Andrzej ŚWIERNIAK

OCENA POGORSZENIA SIĘ JAKOŚCI STEROWANIA W UKŁADACH DYSKRETNYCH O NIEDOKŁADNYM MODELU

Streszczenie. W pracy przedyskutowano niektóre ważniejsze problemy wpływu niedokładności modelu na jakość sterowania dla obiektów, których modele mają postać skończenie wymiarowych równań różnicowych (układy dyskretne). Będą to wyniki analogiczne do uzyskanych w poprzednich pracach dla układów ciągłych. Przedstawione zostaną oszacowania strat przy sterowaniu na podstawie niedokładnego modelu w stosunku do wartości optymalnej dla modelu (za pomocą rachunku wariacyjnego) oraz ocena wpływu redukcji rzędu równań stanu obiektu dla problemu liniowo-kwadratowego.

1. Postawienie problemu

Zakładać będziemy, że model ma postać równań stanu:

$$x(i+1) = f(x(i), u(i), i); \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

gdzie:

x - jest n-wymiarowym wektorem stanu,

u - jest r-wymiarowym wektorem sterowań,

i - dyskretnym czasem i = 0,1 ... N-1

i służy do wyznaczania sterowania minimalizującego wskaźnik jakości:

$$J = \sum_{i=0}^{N-1} L(x(i), u(i), i) + h(x(N)), \tag{2}$$

przy czym stan końcowy nie jest zadany, natomiast horyzont sterowania N jest zadany.

Zakładać będziemy ponadto, że:

ZD1: Funkcje f i L są ciągle dwukrotnie różniczkowalne względem x i u, a h ciągle dwukrotnie różniczkowalne względem x(N).

ZD2: Istnieje optymalne rozwiązanie (ciąg sterowań) $u_N(0)$, $u_*(1)$, ... $u_N(N-1)$ zagadnienia (1), (2) bez dodatkowych ograniczeń.

Zakładając, że błąd aproksymacji rzeczywistej zależności zmiennych stanu obiektu od sterowania przez równania modelu wynosi ε (w sensie przyjętej miary $\|.\|$), możemy uważać, że obiekt opisuje nierówność:

$$\|x(i+1) - f(x(i), u(i), i)\| \le \varepsilon \quad ; x(0) = x_0; \quad i = 0,1 \dots N-1, \tag{3}$$

lub równanie

$$x(i+1) = f(x(i),\ u(i),\ i) + v(i);\quad x(0) = x_o;\quad i = 0,1 \dots N-1, \tag{4}$$

gdzie: $v(i)$ jest defektem wektora stanu obiektu $x(i)$ ze względu na równanie stanu modelu (1). Jest on wektorem o normie $\|v(i)\| < \varepsilon$; $i = 0,1 \dots N-1$.

ZD3: Zarówno obiekt jak i model są asymptotycznie stabilne.

Przy oszacowaniu strat będziemy korzystali z rozwinięcia wskaźnika jakości wzdłuż trajektorii nominalnej (optymalnej dla modelu), przy czym ograniczymy się do pierwszego i drugiego wyrazu rozwinięcia (pierwszej i drugiej różniczki).

Ze względu na praktyczne znaczenie dokonamy jedynie oceny strat rozumianych jako różnica między wartością wskaźnika dla obiektu przy sterowaniu minimalizującym wskaźnik jakości dla modelu, a wartością tego wskaźnika minimalną dla modelu.

Szczegółowo rozważony zostanie problem liniowo-kwadratowy, gdzie przyjęty model ma postać równań stacjonarnych liniowych:

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i);\quad i = 0,1 \dots N-1;\quad x(0) = x_o, \tag{5}$$

a wskaźnik jakości postać:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(x(i)^T Qx(i) + u(i)^T Ru(i)\right), \tag{6}$$

przy czym macierz A ma wymiar $n \times n$, B wymiar $n \times r$, Q jest symetryczną dodatnio półokreśloną macierzą o wymiarach $n \times n$, a R symetryczną dodatnio określoną o wymiarach $r \times r$, A, B, Q, R są stałe.

Również rozważania dotyczące wpływu redukcji rzędu równań stanu modelu na jakość sterowania prowadzone są dla problemu liniowo-kwadratowego.

Przyjmować będziemy, że $\|\cdot\|$ oznacza normę euklidesową.

