nq}{mp}x_1}{z_H} + \frac{j\omega}{z_H} \left[ (1_{20} - 1_{10}) \cdot \left( \frac{n^2}{s^2} + \frac{nmq}{s^2p} \right) + (1_{21} - \frac{nq}{mp}1_{12}) \right] \quad (8)$$

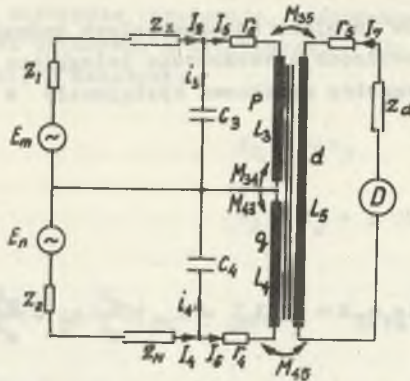
$$\Delta_4 = \frac{1}{z_H} \left[ (z_4 - \frac{nq}{mp}z_3) + \frac{nm}{s^2} \omega^2 (1_{10} - 1_{20}) \left( \frac{n}{m} o_2 z_4 + \frac{s}{p} o_1 z_3 \right) - \left( \frac{1_{10}}{L_0} z_4 - \frac{nq}{mp} \frac{1_{20}}{L_0} z_3 \right) + j\omega (o_2 x_2 z_4 - \frac{nq}{mp} o_1 x_1 z_3) \right] \quad (9)$$

Wnioski z otrzymanych wzorów są wyolimpięte w dalszej części artykułu, po przedstawieniu wyrażeń na błąd wnoszony przez transformator prądowy.

Analizę błędów transformatora prądowego przeprowadzono przy założeniu, że transformator napięciowy daje SEM proporcjonalne do liczby zwojów stosunkowych  $m$  oraz  $n$ .

$$\frac{E_m}{E_n} = \frac{m}{n} \quad (10)$$

Uwzględniając ten warunek uzyskuje się do analizy schemat przedstawiony na rys. 4, na którym  $z_1$  oraz  $z_2$  oznaczają zastępcze impedancje wewnętrzne źródeł napięcia.



Rys. 4. Układ zastępczy do analizy błędów wnoszonych przez transformator prądowy

Układając równanie stanu równowagi dla mostka z rys. 4 i postępując podobnie jak przy rozpatrywaniu transformatora napięciowego dochodzi się do wyrażen (11), (12), (13), które są składnikami  $\Delta$  ze wzoru (2)

$$\Delta_5 = \omega^2(l_{34}o_3 - l_{43}o_4) + j\omega(r_4o_4 - r_3o_3) \quad (11)$$

$$\Delta_6 = \frac{1}{Z_H} \left[ \left( \frac{M_{34}}{nq} r_4 - r_3 \right) + j\omega \left( \frac{M_{34}}{nq} l_{43} - l_{34} \right) \right] \quad (12)$$

$$\Delta_7 = \frac{1}{Z_H} \left[ \left( \frac{M_{34}}{nq} z_2 - z_1 \right) - \omega^2 \left( \frac{M_{34}}{nq} l_{43} o_4 z_2 - l_{34} o_3 z_1 \right) + j\omega \left( \frac{M_{34}}{nq} r_4 o_4 z_2 - r_3 o_3 z_1 \right) \right] \quad (13)$$

Równanie napięć ooskowych dla ooska z detektorem ma postać:

$$I_7(Z_d + r_5 + jX_5) + jI_5 X_{53} - jI_6 X_{54} = 0 \quad (14)$$

W stanie równowagi mostka, czyli gdy  $I_7 = 0$  na podstawie równania (14), pamiętając, że strumień w rżeniu transformatora jest zerowy otrzymuje się:

$$l_{54} = l_{53} \quad (15)$$

Równanie (15) prowadzi od razu do oczywistego wniosku, że indukcyjności rozproszenia uzwojenia detekcyjnego względem uzwojeń stosunkowych p i q muszą być jednakowe. Podobny wniosek daje analiza wzoru (6), ponieważ tylko przy równych indukcyjnościach rozproszenia uzwojenia zasilającego



względem uzwojeń stosunkowych  $m$  oraz  $n$  błąd  $\Delta_1$  będzie równy zeru. Jeśli wspomniane indukcyjności rozproszenia nie będą równe, to pojawia się tzw. "błąd niejednorodności" [3], który nie zależy ani od częstotliwości, ani od impedancji mierzonej. Błąd niejednorodności spowodowany jest brakiem proporcjonalności pomiędzy ilością zwojów i indukowaną SEM w transformatorze napięciowym oraz pomiędzy ilością zwojów i prądem w uzwojeniach stosunkowych transformatora prądowego.

Składniki  $\Delta_2$  oraz  $\Delta_5$  reprezentują błąd booznikowania pojemnościowego spowodowany pojemnościami rozproszenia i rezystancjami uzwojeń. Ta część błędu także nie zależy od impedancji mierzonej, ale w złożony sposób zależy od częstotliwości. Mianowicie część rzeczywista jest proporcjonalna do  $\omega^2$ , a część urojona do  $\omega$ , co powoduje zależność fazy zespolonych wyrażeń  $\Delta_2$  i  $\Delta_5$  od częstotliwości.

