ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980
Seria: AUTOMATYKA z. 53 Nr kol. 649

Andrzej ŚWIERNIAK

INFORMACJA WYSTARCZAJACA DO STEROWANIA OBIEKTAMI O MODELACH Z NIEPEŁNA INFORMACJA

Streszczenie. W pracy rozważa się problem informacji wystarczającej do sterowania w przypadku modeli probabilistycznych i nierównościowych. Wykazuje się, że informacja ta zawarta jest w odpowiednich ocenach stanu i przeszłych sterowaniach.

1. Wstęp

Pojęcie informacji wystarczającej do sterowania jest trudne do ścisłego zdefiniowania, zależy bowiem zarówno odpprzyjętego modelu (opisu własności układu i niepewności) jak i celu sterowania. W tym opracowaniu informacja wystarczająca będzie rozumiana w sensie podobnym do wystarczających współrzędnych [1] bądź wystarczających statystyk [2], tzn. niezbyt ściśle mówiąc jako taka funkcja wielkości znanych (wyjść i wejść w poprzednich krokach), która zapewnia realizację celu sterowania nie "gorszą", niż najlepsza możliwa do osiągnięcia na podstawie tych wielkości. Rozważa się przy tym dwa rodzaje modeli niepewności: 1) probabilistyczny (zwany często w literaturze bayesowskim, np.: [3]), 2) nierównościowy [4],[5] (stanowiący odpowiednik pewnych przypadków tzw. modeli o rozkładzie ograniczonym [3]).

2. Model probabilistyczny

Obiekt opisany jest równaniem:

$$x_{n+1} = f_n(x_n, u_n, w_{n+1}) \qquad n = 0,1...N \tag{1}$$

$$x_o = x_o(w_o),$$

gdzie:

$$u_n = h_n(y_o,...y_n; \quad u_o...u_{n-1}), \tag{2}$$

$$y_n = g_n(x_n, z_n), \tag{3}$$

przy czym: x_n - wektor stanu, w_n - niezależne zmienne przypadkowe o znanych rozkładach, z_n - niezależne błędy pomiarowe, y_n - wektor mierzonych wielkości wyjściowych, u_n - wektor sterowań przyjmujący wartości ze zbioru zadanego.
Oznaczymy ponadto:

$$Y_n = (y_o \dots y_n), \qquad H_n = (h_o \dots h_n),$$

$$U_n = (u_o \dots u_n), \qquad V_n = (w_o \dots w_n, z_o \dots z_{n-1})$$

$$\bar{y}_n = (Y_n, U_{n-1}),$$

Funkcje f_n, g_n są znane, natomiast prawo sterowania składa się z N+1 wyznaczanych funkcji $h_n(\bar{y}_n)$.
Pierwotny wskaźnik jakości będziemy przyjmować w postaci:

$$I = L(x_{n+1}, u_o \dots u_N) = L(x_{n+1}, U_N), \tag{4}$$

przy czym pokażemy, że mogą do tej postaci być sprowadzone również wskaźniki o postaci:

$$I_1 = \sum_{i=1}^{N+1} L_i(x_i, u_{i-1}) + L(u_o \dots u_N) \tag{5}$$

Wtórny wskaźnik jakości ma postać [6]:

$$EI = EL(x_{N+1}, U_N) = EL(V_{N+1}, H_N), \tag{6}$$

a strategia optymalna $\hat{H}$ spełnia warunek

$$E\hat{L}(V_{N+1}, \hat{H}) = \inf_{H_N} EL(V_{N+1}, H_N). \tag{7}$$

Informacją wystarczającą nazywać będziemy w tym przypadku funkcję $D_n(\bar{y}_n)$ dla $n = 0,1 \dots N$ taką, że istnieją funkcjonały $S_n(D_n, u_n; \hat{h}_{n+1}(.) \dots \hat{h}_N(.))$ i funkcje $K_n(\bar{y}_n)$ o własnościach

$$E[L|Y_n; h_o(.) \dots h_n(.), \hat{h}_{n+1}(.) \dots \hat{h}_N(.)] =$$

$$= K_n(\bar{y}_n) + S_n(D_n(\bar{y}_n), u_n; \hat{h}_{n+1}(.) \dots \hat{h}_N(.)) \qquad n = 0,1 \dots N \tag{8}$$

Ta równość ma zachodzić dla wszystkich $\bar{h}_n$ oraz wszystkich $\bar{h}_{n+1}(.)\ldots\bar{h}_N(.)$, które mogą być zapisane jako funkcje D_s, tzn.

$$\bar{h}_s(\bar{y}_s) = \bar{h}_s(D_s(\bar{y}_s)) \qquad \text{dla} \quad s = n+1 \ldots N.$$

Taka definicja umożliwia zdefiniowanie rekurencyjne począwszy od $n = N$ sterowania optymalnego w każdym kroku jako:

$$u_n^o = \hat{h}_n(D_n),$$

jako wartości u_n minimalizującej:

$$S_n(D_n,\ u_n;\ \hat{h}_{n+1}(\cdot)\ \ldots\ \hat{h}_N(\cdot)).$$

Niemniej jednak postawienie problemu w ten sposób jest możliwe tylko przy dodatkowych założeniach dotyczących regularności funkcji strat i funkcji modelu.

