

Stanisław KOZIELSKI

IDENTYFIKACJA OBIEKTÓW NIESTACJONARNYCH
METODĄ NAJMNIEJSZEJ WAŻONEJ SUMY KWADRATÓW

Streszczenie. W pracy przedstawiono problem doboru optymalnej długości serii pomiarów oraz współczynnika wagi w przypadku identyfikacji obiektu niestacjonarnego metodą najmniejszej ważonej sumy kwadratów.

Odrębnie rozpatrzono problem doboru współczynnika wagi dla algorytmu rekurencyjnego tej metody.

Otrzymane rozwiązania porównano z wynikami badań symulacyjnych.

1. Wprowadzenie

W grupie metod identyfikacji obiektów niestacjonarnych wyodrębnić można algorytmy wynikające z modyfikacji klasycznej metody najmniejszej sumy kwadratów (MNSK). Celem takich modyfikacji jest nadanie MNSK własności śledzących, umożliwiających przy okresowym powtarzaniu obliczeń, nadążanie za zmieniającymi się parametrami obiektu. Własności takie uzyskuje się przez ograniczenie liczby pomiarów wykorzystywanych do identyfikacji i wykonywanie obliczeń na podstawie aktualizowanego na bieżąco skończonego zbioru danych bądź też wprowadzenie do kryterium NSK malejących wykładniczo współczynników wagowych, które zapewniają eliminację zdezaktualizowanych danych pomiarowych.

Przedmiotem niniejszej pracy jest dobór obu wymienionych parametrów przy wykorzystaniu do identyfikacji metody najmniejszej ważonej sumy kwadratów (MNWSK).

W pracy rozważana będzie klasa obiektów niestacjonarnych, które opisać można równaniem

$$y_i = \underline{x}_i^T \underline{a}_i = \underline{x}_i^T (\underline{b} + \underline{g}(i) + \underline{z}_i), \quad (1)$$

gdzie:

y_i - wartość wielkości wyjściowej obiektu w kroku i ,

\underline{x}_i - wektor wielkości wejściowych obiektu w kroku i ,

$$\underline{x}_i^T = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}]$$

$\underline{b}^T = [b_1, b_2, \dots, b_p]$ - wektor reprezentujący składowe stałe parametrów obiektu,

$\underline{g}(i)$ - funkcja określająca deterministyczne zmiany czasowe parametrów obiektu; w pracy ograniczymy się do przypadku

$$\underline{g}(i) = i \underline{c}, \quad \underline{c}^T = [c_1, c_2, \dots, c_p] \quad (2)$$

\underline{z}_i - wektor zakłóceń losowych o własnościach

$$E(\underline{z}_i) = \underline{0} \quad (3)$$

$$E(\underline{z}_i \underline{z}_j^T) = \begin{bmatrix} \sigma_{z_1}^2 & & & 0 \\ & \sigma_{z_2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_{z_p}^2 \end{bmatrix} = R \delta_{ij} \quad (4)$$

δ_{ij} - delta Kroneckera

Jako reprezentację obiektu (1) na przestrzeni jednego kroku pomiarowego przyjmiemy model w postaci

$$y_i^M = \underline{z}_i^T \underline{a}_j^M, \quad (5)$$

gdzie:

$$\underline{a}_j^M = \begin{bmatrix} a_{1j}^M \\ \vdots \\ a_{pj}^M \end{bmatrix} - \text{wektor współczynników modelu wyznaczonych po } j\text{-tym kroku pomiarowym.}$$

Współczynniki modelu wyznaczone będą metodą najmniejszej ważonej sumy kwadratów. Dla przypadku, kiedy obliczenia wykonane będą po n -tym kroku pomiarowym otrzymamy

$$\underline{a}_n^M = (\underline{X}^T \underline{W} \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{W} \underline{y} \quad (6)$$

przy założeniu, że $\det(\underline{X}^T \underline{W} \underline{X}) \neq 0$,

gdzie:

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{x}_{n-k+1}^T \\ \vdots \\ \underline{x}_n^T \end{bmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_{n-k+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} \alpha^{k-1} & & & 0 \\ & \alpha^{k-2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

α - współczynnik wagi

k - liczba pomiarów wykorzystywanych do identyfikacji, $k \geq p$.

Zakładamy również, że procedura identyfikacji powtarzania będzie po kolejnych krokach pomiarowych, co zapewnić ma ciągłą aktualność modelu. Interesującą z punktu widzenia zastosowań będzie ocena własności predykcyjnych aktualizowanego na bieżąco modelu. Jako miarę takiej oceny przyjmujemy wskaźnik

$$Q = E \left[(y_{n+1} - y_{n+1}^M)^2 \right], \quad (7)$$

gdzie:

$E(\cdot)$ oznacza wartość oczekiwaną

oraz

$$y_{n+1}^M = \mathbf{x}_{-n+1}^T \mathbf{a}_{-n}^M. \quad (8)$$

Celem naszych rozważań będzie dobór takich k oraz α , które prowadzą do minimalizacji wskaźnika Q .