2. Ocena różnicy między wartością wskaźnika dla obiektu sterowanego na podstawie modelu, a wartością optymalną dla modelu

Do obiektu opisanego nierównością (3) lub równaniem (4) stosujemy sterowanie u_N minimalizujące dla modelu (1) wskaźnik jakości (2).
Niech w oznacza ciąg wektorów

$$w(i) = \begin{bmatrix} u(i) \\ v(i) \end{bmatrix} \quad i = 0,1 \dots N-1 \tag{7}$$

posiadających wartość nominalną:

$$w_N(i) = \begin{bmatrix} u_N(i) \\ 0 \end{bmatrix} \quad i = 0,1 \ldots N-1 \tag{8}$$

Różnicę $J(w) - J(w_N)$ oszacujemy przez pierwszy i drugi wyraz rozwinięcia wskaźnika J wzdłuż trajektorii optymalnej dla modelu (nominalnej) określonej przez ciąg w_N. Niech $w(i) = w_N(i) + dw(i)$. Pierwsza różniczka wskaźnika jakości ma w tym przypadku postać [1]:

$$dJ = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial H(i)}{\partial w(i)} \cdot dw(i), \tag{9}$$

gdzie $H(i)$ jest ciągiem hamiltonianów:

$$H(i) = L(x(i), u(i), i) + p^T(i+1). \left[f(x(i), u(i), i) + v(i)\right] ; \tag{10}$$

$$i = 0,1 \ldots N-1$$

$p(i)$ ciągiem zmiennych sprzężonych, spełniających równania:

$$p^T(i) = \frac{\partial H(i)}{\partial x(i)}; \quad i = 0,1 \ldots N-1; \quad p^T(N) = \frac{dh}{dx(N)}, \tag{11}$$

a pochodne $\frac{\partial H(i)}{\partial w(i)}$ liczone są wzdłuż trajektorii nominalnej.

Ze względu na założenia ZD1 i ZD2 mamy na trajektorii nominalnej:

$$\frac{\partial H(i)}{\partial u(i)} = 0; \quad i = 0,1 \ldots N-1 \tag{12}$$

zatem:

$$dJ = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial H(i)}{\partial v(i)} dv(i) = \sum_{i=0}^{N-1} p^T(i+1).dv(i). \tag{13}$$

Ponieważ:

$$\|dv(i)\| \leq \varepsilon \qquad i = 0,1 \ldots N-1 \tag{14}$$

więc:

$$|dJ| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \|p^T(i+1)\| = \varepsilon \sum_{i=1}^{N} \|p^T(i)\| \tag{15}$$

Można sformułować (analogicznie jak dla układów ciągłych w [2]):

Twierdzenie 1. Ograniczenie wartości bezwzględnej pierwszej różniczki wskaźnika jakości od wartości optymalnej dla modelu przy mierze niedokładności modelu w postaci ograniczenia normy defektu stanu ma wartość określoną wzorem (15) niezależnie od tego czy sterowanie realizowane jest w układzie otwartym, czy zamkniętym.

Druga różniczka wskaźnika jakości ma postać [1]:

$$d^2 J = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} [dx(i)^T \ dw(i)^T] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H(i)}{\partial x(i)\, \partial x(i)} & \frac{\partial^2 H(i)}{\partial x(i)\, \partial w(i)} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial w(i)\, \partial x(i)} & \frac{\partial^2 H(i)}{\partial w(i)\, \partial w(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx(i) \\ dw(i) \end{bmatrix} ,$$

$$+ \frac{1}{2} dx^T(N) \frac{d^2 h}{dx(N)\, dx(N)} dx(N) \tag{16}$$

Przy tym mamy:

$$\frac{\partial^2 H(i)}{\partial v(i)\, \partial x(i)} = \left[\frac{\partial^2 H(i)}{\partial x(i)\, \partial v(i)}\right]^T = 0; \quad \frac{\partial^2 H}{\partial v(i)\, \partial v(i)} = 0$$

Jeśli ciąg sterowań u_N realizowany jest w układzie otwartym to:

$$d^2 J = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} [dx(i)^T \ du(i)^T] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H(i)}{\partial x(i)\, \partial x(i)} & \frac{\partial^2 H(i)}{\partial x(i)\, \partial u(i)} \\ \frac{\partial^2 H(i)}{\partial u(i)\, \partial x(i)} & \frac{\partial^2 H(i)}{\partial u(i)\, \partial u(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx(i) \\ du(i) \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2} dx^T(N) \frac{d^2 h}{dx(N)\, dx(N)} dx(N), \tag{17}$$

gdzie $dx(i)$ jest określone równaniem:

$$dx(i+1) = \frac{\partial f}{\partial x(i)} dx(i) + \frac{\partial f}{\partial u(i)} du(i) + dv(i); \quad dx(0) = 0 \quad i = 0,1 \ldots N-1 \tag{18}$$