Można wprowadzić za [2] pojęcie statystyk równoważnych rozkładom warunkowym x_n, przy danym $\bar{y}_n$ jako takich funkcji $X_n(\bar{y}_n)$ informacji dostępnej, że rozkłady warunkowe $P(x_n \in A \mid Y_n,\ H_{n-1}) = G_n(A \mid X_n(\bar{y}_n))$, zależą od tej informacji jedynie przez X_n, a jednocześnie $X_n(\bar{y}_n)$ może być znalezione na podstawie znajomości rozkładu $P(.\mid Y_n,\ H_{n-1})$. Pokazano tam również, że statystyki równoważne spełniają relację rekurencyjną:

$$X_{n+1} = \phi_n(X_n,\ u_n,\ y_{n+1}) \qquad n = 0,\ldots,N \tag{9}$$

Istnienie tej relacji wynika z definicji statystyk równoważnych oraz faktu, że rozkłady warunkowe $P(x_n \in A \mid Y_n,\ H_{n-1})$ mogą być określone rekurencyjnie na podstawie $P(x_{n-1} \in A \mid Y_{n-1},\ H_{N-2})$ i wymagają dodatkowo jedynie nowego pomiaru y_n i wartości $u_n = u_n(Y_n)$ w punkcie Y_n (a nie całej funkcji $h_n(\cdot)$).

<u>Twierdzenie 1</u>. W przypadku funkcji strat o postaci (4) informacja wystarczająca ma postać:

$$D_n = (X_n,\ U_{n-1}) \qquad n = 0,1\ \ldots\ N. \tag{10}$$

<u>Dowód</u>: Przyjmijmy $X_n = 0$

Dla $n = N$, mamy:

$$E\left[L(x_{N+1},\ U_N) \mid Y_N;\ h_o(\cdot),\ldots\ h_N(\cdot)\right] = E\left\{L\left[f_N(x_N,u_N,w_{N+1}),\ U_N\right]\right.$$

$$\left| Y_N;\ h_o(\cdot) \ldots h_N(\cdot) \right\} = \iint L[f_N(x_N, u_N(Y_N), w_{N+1}), U_N(Y_N)]$$

$$G_N(dx_N \mid X_N)\ P\ (dw_{N+1}) = S_N(X_N, U_{N-1}, u_N) \tag{11}$$

Przyjmując jako założenie indukcyjne,, że (8) zachodzi dla n+1 oraz że $\bar{h}_{n+1}(\cdot) \ldots \bar{h}_N(\cdot)$ zależy od D_s danego przez (10) mamy:

$$E(L \mid Y_n;\ h_o(\cdot), \ldots, h_n(\cdot), \bar{h}_{n+1}(\cdot) \ldots \bar{h}_N(\cdot)) =$$

$$E\left\{E(L \mid Y_n, y_{n+1};\ h_o(\cdot) \ldots h_n(\cdot), \bar{h}_{n+1}(\cdot) \ldots \bar{h}_N(\cdot)) \mid Y_n;\ h_o(\cdot) \ldots \bar{h}_N(\cdot)\right\}$$

$$= E\left\{S_{n+1}(X_{n+1}, U_n, \bar{h}_{n+1}(X_{N+1}, U_n);\ \bar{h}_{n+2}(\cdot) \ldots \bar{h}_N(\cdot)) \mid Y_n;\ h_o(\cdot) \ldots \bar{h}_N(\cdot)\right\} \tag{12}$$

Korzystając z rekursywnej relacji (9), równania wyjścia (3) i równania stanu (1) można X_{n+1} wyrazić jako funkcję X_n, u_n, x_n, w_{n+1} i z_{n+1}, a uwzględniając niezależność w_{n+1}, z_{n+1} i Y_n można (12) zapisać w postaci:

$$E(L \mid Y_n;\ h_o(\cdot) \ldots h_n(\cdot), \bar{h}_{n+1}(\cdot) \ldots \bar{h}_N(\cdot)) =$$

$$= \iiint S_{n+1}(X_{n+1}(X_n, u_n, x_n, w_{n+1}, z_{n+1}),$$

$$U_n, \bar{h}_{n+1}(X_{n+1}(X_n, u_n, x_n, w_{n+1}, z_{n+1}), U_n), \bar{h}_{n+2}(\cdot) \ldots \bar{h}_N(\cdot)) \;.$$

$$\cdot\ P(d z_{n+1}) P_s(dw_{n+1})\ G_n(dx_n \mid X_n) = S_n(X_n, U_{n-1}, u_n;\ \bar{h}_{n+1}(\cdot) \ldots \bar{h}_N(\cdot)). \tag{13}$$

b.b.d.o.

Równanie (13) kończy dowód indukcyjny, dając jednocześnie rekurencyjną metodę wyznaczania S_n.

Dla wskaźnika o postaci (5) można posłużyć się również twierdzeniem 1. Wystarczy wprowadzić dodatkową zmienną stanu $\tilde{x}_n$ zdefiniowaną przez

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + L_{n+1}(f_n\ (x_n, u_n, w_{n+1}), u_n),$$

Wówczas wskaźnik (5) ma postać:

$$I_1 = \tilde{x}_{N+1} + L(u_o \ldots u_N),$$

a więc został sprowadzony do postaci (4).