Odrębnie rozpatrzymy model jedno- i wielowymiarowy oraz przypadek rekurencyjnej postaci zależności (6).

2. Dobór optymalnych parametrów identyfikacji dla modelu jednowymiarowego

Przyjmijmy równanie opisujące obiekt (1) w postaci

$$y_i = x_i(b + \alpha z_i), \quad (9)$$

przy czym wszystkie wielkości w tym równaniu zostały zdefiniowane w (1) oraz

$$E(z_i z_j) = \delta_{ij} \sigma_z^2. \quad (10)$$

Współczynnik modelu

$$y_i^M = x_i a_j^M \quad (11)$$

wyznaczany będzie zgodnie z (6) według zależności (dla $j=n$)

$$a_n^M = \frac{\sum_{i=n-k+1}^n x_i y_i \alpha^{n-1}}{\sum_{i=n-k+1}^n x_i^2 \alpha^{n-1}} \quad (12)$$

Wykorzystując równanie (9) otrzymamy:

$$a_n^M = b + c(n+1) - c \frac{\sum_{i=1}^k i x_{n+1-i}^2 \alpha^{i-1}}{\sum_{i=1}^k x_{n+1-i}^2 \alpha^{i-1}} + \frac{\sum_{i=1}^k x_{n+1-i}^2 z_{n+1-i} \alpha^{i-1}}{\sum_{i=1}^k x_{n+1-i}^2 \alpha^{i-1}} \quad (13)$$

Obliczymy wartość wskaźnika (7)

$$Q = E \left\{ (y_{n+1} - y_{n+1}^M)^2 \right\} = E \left\{ \left[x_{n+1} (b + c(n+1) + z_{n+1}) - x_{n+1} \cdot a_{n+1}^M \right]^2 \right\}$$

Przy wykorzystaniu założeń o własnościach zakłóceń (10) otrzymamy:

$$Q = \sigma^2 \cdot E \left\{ \left(\frac{\sum_{i=1}^k i x_{n+1-i}^2 \alpha^{i-1}}{\sum_{i=1}^k x_{n+1-i}^2 \alpha^{i-1}} \right)^2 \right\} + \sigma_z^2 + \sigma_z^2 \cdot \sum_{j=1}^k E \left\{ \frac{x_{n+1-j}^4 \alpha^{2(j-1)}}{\left(\sum_{i=1}^k x_{n+1-i}^2 \alpha^{i-1} \right)^2} \right\} \quad (14)$$

Zauważmy, że wartość wskaźnika Q nie zależy od składowej stałej b parametru obiektu, ani też - w sposób jawny - od kroku n , w którym przeprowadzana była identyfikacja. Wartość wskaźnika Q zależy natomiast od konkretnych realizacji wielkości wejściowej. Rozważmy więc dalej dwa przypadki szczególnie:

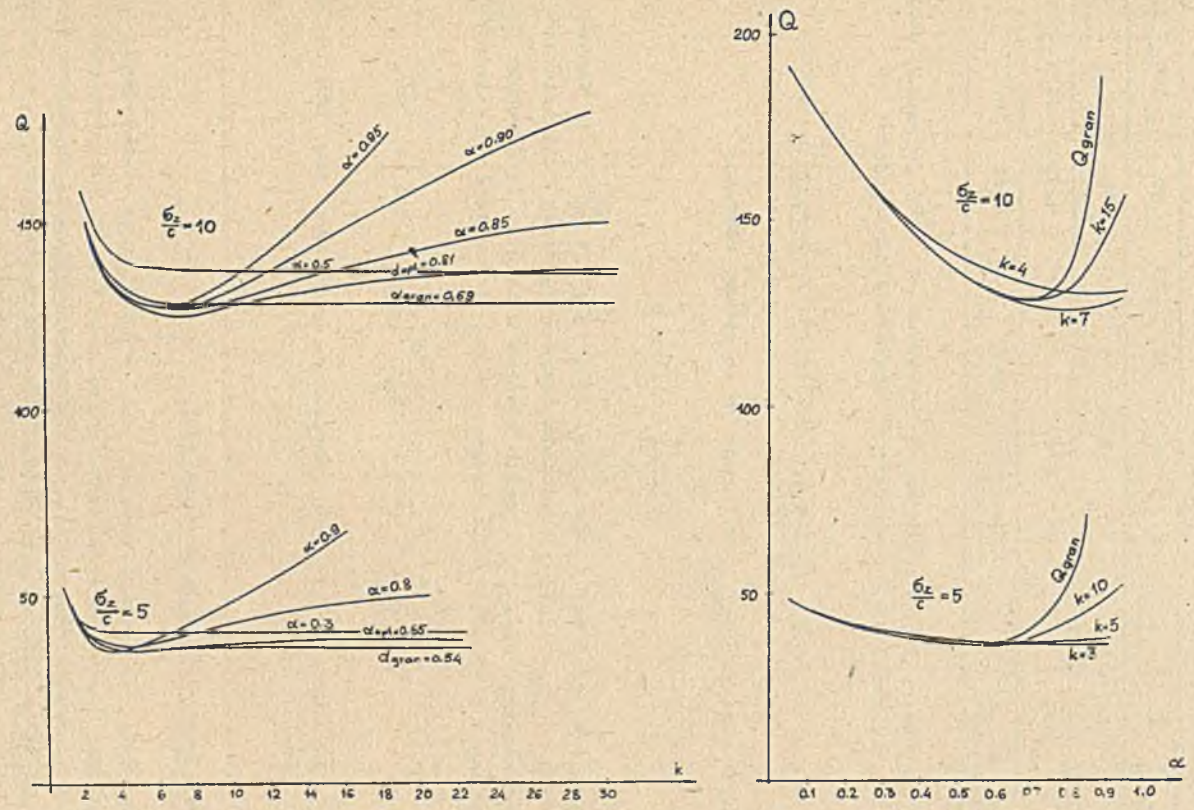
a) Wielkość wejściowa o wartości stałej

Przyjmując $x_i = \text{const} = x_0$ otrzymamy:

$$Q = x_0^2 \left[\sigma^2 \cdot \left(\frac{k\alpha^{k+1} - (k+1)\alpha^{k+1}}{(1-\alpha)(1-\alpha^k)} \right)^2 + \sigma_z^2 \left(1 + \frac{(1+\alpha^k)(1-\alpha)}{(1-\alpha^k)(1+\alpha)} \right) \right] \quad (15)$$

Przebieg zależności wskaźnika Q od poszczególnych wielkości występujących w równaniu (15) ilustrują rys. 1a, 1b.

Analiza tych rysunków pokazuje, że celowe jest poszukiwanie takich wartości optymalnych k oraz α , które minimalizują, przy danych σ_z i c , wartość wskaźnika Q . Przykłady wartości k_{opt} , α_{opt} przedstawia tablica 1.



Rys. 1. Wykresy zależności wskaźnika Q od: a) liczby pomiarów k , b) współczynnika wagi α . Dla wszystkich wykresów przyjęto $x_0 = 1$

Tablica 1

Optymalne wartości liczby pomiarów oraz współczynnika wagi

σ_z/σ	2	5	10	20	30	40	50	100	1000
k_{opt}	2	5	7	12	15	19	22	35	172
α_{opt}	0.5	0.65	0.81	0.87	0.90	0.92	0.93	0.95	0.99
α_{gran}	0.26	0.54	0.69	0.80	0.84	0.87	0.88	0.93	0.98

Przy wzroście liczby pomiarów k wskaźnik Q dąży do pewnej wartości granicznej zależnej od α . Wartość tę obliczymy następująco:

$$Q_{gran} = \lim_{k \rightarrow \infty} Q = x_0^2 \left\{ \sigma^2 \left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^2 + \sigma_z^2 \frac{2}{(1+\alpha)} \right\} \quad (16)$$

Poszukując minimum Q_{gran} w funkcji α otrzymamy równanie

$$\frac{(1+\alpha)^2}{(1-\alpha)^3} - \frac{\sigma_z^2}{\sigma^2} = 0, \quad (17)$$

które posiada jedno rozwiązanie dla $0 < \alpha < 1$, o ile $\frac{\sigma_z^2}{\sigma^2} > 1$. Wartość α , dla której Q_{gran} przyjmuje minimum nazywać będziemy "α graniczne" (α_{gran}). Przykładowe wartości α_{gran} podano również w tabeli 1. Zauważmy jeszcze, że rozważenie przypadku granicznego przy $\alpha \rightarrow 1$ prowadzi do zależności

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} Q = x_0^2 \left\{ \sigma^2 \left(\frac{k+1}{2} \right)^2 + \sigma_z^2 \cdot \frac{k+1}{k} \right\} \quad (18)$$

znanej z literatury [3,5] jako rozwiązanie przypadku, tzw. modeli rucho-myh.