A zatem:

$$dx(i) = \sum_{l=0}^{i-1} \phi_N(i,l+1) \left[\frac{\partial f}{\partial u(l)} du(l) + dv(l)\right]; \quad i = 0,1\ldots N-1, \tag{19}$$

gdzie:

$\phi_N(i,l)$ jest macierzą tranzycji równania (18),

czyli:

$$\|dx(i)\| \le \varepsilon \sum_{l=0}^{i-1} \|\phi_N(i,l+1)\| ; \quad i = 0,1 \ldots N-1, \tag{20}$$

przy czym ε zawiera składową $\frac{\partial f}{\partial u(l)}$ du(l) pochodzącą od niedokładnego nastawienia sterowania ($\|du(l)\| \leq \varepsilon_1$; $l = 0,1 \dots N-1$). $|d^2J$ można zatem oszacować jako:

$$|d^2J| \leq \frac{1}{2}\left\{\varepsilon^2\left\|\frac{d^2h}{dx(N)\,dx(N)}\right\|\left(\sum_{i=0}^{N-1}\|\phi_N(N,i+1)\|\right)^2 + \right.$$

$$+\sum_{i=0}^{N-1}\left[\varepsilon^2\left(\sum_{l=0}^{i-1}\|\phi_N(i,l+1)\|\right)^2\left\|\frac{\partial^2 H(i)}{\partial x(i)\,\partial x(i)}\right\| + \right.$$

$$\left.\left. + 2\varepsilon\varepsilon_1\sum_{l=0}^{i-1}\|\phi_N(i,l+1)\|\left\|\frac{\partial^2 H(i)}{\partial x(i)\,\partial u(i)}\right\| + \varepsilon_1^2\left\|\frac{\partial^2 H(i)}{\partial u(i)\,\partial u(i)}\right\|\right]\right\} \tag{21}$$

przy czym wszystkie pochodne liczone są wzdłuż trajektorii nominalnej.

W przypadku realizacji ciągu sterowań w układzie zamkniętym: $u_N(i) = P(x(i), i)$; $i = 0,1 \dots N-1$ mamy:

$$d^2J = \frac{1}{2}\left[dx(N)^T\frac{d^2h}{dx(N)dx(N)}dx(N)\right] + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\left\{dx(i)^T\left[\frac{\partial^2 H}{\partial x(i)\partial x(i)} + \right.\right.$$

$$+\left(\frac{\partial P(x(i),\,i)}{\partial x(i)}\right)^T\left(\frac{\partial^2 H(i)}{\partial u(i)\partial x(i)}\right) + \left(\frac{\partial^2 H(i)}{\partial x(i)\partial u(i)}\right)\left(\frac{\partial P(x(i),(i))}{\partial x(i)}\right) +$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\partial P(x(i),\,i)}{\partial x(i)}\right)^T\left(\frac{\partial^2 H(i)}{\partial u(i)\partial u(i)}\right)\left(\frac{\partial P(x(i),\,i)}{\partial x(i)}\right)\right]dx(i)\right\}, \tag{22}$$

gdzie dx(i) spełnia równanie:

$$dx(i+1) = \left[\frac{\partial f}{\partial x(i)} + \frac{\partial f}{\partial u(i)}\cdot\frac{\partial P(x(i),\,i)}{\partial x(i)}\right]dx(i) + dv(i);\ dx(0) = 0 \tag{23}$$

$$i = 0,1 \dots N-1.$$

A zatem:

$$dx(i) = \sum_{l=0}^{i-1}\phi_C(i,l+1)dv(i);\quad i = 0,1 \dots N-1 \tag{24}$$

gdzie: $\phi_C(i,l)$ jest macierzą tranzycyjną równania (23).

Mamy więc:

$$\|dx(i)\| \leq \varepsilon\sum_{l=0}^{i-1}\|\phi_C(i,l+1)\|;\quad i = 0,1 \dots N-1 \tag{25}$$

oraz

$$|d^2J| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ N \|\phi_c(N, i+1)\|^2 \cdot \left\| \frac{d^2h}{dx(N)\ dx(N)} \right\| + \right.$$

$$+ i \sum_{l=0}^{i-1} \|\phi_c(i,l+1)\|^2 \left[\left\| \frac{{}^2H(i)}{x(i)\ x(i)} \right\| + \right.$$

$$+ 2 \left\| \frac{\partial P(x(i),\ i)}{\partial x(i)} \right\| \left\| \frac{\partial^2 H(i)}{\partial u(i) \partial x(i)} \right\| + \left\| \frac{\partial^2 H(i)}{\partial u(i) \partial u(i)} \right\| \cdot$$

$$\left. \left. \cdot \left\| \frac{\partial P(x(i),\ i)}{\partial x(i)} \right\|^2 \right] \right\}, \tag{26}$$

przy czym wszystkie pochodne liczone są wzdłuż trajektorii nominalnej. Obecnie można straty oszacować jako:

$$|J(w) - J(w_N)| \leqslant |dJ| + |d^2J| \tag{27}$$

podstawiając wyrażenia (15), (21) bądź (15), (26).