Twierdzenie 2. Informację wystarczającą można ograniczyć do statystyk równoważnych X_n dla wskaźnika jakości o postaci:

$$I = L_{N+1}(x_{N+1}) + \sum_{i=0}^{N} L_i(u_i) \tag{14}$$

Dowód: Dla dowodu przyjmiemy

$$K_n(\bar{y}_n) = \sum_{i=0}^{n-1} L_i(u_i) \tag{15}$$

Wówczas S_n musi być wartością oczekiwaną $L_{N+1}(x_{N+1}) + \sum_{i=n}^{N} L_i(u_i)$.

Dla n = N mamy:

$$E\left[L_{N+1}(x_{N+1}) + L_N(u_N) \mid Y_N;\ h_o(\cdot)\dots h_N(\cdot)\right] = L_N(u_N) +$$

$$+\iint L_{N+1}(f_N(x_n,u_N(Y_N),\ w_{n+1}))\ G_N(dx_N|X_N)\ P(dw_{N+1}) =$$

$$= S_N(X_N,,u_N).$$

Przyjmując jako założenie indukcyjne, że (8) zachodzi dla n + 1 i $\bar{h}_{n+1}(\cdot)$ ..., $\bar{h}_N(\cdot)$ są funkcjami D_s danego jako X_s, otrzymuje się:

$$E\left[L_{N+1}(x_{N+1}) + \sum_{i=n}^{N} L_i(u_i) \mid Y_n;\ h_o(\cdot)\dots h_n(\cdot),\ \bar{h}_{n+1}(\cdot)\dots \bar{h}_N(\cdot)\right] =$$

$$= L_n(u_n) + E\Big\{E\Big[L_{N+1}(x_{N+1}) + \sum_{i=n+1}^{N} L_i(u_i)\Big]\Big.$$

$$\Big| Y_n,\ y_{n+1};\ h_o(\cdot)\dots \bar{h}_N(\cdot) \Big| Y_n;\ h_o(\cdot)\dots \bar{h}_N(\cdot)\Big\}. \tag{16}$$

Korzystając z założenia indukcyjnego oraz podstawiając odpowiednie zależności rekurencyjne dla X_{n+1} podobnie jak w dowodzie twierdzenia 1 otrzymuje się:

$$E\left[L_{N+1}(x_{N+1}) + \sum_{i=n}^{N} L_i(u_i) \mid Y_n;\ h_o(\cdot)\dots \bar{h}_N(\cdot)\right] =$$

$$= L_n(u_n) + \iiint S_{n+1}(X_{n+1}(X_n,u_n,x_n,w_{n+1},z_{n+1}),\ \bar{h}_{n+1}(X_{n+1}(X_n,u_n,x_n,w_{n+1},z_{n+1})),$$

$$\bar{h}_{n+2}(\cdot)\dots \bar{h}_N(\cdot)).\ P(dz_{n+1})\ P(dw_{n+1})\ .$$

$$.\ G_n(dx_n \mid X_n) = S_n(X_n,u_n,\bar{h}_{n+1}(\cdot)\dots\bar{h}_N(\cdot)). \tag{17}$$

Łatwo zauważyć, że postępując podobnie jak przy wskaźniku (5) można do postaci (14) sprowadzić wskaźnik

$$I_i = \sum_{i=1}^{N+1} L_i(x_i,\ u_{i-1}), \tag{18}$$

ograniczając również w tym przypadku informację wystarczającą do statystyk równoważnych X_n.

Identyczny jak w twierdzeniu 1 rezultat można uzyskać również dla wskaźników jakości w postaci:

$$I_o = \sum_{i=1}^{N+1} L_i(x_i,\ u_o \ldots u_{i-1}), \tag{19}$$

Twierdzenie 3. Informacja wystarczająca w przypadku funkcji strat (19) ma postać:

$$D_n = (X_n,\ U_{n-1}) \qquad n = 0,1 \ldots N \tag{20}$$

Dowód: Łatwo zauważyć, że można przyjąć

$$K_n(\tilde{y}_n) = E \sum_{i=1}^{n} L_i(x_i,\ u_o \ldots u_{i-1}) \Big| Y_n,\ H_{n-1}. \tag{21}$$

Wystarczy zatem dowieść, że warunkowa wartość oczekiwana $\sum_{i=n+1}^{N+1} L_i(x_i,\ u_o \ldots u_{i-1})$ daje się przedstawić jako:

$$S_n(X_n,\ U_{n-1},\ u_n).$$

Dla $n = N$

$$E\left[L_{N+1}(x_{N+1},\ U_N) \Big| Y_N;\ h_o(\cdot) \ldots h_N(\cdot)\right] =$$

$$= \int\int L_{N+1}(f_N(x_N, u_N(Y_N), w_{N+1}), U_N(Y_N))\ G_N(dx_N|X_N)P(dw_{N+1}) = S_N(X_N,\ U_{N-1},\ u_N).$$