Składniki  $\Delta_3$  i  $\Delta_6$  wynikają z faktu, że indukcyjności własne i rezystancje uzwojeń stosunkowych wchodzić częściowo do ramion mostka, czyli oczywiście porównywane są impedancje:

$$Z'_X = Z_X + r_1 + r_3 + j\omega(l_{12} + l_{34})$$

$$Z'_N = Z_N + r_2 + r_4 + j\omega(l_{21} + l_{43})$$

Błędy te stanowią tzw. "błąd obciążenia" i zależą od porównywanych impedancji, ale praktyczne znaczenie mają jedynie przy pomiarze impedancji bardzo małych. Zależność  $\Delta_3$  i  $\Delta_6$  od częstotliwości wynika z rodzaju mierzonej wielkości  $R, L$  lub  $C$ . Wyrażenia  $\Delta_4$  i  $\Delta_7$  również zależą od wielkości porównywanych impedancji i są konsekwencją istnienia w układzie dwu transformatorów, które wzajemnie się obciążają. Przy dużych wartościach impedancji mierzonych błędy te przestają odgrywać rolę, podobnie jak  $\Delta_3$  i  $\Delta_6$ .

Analizując otrzymane wyrażenia na błędy mostka dwutransformatorowego (6,7,8,9,11,12,13) można wysnuć praktyczne wnioski dotyczące konstrukcji transformatorów i korekcji błędów. Ogólne sformułowanie tych wniosków jest następujące:

1. Stosunek napięć na uzwojeniach  $m$  oraz  $n$  transformatora napięciowego musi być równy stosunkowi zwojów  $m$  i  $n$ .

2. Sprzężenie uzwojeń  $p$  oraz  $q$  transformatora prądowego z uzwojeniem detekcyjnym musi być takie, aby przy spełnionej zależności

$$I_1 p = I_2 q$$

w uzwojeniu detekcyjnym nie indukowała się żadna SEM.

3. Wpływ obojch pól magnetycznych i elektrycznych powinien być usunięty.

4. Parametry szcążkowe transformatorów (rozproszenia, rezystancje uzwojeń i pojemności pasożytnicze) muszą być zredukowane do minimum.

Całkowite spełnienie wszystkich tych warunków w transformatorze rzeczywistym nie jest możliwe, jednakże można zbudować transformatory, w których te wymagania będą spełnione w bardzo dużym stopniu, jeśli zostaną uwzględnione następujące zalecenia:

1. Rdzeń transformatora wykonany z materiału o możliwie największej przenikalności magnetyznej  $\mu$  (permalloy, supermalloy).

2. Duży stosunek przekroju poprzecznego rdzenia do jego długości średniej.

Uwaga: punkty 1 i 2 są podyktowane koniecznością uzyskania minimalnej reaktancji rdzenia.

3. Uzwojenia stosunkowe o małej liczbie zwojów (należy pamiętać, że prowadzi to jednak do zmniejszenia osułości mostka).

4. Minimalne rezystancje uzwojeń stosunkowych, czyli gruby drut nawojowy.

5. Duża ilość zwojów uzwojenia zasilającego.

6. Rozłożenie uzwojenia zasilającego takie, aby w każdym zwoju uzwojeń stosunkowych indukowana była identyczna SEM, oraz aby indukcyjności rozproszenia między uzwojeniami stosunkowymi były minimalne i równe.

7. Możliwie małe pojemności bocznikujące uzwojenia.

8. Dokładne ekranowanie elektrostatyczne i magnetyczne.

Według powyższych wymagań zostały skonstruowane dwa transformatory o przekładni 1:1, 1:10, 1:100 i 1:1000, które zastosowano w układzie mostka dwutransformatorowego.

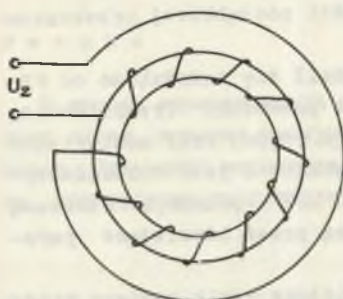
Transformator napięciowy został wykonany na rdzeniu toroidalnym o wymiarach 100/125-22 mm, zwiżanym z taśmy permalojowej o grubości 0,35 mm. Punkt pracy miał współrzędne:

$$B_m = 0,45 \text{ T}, \quad H_{sk} = 5,2 \text{ A/m}.$$

Rdzeń został otąsnowany ceratką izolacyjną, na której nawinięto uzwojenie zasilające, składające się z 500 zwojów, rozmieszczonych w jednej warstwie wzdłuż rdzenia. Początek i koniec tego uzwojenia są wyprowadzone tak, aby wyeliminować zwój poprzeczny, wynikający z nawinięcia transformatora na rdzeniu toroidalnym (rys. 5). Całość pokryto dwoma warstwami ceratki, między którymi znajdował się ekran elektrostatyczny z folii aluminiowej.