W przypadku zagadnienia liniowo-kwadratowego model ma postać (5) a wskaźnik (6). Ciąg wektorów sprzężonych $p(i)$ liczony wzdłuż trajektorii nominalnej (optymalnej dla modelu) daje się wyrazić wzorem [1]:

$$p(i) = K(i)\ \phi(i,0)x_o; \qquad i = 0,1 \ldots N-1, \tag{28}$$

gdzie $K(i)$ jest symetrycznym dodatnio określonym rozwiązaniem różnicowego równania Riccatiego:

$$K(i) = A^T[K(i+1) - K(i+1)\ B(R+B^TK(i+1)B)^{-1}\ B^TK(i+1)]\,A+Q; \tag{29}$$

$$i = 0,1 \ldots N-1, \quad K(N) = 0$$

a $\phi(i,l)$ jest macierzą tranzycyjną równania:

$$x(i+1) = [I + BR^{-1}\ B^TK(i+1)]^{-1}\ Ax(i). \tag{30}$$

Oszacowanie (15) przyjmie zatem postać:

$$|dJ| \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{N} \|K(i)\,\phi(i,0)\| \cdot \|x_o\|. \tag{31}$$

Jeśli $N\to\infty$, to otrzymuje się stałą wartość macierzy K, tzn. $K(i) = K(i+1) = \hat{K}$ jest stacjonarnym rozwiązaniem równania (29), czyli:

$$\hat{K} = A^T\left[\hat{K} - \hat{K}B(R + B^T\hat{K}B)^{-1} B^T\hat{K}\right] A + Q. \tag{32}$$

Rozwiązanie to istnieje, jeśli układ (5) jest całkowicie sterowalny. Wówczas:

$$x(i+1) = [I+BR^{-1} B^T\hat{K}]^{-1} Ax(i) \tag{33}$$

zatem:

$$p(i) = \hat{K}\left\{[I+BR^{-1} B^T\hat{K}]^{-1} A\right\}^i x_o, \tag{34}$$

czyli:

$$|dJ| \leqslant \varepsilon \|\hat{K}\| \|x_o\| \sum_{i=1}^{\infty} \left\|\left\{(I+BR^{-1} B^T\hat{K})^{-1} A\right\}^i\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \|\hat{K}\| \|x_o\| \sum_{i=1}^{\infty} \|(I+BR^{-1} B^T\hat{K})^{-1} A\|^i \tag{35}$$

Jeśli:

$$\|(I+BR^{-1} B^T\hat{K})^{-1} A\| < 1 \tag{36}$$

to szereg (35) jest zbieżny i zachodzi:

$$|dJ| \leqslant \varepsilon \|\hat{K}\| \|x_o\| \frac{\|(I + BR^{-1} B^T\hat{K})^{-1} A\|}{1 - \|(I+BR^{-1} B^T\hat{K})^{-1} A\|}. \tag{37}$$

Warunek (36) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym asymptotycznej stabilności układu zamkniętego (33) [3].

Oszacowanie drugiej różniczki podobnie jak w przypadku nieliniowym zależy od struktury, w jakiej realizowane jest sterowanie.

W przypadku realizacji sterowania w układzie otwartym oszacowanie (20) przyjmuje postać:

$$\|dx(i)\| \leqslant \varepsilon \sum_{l=1}^{i} \|A^{l-1}\| \leqslant \varepsilon \sum_{l=0}^{i-1} \|A\|^l = \varepsilon \frac{1 - \|A\|^i}{1 - \|A\|}; \tag{38}$$

$$i = 0,1 \ldots N-1$$

a oszacowanie (21) postać:

$$|d^2J| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \varepsilon_1^2 \; \|R\| + \varepsilon^2 \, \|Q\| \, . \, \Big(\sum_{l=0}^{i-1} \|A\|^{\,l}\Big)^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left[\varepsilon_1^2 \; \|R\| \; + \varepsilon^2 \; \|Q\| \; \Big(\frac{1 - \|A\|^{\,i}}{1 - \|A\|}\Big)^2 \right] \tag{39}$$