Przyjmując jako założenie indukcyjne, że (8) zachodzi dla n+1 i $\bar{h}_{n+1} \ldots \bar{h}_N$ są funkcjami D_n określonego przez (20) mamy dla n:

$$E\left\{\sum_{i=n+1}^{N+1} L_i(x_i,\ U_{i-1}) \Big| Y_n,\ h_o(\cdot) \ldots h_n(\cdot),\ \bar{h}_{n+1}(\cdot) \ldots \bar{h}_N(\cdot)\right\} =$$

$$= E\left\{L_{n+1}(x_{n+1},\ U_n) \Big| Y_n,\ h_o(\cdot) \ldots \bar{h}_N(\cdot)\right\} +$$

$$+ E\left\{E\left[\sum_{i=n+2}^{N} L_i(x_i,\ U_{i-1})\ \middle|\ Y_n,\ y_{n+1},\ h_o(\cdot)\ \ldots\ \bar{h}_N(\cdot)\right]\middle|\ Y_n,\right.$$

$$\left. h_o(\cdot)\ \ldots\ \bar{h}_N(\cdot)\right\} = E[L_{n+1}(f_n(x_n,u_n,w_{n+1}),\ U_n)|Y_n,h_o(\cdot)\ldots\bar{h}_N(\cdot)] +$$

$$+ E\left\{S_{n+1}(X_{n+1},\ U_n,\ \bar{h}_{n+1}(X_{n+1},\ U_n);\ \bar{h}_{n+2}(\cdot)\ldots\ \bar{h}_N(\cdot)\right\}.$$

Korzystając podobnie jak w poprzednich dowodach z odpowiednich zależności rekurencyjnych, otrzymuje się:

$$E\left[\sum_{i=n+1}^{N+1} L_i(x_i,U_{i-1})|Y_n,\ h_o(\cdot)\ \ldots\ \bar{h}_N(\cdot)\right] =$$

$$= \iint L_{n+1}(f_n\ (x_n,u_n,w_{n+1}),\ U_n)\ G_n(dx_n\ |\ X_n)\ P(dw_{n+1}) +$$

$$+ \iiint S_{n+1}(X_{n+1}\ (X_n,u_n,x_n,w_{n+1},z_{n+1}),U_n,\ \bar{h}_{n+1}\ (X_{n+1}(X_n,u_n,x_n,w_{n+1},z_{n+1}),U_n);$$

$$\bar{h}_{n+2}(.),\ldots\ \bar{h}_N(\cdot))\ P(dz_{n+1})\ P(dw_{n+1})\ G_n(dx_n\ |\ X_n) =$$

$$= S_n(X_n,\ U_{n-1},\ u_n;\ \bar{h}_{n+1}(\cdot)\ldots\ \bar{h}_N(\cdot)) \tag{22}$$

c.b.d.o.

Łatwo zauważyć, że wskaźnik (19) jest ogólniejszy od poprzednio rozważanych i wskaźniki (4), (5) i (18) są szczególnymi jego przypadkami.

Dla funkcji strat o ogólniejszej postaci $L(x_o,\ \ldots x_{N+1},u_o,\ldots u_N)$ (20) nie jest informacją wystarczającą, konieczną byłaby reestymacja całego przeszłego stanu przed każdym wyznaczeniem sterowania.

3. Model nierównościowy

Obiekt opisany jest nierównością

$$\|x_{n+1} - f_n(x_n,\ u_n)\| < \varepsilon \qquad n = 0,1\ldots\ N \tag{23}$$

$$\|x_o - \hat{x}_o\| < \varepsilon_o$$

gdzie:

$$u_n = h_n(y_o \dots y_n;\ u_o \dots u_{n-1}) \tag{24}$$

$$\left\| y_n - g_n(x_n) \right\| \leq \eta \tag{25}$$

Przed zdefiniowaniem informacji wystarczającej określimy rekurencyjny algorytm (oparty na metodzie programowania dynamicznego) znajdowania sterowania minimalizującego wtórny wskaźnik jakości przy pierwotnej funkcji celu o postaci ogólnej:

$$I = L(x_1 \dots x_{N+1},\ u_o \dots u_N). \tag{26}$$

Wtórny wskaźnik jakości ma postać $\sup L(x_1 \dots x_{N+1},\ u_o \dots u_N)$. Stosując oznaczenia z poprzedniego punktu, strategię optymalną $\hat{H}$ określimy jako spełniającą warunek:

$$\sup L(x_1 \dots x_{N+1};\ \hat{H}) = \inf_{H_N} \sup L(x_1 \dots x_{N+1},\ H_N) \tag{27}$$

(Sup jest brane po wszystkich wielkościach nieustalonych).

Niech $\sup(\cdot|\cdot)$ przez analogię do uśredniania warunkowego będzie operacją sup warunkowego. Definiując:

$$E_{N+1}(\bar{y}_N,\ u_N) = \sup\left[L(x_1 \dots x_{N+1}, u_o \dots u_N) \mid \bar{y}_N,\ h_N(\cdot)\right] \tag{28}$$

$$Q_n(\bar{y}_n) = \inf_{u_n} E_{n+1}(\bar{y}_n,\ u_n) \qquad n = 1, \dots N \tag{29}$$

$$E_{n+1}(\bar{y}_n,\ u_n) = \sup\left[Q_{n+1}(\bar{y}_n,\ u_n,\ y_{n+1}) \mid \bar{y}_n, h_n(\cdot)\right] \tag{30}$$

otrzymuje się rekursywną formułę wyznaczania strategii optymalnych $\hat{h}_k(\bar{y}_k)$.