Uzwojenia stosunkowe nawinięto w czterech warstwach, bifilarnie, drutem miedzianym w emalii i jedwabiu. Odcepy wyciągnięte są z warstwy zewnętrznej, ponieważ z prób przeprowadzonych przez autorów wynika, że przy takim wykonaniu przekładnia jest najdokładniejsza.





Rys. 5. Schemat eliminacji zwojów poprzecznych w transformatorze toroidalnym

Uzwojenia były prowadzone drutem o średnicy 0,5 mm, lecz tę część, z której odchodzą odczepy wykonano z drutu grubszego, aby sumaryczna oporność sekcji i doprowadzenia była proporcjonalna do ilości zwojów.

Tak zbudowany transformator jeszcze raz zaekranowano folią aluminiową i umieszczono w puszcze z anizopermu, która stanowiła ekran magnetyczny.

Rezystancje i indukcyjności własne uzwojeń, zmierzone metodami technicznymi ujęte są w tabelicy 1, a wyniki pomiaru przekładni metodą kompensacyjną podaje tabela 2.

Tabela 1

Pomiary rezystancji i indukcyjności				
Lp.	Uzwojenie	Rezystancja		Indukcyjność
1	zasilające	3,32	[Ω]	10,10 [H]
2	OI - 100OI	7,63		38,2
3	OII - 100OII	7,63		38,2
4	OII - 100II	0,41		0,390
5	OII - 10II	0,093		0,0035
6	OII - 1II	0,0074		0,000062

Tabela 2

Pomiary przekładni		
Lp.	Uzwojenie	Przekładnia
1	OI - 100OI/OII - 1II	999,7
2	OI - 100OI/OII - 10II	99,92
3	OI - 100OI/OII - 100II	9,998
4	OI - 100OI/OII - 1000II	1,000

Z tabelicy 2 widać, że błąd względny przekładni nie przekroczył w żadnym przypadku 0,1%, a należy się spodziewać, że po użyciu rdzenia o większej średnicy dokładność ta wzrośnie.

Transformator prądowy został nawinięty na podobnym rdzeniu, z tym że punkt jego pracy leży bardzo blisko początku współrzędnych. Zastosowany rdzeń miał przenikalność początkową  $\mu_p = 18200$  Gs/Oe, chociaż obecnie

w Polsce produkowane są materiały o przenikalności początkowej przekraczającej 100 000.

Sposób nawinięcia tego transformatora nie różnił się zasadniczo od wykonania transformatora napięciowego, a otrzymane parametry (rezystancje, indukcyjności, błędy przekładni) były tego samego rzędu. Przy nastawieniu stosunku mostka na wartość  $10^3$  lub wyższą, nieuniknione jest wprowadzenie korekcy, poprzez włączenie w szereg z wzorcem lub impedancją mierzoną wielkością kompensującą nierównowagę, spowodowaną przez istniejące parametry resztkowe [4].

Jeśli korekcy nie została wykonana, to prawidłowy wynik pomiaru otrzymać można poprzez dwukrotne zrównoważenie mostka: raz przy zwartej impedancji  $Z_x$ , a później z włączoną impedancją mierzoną. Różnica tych dwu wskazań daje wartość mierzonej impedancji, obciążoną błędem nieczułości.

#### LITERATURA

- [1] Butler F. - A.C. Bridges with Inductive Ratio Arms. Compensation for leakage reactance effects. *Electronic Technology*. August 1960 r.
- [2] Lynch A. - A.C. Bridge Network for the Precise Measurement of Direct Capacitance. *Prac. Instr. Elect. Engers.* Vol. 104, cz. B, Nr 16 July 1957 r. s. 364.
- [3] Millea A. - On errors of Transformer-Arm Bridges. *Acta IMECO* 1967 r. t. 2. RU-282, wyd. 1, Budapest 1968 r. Hungarian Scientific Society for Measurement and Automation s. 499.
- [4] Oatley C.W. - Bridges with Coupled Inductive Ratio-Arms as Precision Instruments. *Measurements Section*. December 1953 r.
- [5] Skubis T., Miłek M. - Mostek transformatorowy RLC. Praca dyplomowa Gliwice 1970 r. Katedra Technologii i Metrologii Elektrycznej Politechniki Śląskiej, s. 19.

Wpłynęło do redakcji w kwietniu 1974 r.

## ПОГРЕШНОСТИ ДВУТРАНСФОРМАТОРНОГО МОСТА

## Резюме

В статье анализируются систематические погрешности двухтрансформаторного моста, которые выступают в измерении из-за употребления трансформаторов. Приведены выражения для этих погрешностей и сделан вывод относительно конструкции соответствующих трансформаторов.

## ANALYSIS OF ERRORS OF A TWO TRANSFORMER BRIDGE

## Summary

The article deals with the analysis of the systematic error by measurements performed with a twotransformer bridge. Formulae are given for this error and conclusions are drawn as to the construction of proper transformers.