W przypadku realizacji sterowania w układzie zamkniętym:

$$u_N(i) = -(R+B^TK(i+1)B)^{-1} \; B^TK(i+1) \; Ax(i); \quad i = 0,1\ldots N-1 \tag{40}$$

co umożliwia zapis oszacowania (26) jako:

$$|d^2J| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \Big(\sum_{l=1}^{i} \|\Phi(i,l)\| \Big)^2 \, . \right.$$

$$. \left. \|Q+A^TK(i+1)B(R+B^TK(i+1)B)^{-1} \, . \, R(R+B^TK(i+1)B)^{-1} \; B^TK(i+1)A\| \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \; \varepsilon^2 \; \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ i \; \sum_{l=1}^{i} \big(\|\Phi(i,l)\|\big)^2 . \right.$$

$$. \left. \|Q+A^TK(i+1)B(R+B^TK(i+1)B)^{-1} \; R(R+B^TK(i+1)B)^{-1} \; B^TK(i+1) \; A\| \right\} \tag{41}$$

W przypadku stacjonarnym (dla dużych N) mamy (przy R nieosobliwym):

$$\|dx(i)\| \leqslant \varepsilon \sum_{l=1}^{i} \left\| \left\{ (I+BR^{-1} \; B^T\hat{K})^{-1} \; A \right\}^{l-1} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \; \frac{1 - \|(I+BR^{-1} \; B^T\hat{K})^{-1} \;\; A\|^{\,i}}{1 - \|(I+BR^{-1} \; B^T\hat{K})^{-1} \;\; A\|} \tag{42}$$

oraz

$$|d^2J| \leqslant \frac{1}{2}\,\varepsilon^2 \; \sum_{i=1}^{N} \Big(\Big\| \sum_{l=1}^{i} \left[(I+BR^{-1} \; B^T\hat{K})^{-1} \; A \right]^{l-1} \Big\| \Big)^2 .$$

$$\cdot \left\| Q + A^T\hat{K}B(R+B^T\hat{K}B)^{-1} \cdot R(R+B^T\hat{K}B)^{-1} B^T\hat{K}A \right\| \leqslant \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1 - \left\|(I+BR^{-1}B^T\hat{K})^{-1} A\right\|^i}{1 - \left\|(I+BR^{-1} B^T\hat{K})^{-1} A\right\|} \right)^2 D_d, \qquad (43)$$

gdzie:

$$D_d = \left\| Q+A^T\hat{K}B(R+B^T\hat{K}B)^{-1} R(R+B^T\hat{K}B)^{-1} B^T\hat{K}A \right\| .$$

Postać oszacowania (27) jest w przypadku zagadnienia liniowo-kwadratowego szczególnie prosta i nie wymaga w zasadzie żadnych dodatkowych obliczeń, poza wykonywanymi w procesie wyznaczania sterowania optymalnego dla modelu.

3. Wpływ redukcji rzędu równań stanu na jakość sterowania

Rozpatrywać będziemy stacjonarny układ liniowy całkowicie sterowalny i obserwowalny (nazywany dalej obiektem) opisany równaniami stanu (5) oraz wyjścia:

$$y(i) = Cx(i) \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ N-1, \qquad (44)$$

gdzie y jest l-wymiarowym wyjściem, a C macierzą o wymiarze $l \times n$. Minimalizowany wskaźnik ma postać:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (y(i)^T Qy(i) + u(i)^T Ru(i)), \qquad (45)$$

gdzie: Q jest macierzą symetryczną dodatnio półokreśloną, a R macierzą symetryczną dodatnio określoną.
Sterowanie minimalizujące wskaźnik jest wyliczane na podstawie modelu niższego rzędu. Ograniczymy się przy tym jedynie do przypadku nieskończonego horyzontu sterowania ($N \to \infty$). Podobnie jak w przypadku ciągłym [4], w celu obniżenia rzędu równań stanu sprowadza się je do postaci kanonicznej Jordana:

$$x_k(i+1) = \Lambda_k x_k(i) + B_k u(i); \quad i = 1,2,\ \dots,\ x_k(0) = x_{ko} \qquad (46)$$

$$y(i) = C_k\, x_k(i), \qquad (47)$$

gdzie Λ_k jest macierzą pseudodiagonalną zbudowaną z klatek Jordana, odpowiadających wartościom własnym macierzy A.