Informację wystarczającą $D_n(\bar{y}_n)$ zdefiniujemy jako taką funkcję informacji dostępnej y_n, że istnieje funkcjonał $S_n(D_n,\ u_n)$ i funkcja $K_n(\bar{y}_n)$, takie, że

$$E_{n+1}(\bar{y}_n, u_n) = S_n(D_n(\bar{y}_n), u_n) + K_n(\bar{y}_n) \qquad n = 0, 1 \dots N. \tag{31}$$

Umożliwia to wyznaczenie strategii optymalnej w sposób rekurencyjny z relacji

$$\bar{Q}_n(D_n(\bar{y}_n)) = Q_n(\bar{y}_n) = \inf_{u_n} \left[S_n(D_n(\bar{y}_n),\ u_n) + K_n(\bar{y}_n)\right].$$

Analogicznie do statystyk równoważnych warunkowym gęstościom prawdopodobieństwa oznaczymy przez $X_n(\vec{y}_n)$ funkcje określające zbiory stanów konsystentnych z pomiarami:

$$Z_n\,(x_n \mid Y_n,\, H_{n-1}) = Z_n(x_n \mid X_n(\vec{y}_n)),$$

tzn. że zbiory te zależą od informacji dostępnej jedynie przez X_n, a jednocześnie $X_n(\vec{y}_n)$ może być znalezione na podstawie znajomości zbioru

$$Z_n(\cdot \mid Y_n,\, H_{n-1}).$$

Obecnie można sformułować twierdzenia podobne do otrzymanych w poprzednim rozdziale dla modeli probabilistycznych. Na wstępie zauważmy, że funkcje X_n spełniają relację rekurencyjną:

$$X_{n+1} = \phi_n(X_n,\, u_n,\, y_{n+1}) \qquad n = 0,1\ldots N \tag{32}$$

Zauważmy bowiem, że zbiór Z_{n+1} jest przecięciem dwóch zbiorów:

$$Z_{n+1}\,(x_{n+1} \mid Y_{n+1}, H_n) = \Big\{x_{n+1}:\ \|y_{n+1} - g_{n+1}(x_{n+1})\| \leq \eta \wedge$$

$$\wedge \exists x_n \in Z_n(x_n \mid X_n\,(\vec{y}_n)):\ \|x_{n+1} - f_n(x_n,\, u_n(\vec{y}_n))\| \leq \varepsilon\Big\}$$

a zatem zbiór ten jest funkcją X_n, u_n, y_{n+1}. Z kolei z definicji X_{n+1} może być znaleziony na podstawie znajomości zbioru $Z_{N+1}(\cdot)$.

Niech wskaźnik pierwotny ma postać (14). Wówczas można analogicznie do twierdzenia 2 udowodnić:

<u>Twierdzenie 4</u>. Funkcje $X_n(n = 0,1\ldots N)$ określające zbiory stanów konsystentnych z pomiarami stanowią informację wystarczającą przy wskaźniku jakości o postaci $I = L_{N+1}(x_{N+1}) + \sum_{i=0}^{N} L_i(u_i)$.

<u>Dowód</u>. Dla dowodu przyjmiemy

$$K_n(\vec{y}_n) = \sum_{i=0}^{n-1} L_i(u_i).$$

Mamy wówczas:

Dla $n = N+1$

$$E_{N+1} = \sup\Big\{L_{N+1}(x_{N+1}) + \sum_{i=0}^{N} L_i(u_i)\Big\} =$$

$$= [\sup\left\{L_{N+1}(f_N(x_N, u_N) + w_{N+1}) + L_N(u_N);\ \|w_{N+1}\| \leqslant \varepsilon\right\}|$$

$$|\bar{y}_N, h_N(\cdot)] + K_N(\bar{y}_N) = S_N(X_N, u_N) + K_N(\bar{y}_N)$$

Przyjmując jako założenie indukcyjne, że (31) zachodzi dla n+1 i h_{n+1} ... ...$\bar{h}_N$ są funkcjami D_n danego jako X_n otrzymuje się dla n:

$$E_{n+1}(\bar{y}_n, u_n) = \sup[Q_{n+1}(\bar{y}_n, u_n, y_{n+1})\ |\ \bar{y}_n, h_n(\cdot)] =$$

$$= \sup\left\{\inf_{u_{n+1}} E_{n+2}(\bar{y}_{n+1}, u_{n+1})\right\}\Big|\ \bar{y}_n, h_n(\cdot) =$$

$$= \sup\left\{\inf_{u_{n+1}} S_{n+1}(X_{n+1}, u_{n+1}) + K_{n+1}(\bar{y}_{n+1})\right\}\Big|\ \bar{y}_n, h_n(\cdot) =$$

$$= \sup\left\{S_{n+1}(X_{n+1}(X_n, u_n, y_{n+1}), \bar{h}_{n+1}(X_{n+1}(X_n, u_n, y_{n+1})))\right| +$$

$$+ L_n(u_n) + \sum_{i=0}^{n-1} L_i(u_i)\Big\}\Big|\ \bar{y}_n, h_n(\cdot) =$$

$$= \sup\left\{S_{n+1}(X_{n+1}(X_n, u_n, y_{n+1}), \bar{h}_{n+1}(X_{n+1}(X_n, u_n, y_{n+1})))\right\}\Big|\bar{y}_n, h_n(\cdot) +$$

$$+ L_n(u_n) + K_n(\bar{y}_n) = S_n(X_n, u_n) + K_n(\bar{y}_n) \tag{33}$$

c.b.d.o.