Podzielmy macierz:

$$\Lambda_k = \begin{vmatrix} \Lambda_m & 0 \\ 0 & \Lambda_s \end{vmatrix} \tag{48}$$

tak, by Λ_s była $s \times s$ wymiarową częścią macierzy Λ_k zbudowaną z klatek Jordana, odpowiadających wartościom własnym o modułach mniejszych od jedynki, położonych "daleko" od okręgu jednostkowego. Λ_m zawiera zatem "dominujące" wartości własne.

Zakładamy, że nie ma wartości własnych równych 1 (całkowań). Model zredukowany przyjmiemy w postaci:

$$x_m(i+1) = \Lambda_m x_m(i) + B_m u(i) \quad i = 0,1..., \; x_m(0) = x_{mo} \tag{49}$$

$$y_m(i) = (C_m + P)x_m(i), \tag{50}$$

przy czym x_m składa się z pierwszych $n-s$ składowych wektora x_k, B_m zbudowana jest z pierwszych $n-s$ wierszy B_k, a C_m z pierwszych $n-s$ kolumn C_k, natomiast P zapewnia równość wzmocnień obiektu i modelu.

$$C_k(I_n - \Lambda_k)^{-1} B_k = C_m + P(I_{n-s} - \Lambda_m)^{-1} B_m, \tag{51}$$

gdzie $I_n(I_{n-s})$ jest macierzą jednostkową o wymiarach $n \times n$ $(n-s \times n-s)$. A zatem:

$$[c_{n-s+1} \dots c_n] \, (I_s - \Lambda_s)^{-1} \begin{vmatrix} b_{n-s+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{vmatrix} = P(I_{n-s} - \Lambda_m)^{-1} B_m \tag{52}$$

Jeśli tylko $r < n-s$, to układ równań (52) posiada co najmniej jedno rozwiązanie.

Zależność między wektorem stanu obiektu i modelu ma zatem (podobnie jak w przypadku ciągłym) postać:

$$x_m = Mx_k \text{ (przy założeniu } x_{mo} = Mx_{ko}), \tag{53}$$

gdzie M jest macierzą o postaci:

$$M = [I_{n-s} \; 0_s]$$

i zachodzą związki:

$$\Lambda_m M = M\Lambda_k,$$
$$B_m = MB_k, \qquad (54)$$
$$C_m = C_k M^T.$$

Oceniać straty będziemy, porównując wartość wskaźnika jakości dla obiektu sterowanego na podstawie zredukowanego modelu z wartością optymalną dla obiektu.

Sterowanie minimalizujące wskaźnik (45) dla obiektu ma postać [1],[3],[5]:

$$u^o(i) = -(R+B^T\hat{K}_k B_k)^{-1} B_k^T\hat{K}_k \Lambda_k x_k(i) = -R^{-1} B^T\hat{K}_k(I_n+B_kR^{-1}B_k^T\hat{K}_k)^{-1} \cdot$$

$$\Lambda_k x_k(i) = -R^{-1} B^T\hat{K}_k x_k(i+1) \quad i = 0,1\ldots, \qquad (55)$$

gdzie $\hat{K}_k$ jest symetrycznym dodatnio określonym rozwiązaniem ustalonym różnicowego równania Riccatiego i może być przedstawione jako:

$$\hat{K}_k = \Lambda_k^T \hat{W}\Lambda_k + C_k^T Q C_k \qquad (56)$$

przy czym:

$$\hat{W} = [\hat{K}_k^{-1} + B_kR^{-1} B_k^T]^{-1} \qquad (57)$$

czyli:

$$\hat{K}_k = \hat{W}(I_n + B_kR^{-1} B_k^T \hat{K}_k) \qquad (58)$$

Minimalna wartość wskaźnika jakości wynosi:

$$J^o = \frac{1}{2} x_{ko}^T \hat{K}_k x_{ko} \qquad (59)$$

Podobnie sterowanie minimalizujące wskaźnik (45) dla modelu ma postać:

$$u^x(i) = -(R+B_m^T\hat{K}_m B_m)^{-1} B_m^T\hat{K}_m\Lambda_m x_m(i) =$$

$$= -R^{-1} B_m^T \hat{K}_m(I_{n-s}+B_m^TR^{-1} B_m^T\hat{K}_m)^{-1} \Lambda_m x_m(i) = -R^{-1} B_m^T\hat{W}_m\Lambda_m x_m(i) =$$

$$= -R^{-1} B_m^T\hat{K}_m x_m(i+1) = -R^{-1} B_k^T M^T\hat{K}_m Mx_k(i+1) \quad i = 0,1\ldots \qquad (60)$$

przy czym $\hat{K}_m$ i $\hat{W}_m$ spełniają równania:

$$\hat{K}_m = \Lambda_m^T \hat{W}_m \Lambda_m + (C_m + P)^T Q(C_m + P), \tag{61}$$

$$\hat{K}_m = \hat{W}_m (I_{n-s} + B_m R^{-1} B_m^T \hat{K}_m). \tag{62}$$

Zastosowanie sterowania (60) do obiektu (5) prowadzi do równania:

$$x_k(i+1) = (I_n + B_k R^{-1} B_k^T M^T \hat{K}_m M)^{-1} \Lambda_k x_k(i). \tag{63}$$