Podobnie dowodzi się twierdzenia analogicznego do twierdzenia 1, wykazując, że informacją wystarczającą przy wskaźniku jakości o postaci $I = L(x_{N+1}, u_0 \ldots u_N)$ jest $D_n = (X_n, U_{n-1})$, a także sprowadza do tej postaci wskaźnika typu

$$I_1 = \sum_{i=1}^{N+1} P_i(x_i, u_{i-1}) + L(u_0 \ldots u_N).$$

4. Dwa przypadki szczególne

Omówione tu zostaną modele (jeden probabilistyczny, drugi nierównościowy), dla których informacja wystarczająca ma postać szczególnie prostą.

W pierwszym przypadku rozważony zostanie liniowy przypadek Gaussowski z funkcją celu zależną od zredukowanego stanu.
Model ma zatem postać:

$$x_{n+1} = A_n x_n + u_n + w_{n+1} \qquad n = 0,1\ldots N \tag{34}$$

$$y_n = x_n + z_n$$

w_n i z_n są niezależnymi Gaussowskimi wektorami o zerowej wartości średniej i macierzach kowariancji:

$$E(w_n w_n^T) = H_n, \qquad E(z_n z_n^T) = R_n,$$

a x_0 ma rozkład normalny o wartości średniej $\hat{x}_0$ i wariancji P_0. Wskaźnik jakości ma postać:

$$I_0 = \sum_{i=1}^{N+1} L_i(B_i x_i, u_0 \ldots u_{i-1}), \tag{35}$$

gdzie B_i jest macierzą o wymiarach pxm ($p < m$) o postaci $B_i = B_{i+1} A_i$, $B_{N+1} = B$, B macierz pxm (m - wymiar stanu).

Informacja wystarczająca ma postać:

$$D_n = (\hat{b}_n, U_{n-1}); \qquad n = 0\ldots N \tag{36}$$

przy czym:

$$\hat{b}_n = B_n \hat{x}_n = BA_N \ldots A_n \hat{x}_n$$

gdzie: $\hat{x}_n$ jest warunkową wartością średnią daną przez równania filtru Kalmana [7]:

$$\hat{x}_{n+1} = A_n \hat{x}_n + u_n + P_{n+1} R_{n+1}^{-1} (y_{n+1} - u_n - A_n \hat{x}_n) \tag{37}$$

$$P_{n+1}^{-1} = R_{n+1}^{-1} + (H_n + A_n P_n A_n^T)^{-1} \tag{38}$$

Dowód przeprowadzić należy identycznie jak w tw. 1

Przyjmujemy zatem, że:

$$K_n(\vec{y}_n) = E\sum_{i=1}^{n} L_i(B_i, x_i, u_o \dots u_{i-1}) \Big| Y_n, H_{n-1} \tag{39}$$

Następnie trzeba indukcyjnie dowieść, że warunkowa wartość oczekiwana $\sum_{i=n+1}^{n+1} L_i(B_i x_i, u_o \dots u_{i-1})$ daje się przedstawić jako $S_n(\hat{b}_n, U_{n-1}, u_n)$.

Dla n=N mamy:

$$Bx_{N+1} = BA_N x_N + Bu_N + Bw_{N+1} + \hat{b}_N - \hat{b}_N$$

czyli:

$$Bx_{N+1} = BA_N(x_N - \hat{x}_N) + Bw_{N+1} + Bu_N + \hat{b}_N \tag{40}$$

Warunkowo przy Y_N wielkość $Bu_N + \hat{b}_N$ jest ustalona, a zmienna $v_N = BA_N(x_N - \hat{x}_N) + Bw_{N+1}$ ma rozkład normalny o zerowej wartości średniej i wariancji:

$$\sigma_{N+1} = BA_N P_N A_N^T B^T + BH_{N+1} B^T,$$

bo zmienne w_{N+1} i $(x_N - \hat{x}_N)$ są niezależne.

A zatem oznaczając przez $\varphi_{N+1}(v_N;\ 0, \sigma_{N+1})$ funkcję gęstości zmiennej v_N:

$$E\left[L_{N+1}(Bx_{N+1}, U_N) \,\middle|\, Y_N;\ h_o(\cdot) \dots h_N(\cdot)\right] =$$

$$= \int L_{N+1}(\hat{b}_N + Bu_N + v_N, U_N)\, \varphi_{N+1}(v;\ 0, \sigma_{N+1})\ dv =$$

$$= S_N(\hat{b}_N, U_{N-1}, u_N).$$

Załóżmy obecnie, że 48) zachodzi dla n+1 i że $\bar{h}_{n+1}(\cdot) \dots \bar{h}_n(\cdot)$ są funkcjami D_s określonego przez (36).