Wskaźnik jakości będzie miał wartość:

$$J^x = \frac{1}{2} x_{ko}^T \hat{L} x_{ko}$$

gdzie $\hat{L}$ jest symetrycznym dodatnio określonym rozwiązaniem równania:

$$\hat{L} = C_k^T Q C_k + \Lambda_k^T M^T \hat{W}_m M B_k R^{-1} B_k^T M^T \hat{W}_m M \Lambda_k +$$

$$+ \Lambda_k^T (I_n - B_k R^{-1} B_k^T M^T \hat{W}_m M)^T \hat{L} (I_n - B_k R^{-1} B_k^T M^T \hat{W}_m M) \Lambda_k \tag{64}$$

W związku z tym można sformułować następujące:

<u>Twierdzenie 2.</u> Wartość strat wynikających z zastosowania sterowania wyznaczonego na podstawie modelu niższego rzędu do dyskretnego obiektu liniowego wyraża się wzorem:

$$J^x - J^o = \frac{1}{2} x_{ko}^T \hat{S} x_{ko}$$

gdzie: $\hat{S} = \hat{L} - \hat{K}_k$ jest macierzą symetryczną dodatnio półokreśloną, spełniającą równanie:

$$\hat{S} = \Lambda_k^T [(I_n - B_k R^{-1} B_k^T M^T \hat{W}_m M)^T \hat{S} (I_n - B_k R^{-1} B_k^T M^T \hat{W}_m M) + \hat{F} - \hat{F}_w B_k R^{-1} \cdot$$

$$\cdot B_k^T \hat{F}_w + \hat{F}_w B_k R^{-1} B_k^T \hat{F} B_k R^{-1} B_k^T M^T \hat{W}_m M + M^T \hat{W}_m M B_k R^{-1} B_k^T \hat{F} B_k R^{-1} \cdot$$

$$\cdot B_k^T \hat{F}_w + (-\hat{F}_w B_k R^{-1} B_k^T M^T \hat{K}_m M B_k R^{-1} B_k^T \hat{F}_w) - (I_n + B_k R^{-1} B_k^T \hat{F}_w)^T \hat{F} \cdot$$

$$\cdot (I_N + B_k R^{-1} B_k^T \hat{F}_w)] \Lambda_k, \tag{65}$$

gdzie: $\hat{F} = \hat{K}_k - M^T \hat{K}_m M$ spełnia równanie:

$$\hat{F} = -\Lambda_k^T \hat{F}_w \Lambda_k + C_k^T Q C_k - M^T (C_m + P)^T Q (C_m + P) M \tag{66}$$

a $\hat{F}_w = M^T\hat{W}_m M - \hat{W}$ równanie

$$\hat{F}_w(I_n+B_kR^{-1}B_k^TM^T\hat{K}_mM) + (I_n-M^T\hat{W}_mMB_kR^{-1}B_k^T)\hat{F} = -\hat{F}_wB_kR^{-1}B_k^T\hat{F} \qquad (67)$$

Dowód: Odejmując (56) od (64) otrzymuje się (65) (po uwzględnieniu (58)). Mnożąc (61) i (62) prawostronnie przez M i lewostronnie przez M^T, a następnie odejmując odpowiednio od (56) i (58) otrzymuje się odpowiednio (66) i (67).

Jeśli straty są oceniane jako różnica między J^x a wartością optymalną dla modelu to ich wielkość wynosi:

$$J^x - J^o = \frac{1}{2}x_{ko}^T(\hat{S}+\hat{F})x_{ko}.$$

Podobnie jak w przypadku ciągłym [4] jeśli sterowanie realizowane jest w układzie zamkniętym, to prawdziwe jest:

Twierdzenie 3. Otrzymany układ sterowania jest asymptotycznie stabilny.