Dla n otrzymuje się:

$$E\left[\sum_{i=n+1}^{N+1} L_i(B_i x_i, U_{i-1}) \,\middle|\, Y_n, h_o(\cdot) \dots h_n(\cdot), \bar{h}_{n+1}(\cdot) \dots \bar{h}_N(\cdot)\right] =$$

$$= E\left[L_{n+1}(B_{n+1}x_{n+1}, U_n) \,\middle|\, Y_n, h_o(\cdot) \dots \bar{h}_N(\cdot)\right] +$$

$$+ E\left\{ E\left[\sum_{i=n+2}^{N} L_i(B_i, x_i, U_{i-1}) \middle| Y_n, y_{n+1}, h_o(\cdot) \ldots \hat{h}_N(\cdot) \right] \middle| Y_n, h_o(\cdot) \ldots \hat{h}_N(\cdot) \right\} \tag{41}$$

Zauważmy obecnie, że $\hat{b}_n$ spełnia rekurencyjny związek (wynikający z (37))

$$\hat{b}_{n+1} = \hat{b}_n + BA_N \ldots A_{n+1} u_n + BA_N \ldots A_{n+1} P_{n+1} R_{n+1}^{-1} (y_{n+1} + u_n - A_n \hat{x}_n) \tag{42}$$

$$\hat{b}_{n+1} = \hat{b}_n + B_{n+1} u_n + B_{n+1} P_{n+1} R_{n+1}^{-1} (A_n (x_n - \hat{x}_n) + w_{n+1} + z_{n+1}).$$

Zmienna $v_n = B_{n+1} P_{n+1} R_{n+1}^{-1} (A_n (x_n - \hat{x}_n) + w_{n+1} + z_{n+1})$ ma gęstość warunkową przy y_n normalną $\varphi_{n+1}(v_n; 0, \sigma_{n+1})$ o zerowej wartości średniej i wariancji:

$$\sigma_{n+1} = B_{n+1} P_{n+1} R_{n+1}^{-1} (A_n P_n A_n^T + R_{n+1} + H_{n+1}) R_{n+1}^{-1} P_{n+1} B_{n+1}^T$$

natomiast wielkość $\hat{b}_n + BA_N \ldots A_{n+1} u_n$ jest ustalona.
Podobnie

$$BA_N \ldots A_{n+1} x_{n+1} = BA_N \ldots A_n x_n + BA_N \ldots A_{n+1} u_n + BA_N \ldots A_{n+1} w_{n+1} +$$

$$+ \hat{b}_n - \hat{b}_n$$

czyli

$$B_{n+1} x_{n+1} = B_n (x_n - \hat{x}_n) + B_{n+1} w_{n+1} + \hat{b}_n + B_{n+1} u_n$$

Warunkowo przy Y_n wielkość $B_{n+1} u_n + \hat{b}_n$ ma wartość ustaloną, a zmienna $v_n' = B_{n+1} [A_n (x_n - \hat{x}_n) + w_{n+1}]$ ma rozkład normalny o zerowej wartości średniej i wariancji

$$\sigma'_{n+1} = B_{n+1} A_n P_n A_n^T B_{n+1}^T + H_{n+1}.$$

Oznaczając funkcję gęstości warunkowej zmiennej v_n' przez $\varphi'_{n+1}(v_n'; 0, \sigma'_{n+1})$, wykorzystując założenie indukcyjne i zależność rekurencyjną na $\hat{b}_{n+1}$ można (41) zapisać jako:

$$\int L_{N+1}(\hat{b}_n + B_{n+1} u_n + v_n', U_n) \varphi'_{n+1}(v_n'; 0, \sigma'_{n+1}) \, dv_n' +$$

$$+ \int S_{n+1}(\hat{b}_n + B_{n+1} u_n + v_n, U_n, h_{n+1}(b_n + B_{n+1} u_n + v_n, U_n);$$

$$\bar{h}_{n+2}(\cdot) \ldots \bar{h}_N(\cdot))\, \varphi_{n+1}(v_n;\ 0,\ \sigma_{n+1})\, dv_n =$$

$$= S_n(\hat{b}_n,\ U_{n-1},\ u_n;\ \bar{h}_{n+1}(\cdot) \ldots \bar{h}_N(\cdot)). \tag{43}$$

c.b.d.o.

Jednocześnie (42) jest przepisem na wyznaczanie $\hat{b}_n$ przy dodatkowym wykorzystaniu (38) do wyznaczania P_n. Zauważmy, że przypadkiem szczególnym wskaźnika (35) jest wskaźnik $I = L(Bx_{N+1},\ u_o \ldots u_N)$, a więc również dla tego typu wskaźnika $D_n = (\hat{b}_n,\ U_{n-1})$ jest informacją wystarczającą $(\hat{b}_n = BA_N \ldots A_n x_n)$. Z drugiej strony, stosując podobne postępowanie, otrzymuje się przy wykorzystaniu schematu dowodu twierdzenia 2 ograniczenie informacji wystarczającej do $\hat{b}_n$; $n = 0 \ldots N$ dla wskaźników o postaci addytywnej

$$I = L_{N+1}(Bx_{N+1}) + \sum_{i=0}^{N} L_i(u_i)$$

lub nieco ogólniejszych

$$I_1 = \sum_{i=1}^{N+1} L_i(B_i x_i,\ u_{i-1}).$$

W drugim przypadku rozważony zostanie liniowy skalarny model nierównościowy o postaci:

$$|x_{n+1} - (ax_n + u_n)| \leq \varepsilon \qquad n = 0,1 \ldots N$$

$$|y_n - x_n| \leq \eta$$

$$|x_o - \hat{x}_o| \leq \varepsilon_o$$

Dla wskaźnika o postaci $I = L_{N+1}(x_{n+1}) + \sum_{i=0}^{N} L_i(u_i)$ zgodnie z twierdzeniem 4 informacja wystarczająca ma postać funkcji określającej zbiory stanów konsystentnych z pomiarami. W tym przypadku dla każdego n=0 .... N

$$D_n = X_n(x_n \mid \bar{y}_n) = [\varepsilon_n^-,\ \varepsilon_n^+],$$

przy czym:

$$D_o = [\varepsilon_o^-,\ \varepsilon_o^+] = [x_o - \varepsilon_o,\ x_o + \varepsilon_o]$$

$$\varepsilon_{n+1}^- = \max\{a\,\varepsilon_n^- + u_n - \varepsilon,\ y_{n+1} - \eta\}$$

$$\varepsilon_{n+1}^+ = \min\{a\varepsilon_n^+ + u_n + \varepsilon,\ y_{n+1} + \eta\}$$

odpowiednie funkcje S_n mają tu postać:

$$S_N(\varepsilon_N^-, \varepsilon_N^+; u_N) = \sup_{\substack{|w_{N+1}| \leq \varepsilon \\ x_N \in [\varepsilon_N^-, \varepsilon_N^+]}} \left\{ L_{N+1}(ax_N + u_N + w_{n+1}) + L_N(u_N) \right\}$$

$$S_n(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+, u_n) = \sup_{\bar{y}_{n+1} \in \{a[\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+] + u_n + [-\varepsilon, \varepsilon] + [-\eta, \eta]\}} \left\{ \inf_{u_{n+1}} S_{n+1} \left\{ \max\left\{a\, \varepsilon_N^- + u_n + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \varepsilon, y_{n+1} - \eta\right\}, \min\left\{a\varepsilon_n^+ + u_n + \varepsilon,\ y_{n+1} + \eta\right\}, u_{n+1}\right)\right\} + L_n(u_n)\right\}$$

5. Zakończenie

Zaproponowane w pracy pojęcie informacji wystarczającej ma znaczenie praktyczne, gdy informacja $D_N(\bar{y}_n)$ jest łatwiejsza do uzyskania lub pamiętania niż $\bar{y}_n$, a także gdy łatwiej minimalizować $S_n(D_n, u_n)$, niż odpowiedni człon (tzn. $E[L \mid \bar{y}_n]$ bądź $E_{n+1}(\bar{y}_n, u_n)$) w algorytmie programowania dynamicznego, wreszcie gdy operacja $\hat{h}_n(D_n)$ ma prostszą postać niż $h_n(\bar{y}_n)$.

Dla modeli probabilistycznych rezultaty uzyskane w punkcie 2 mogą być otrzymane przez bezpośrednie zastosowanie zasad minimalizacji - uśredniania [6] oraz uogólnionej zasady stochastycznej równoważności [8]; tu przedstawiono metodę żmudniejszą, korzystającą jednak bezpośrednio z relacji znanych z klasycznej teorii prawdopodobieństwa, a ponadto łatwą do przeniesienia na modele nierównościowe.

Należy przy tym podkreślić, że w rozważanych klasach funkcji celu mieszczą się również zadania z ograniczeniami na stan i sterowanie. Można bowiem je sprowadzić do rozważanych wskaźników jakości przez wprowadzenie funkcji zbliżonych do funkcji kary. Np. jeśli stan x_n ma należeć do zbioru Δ_n, a sterowanie u_{n-1} do zbioru Ω_{n-1}, można wskaźnik zapisać w postaci:

$$I = \sum_{i=1}^{N+1} \left\{ \delta(x_n \mid \Delta_n) + \delta(u_{n-1} \mid \Omega_{n-1}) \right\}$$

gdzie:

$$\delta(x \mid Z) = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ \infty & x \in Z \end{cases}$$

Podobną postać mają zadania nadążania i trafienia w zadany zbiór końcowy.

LITERATURA

[1] Stratonowicz P.A.: Usłownyje markowskije prociessy, IMU, Moskwa 1966.

[2] Striobel Ch.: Sufficient Statistics in the Optimum Control of Stochastic Systems, J. Math. Anal.Appl. v. 12, 1965.

[3] Schweppe F.: Stochastic Dynamic Systems, Class Notes, Masachusetts, 1969.

[4] Świerniak A.: Wpływ niedokładności modelu na jakość sterowania, praca doktorska, Gliwice 1978.

[5] Świerniak A.: Ocena wpływu różnicy między obiektem a modelem za pomocą pierwszych i drugich wariacji wskaźnika jakości, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, v.XXII, n.1-2, 1977.

[6] Gessing R.: Zastosowane zasady minimalizacji i uśredniania do wyznaczania algorytmów sterowania optymalnego,Archiwum Automatyki i Telemechaniki, t.XXI, z.4, 1976.

[7] Bucy R., Joseph P.: Filtering for stochastic processes with applications to guidance, John Wiley, New York 1968.

[8] Gessing R.: Uogólniona zasada stochastycznej rozdzielności. Materiały VII KKA, Rzeszów 1977.

ДОСТАТОЧНАЯ ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ ПРИ ПОМОЩИ МОДЕЛЕЙ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Р е з ю м е

В статье решается задача достаточной информации при управлению системами которые описываются статистическими или неравенственными динамическими моделями. Достаточная информация является зависимой от оценок состояния и прошлых управлений.

THE SUFFICIENT INFORMATIONS TO CONTROL THE PLANTS WITH UNCERTAINTY IN MODELS

S u m m a r y

In the paper the problem of the sufficient information for control in case of the probabilistic models and the inequality ones is considered.It has been proved that the sufficient information is contained in the proper state estimates and the values of former decisions.