Dowód: Równanie stanu układu zamkniętego (63) może być zapisać w postaci:

$$x_k(i+1) = (I_n - B_kR^{-1}B_k^T\hat{W}_mM)\Lambda_k x_k(i) \qquad i = 0,1 \ldots$$

Wielomian charakterystyczny macierzy $(I_n-B_kR^{-1}B_m^T\hat{W}_mM)$ ma postać

$$\det[\lambda \cdot I_n - (I_n - B_kR^{-1}B_m^T\hat{W}_mM)\Lambda_k] =$$

$$= \det[\lambda \cdot I_{n-s} - (I_{n-s}-MB_kR^{-1}B_m^T\hat{W}_m)\Lambda_m]\det(\lambda I_s-\Lambda_s) =$$

$$= \det[\lambda \cdot I_{n-s} - (I_{n-s}-B_mR^{-1}B_m^T\hat{W}_m)\Lambda_m]\det(\lambda I_s-\Lambda_s) = W_1 \cdot W_2.$$

W_1 jest wielomianem charakterystycznym modelu sterowanego optymalnie, a więc (przy założeniach odnośnie sterowalności i obserwowalności) ma pierwiastki o modułach mniejszych od jedności, natomiast W_2 jest wielomianem charakterystycznym macierzy Λ_s (posiadającej wartości własne o modułach mniejszych od jedności). A zatem wszystkie wartości własne macierzy stanu mają moduły mniejsze od jedności.

4. Uwagi końcowe

W pracy przedstawiono jedynie niektóre rezultaty dla układów dyskretnych analogiczne do otrzymanych w poprzednich pracach [2], [4], [6], [7] dla układów ciągłych. Pozostałe rozważane tam problemy można również przenieść na układy dyskretne. Uzyskuje się wtedy: ocenę wpływu niedokładności modelu na jakość sterowania w przypadku ograniczenia normy różnicy wyjść obiektu i modelu, jako miary tej niedokładności, ocenę wpływu redukcji rzędu równań stanu w przypadku skończonego horyzontu sterowania czy też ocenę strat spowodowanych zastosowaniem modelu statycznego do wyznaczania sterowania obiektem.

Natomiast nie dają się w pełni przenieść na przypadek dyskretny rozważania dotyczące wpływu niedokładności modelu w przypadku zadanego stanu końcowego. Nie można bowiem mówić o infinitezymalnej zmianie końcowego czasu sterowania w przypadku, gdy czas ten przyjmuje jedynie dyskretne wartości.

LITERATURA

[1] Bryson A.E., Ho Y.C.: Applied Optimal Control, Blaisdell Publishing Comp., Massachusetts, 1969.

[2] Świerniak A.: Oszacowanie strat w przypadku sterowania na podstawie modelu nie w pełni odpowiadającego obiektowi, VII KKA, Sesja 2.

[3] Kalman R.E., Bertram J.E.: Control systems analysis and desing via the second method of Lyapunov. Discrete time systems. Trans. ASME, Journal Basic Eng., vol. 82, seria D, s. 394-400, April 1960.

[4] Świerniak A.: Sterowanie zbliżone do optymalnego za pomocą modelu o zredukowanym rzędzie równań stanu, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Automatyka, z. 37, ss. 45-61, Gliwice 1977.

[5] Gutenbaum J.: Problemy teorii regulatorów, WNT, Warszawa 1975.

[6] Świerniak A.: Ocena wpływu różnicy między obiektem a modelem za pomocą pierwszych i drugich wariacji wskaźnika jakości, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, t. XXII, z. 1-2, ss. 63-71, 1977.

[7] Świerniak A.: Ocena strat przy sterowaniu obiektem liniowym na podstawie modelu statycznego, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, t.XXI, z.3 ss. 295-302, 1976.

ОЦЕНКА ПОТЕРЬ КАЧЕСТВА В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ С ПРИБЛИЖЕННЫМИ МОДЕЛЯМИ

Р е з ю м е

В статье рассматривается влияние различия между моделью и объектом на величину показателя качества в случае дискретных моделей. Оценка этого влияния производится на основе первой и второй составляющей разложения показателя вблизи оптимального значения для модели. Представлена проблема оптимализации с заданым интервалом управления и свободной концевой точкой. Оценивается тоже влияние понижения порядка линейной дискретной модели.

SOME RESULTS ON THE PERFORMANCE DETERIORATION
IN THE DISCRETE-TIME OPTIMUM SYSTEMS

S u m m a r y

The effect of a difference between a plant and its model upon the value of the performance index is discussed. The model uncertainty is represented by the bound in the norm of the error introduced by approximation of the plant by the discrete-time state equations. Moreover the model is assumed to be stable and completely controllable one. The first and the second order terms of the expansion of the performance index about a minimum for the model are used to estimate the losses. The problem without terminal constraints at a fixed terminal time N is discussed.