b) Wielkość wejściowa zmienna losowo

Przyjmijmy, że sygnał wejściowy x_1 stanowi ciąg niezależnych realizacji zmiennej losowej o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$. Dla wyznaczenia wska-zanych w równaniu (14) wartości oczekiwanych wykorzystamy metodę przybli-żoną, opartą na linearyzacji funkcji zmiennych losowych [2]. Zakładając mianowicie, że dla funkcji n argumentów losowych

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (19)$$

znane są wartości oczekiwane i wariancje jej argumentów

$$E(X_1) = m_1, \quad V(X_1) = \sigma_1^2, \quad i = 1, \dots, n \quad (20)$$

możemy funkcję (19) rozwinąć w szereg Taylora w otoczeniu punktu $M(m_1, m_2, \dots, m_n)$. Ograniczając się do liniowych wyrazów rozwinięcia wyznaczmy wartość oczekiwaną i wariancję funkcji (19) według następujących przybliżonych zależności

$$E[f(X_1, \dots, X_n)] \cong f[E(X_1), \dots, E(X_n)] = f(m_1, \dots, m_n) \quad (21)$$

$$V[f(X_1, \dots, X_n)] \cong \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_M^2 V(X_i). \quad (22)$$

Zastosowanie zależności (21, 22) pozwoliło na wyznaczenie wartości wskaźnika Q w następującej postaci:

$$Q = \left\{ \sigma^2 \left[\left(\frac{w_1}{w} \right)^2 + \left(\frac{w_2}{w^2} - \frac{2w_3 w_1}{w^3} + \frac{w_4 w_1^2}{w^4} \right) B \right] + \sigma_z^2 \left[1 + \frac{w_4}{w^2} + \left(\frac{w_4^2}{w^4} + \frac{w_4}{w^2} - \frac{2w_5}{w^3} \right) B \right] \right\} (m^2 + \sigma^2), \quad (23)$$

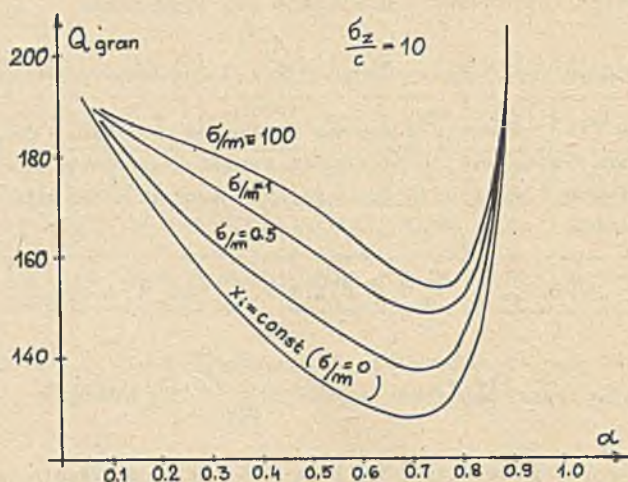
gdzie:

$$w = \sum_{i=1}^k \alpha^{i-1}, \quad w_1 = \sum_{i=1}^k i \alpha^{i-1}, \quad w_2 = \sum_{i=1}^k i^2 \alpha^{2(i-1)},$$

$$w_3 = \sum_{i=1}^k i \alpha^{2(i-1)}, \quad w_4 = \sum_{i=1}^k \alpha^{2(i-1)}, \quad w_5 = \sum_{i=1}^k \alpha^{3(i-1)}$$

$$B = 2 \left\{ 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma^2}{m^2} \right)^2} \right\}.$$

Ilustracją uzyskanych rozwiązań jest rys. 2 pokazujący dla wybranego przypadku granicznego, że zmienność sygnału wejściowego powoduje tylko niewielkie powiększenie wartości α_{gran} .



Rys. 2. Wykres zależności wskaźnika Q od współczynnika wagi α dla losowo zmiennej wielkości wejściowej

3. Własności modeli wielowymiarowych

Rozpatrywać będziemy postać wskaźnika (7) w przypadku modelu wielowymiarowego (5).

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
 \underline{y} &= \begin{bmatrix} y_{n-k+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_{n-k+1}^T (\underline{b} + (n-k+1)\underline{c} + \underline{z}_{n-k+1}) \\ \vdots \\ \underline{x}_n^T (\underline{b} + n\underline{c} + \underline{z}_n) \end{bmatrix} = \\
 &= \underline{X}\underline{b} + \begin{bmatrix} n+1 & & 0 \\ & n+1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & n+1 \end{bmatrix} \underline{X}\underline{c} - \begin{bmatrix} k & & 0 \\ & k-1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \underline{X}\underline{c} + \begin{bmatrix} \underline{x}_{n-k+1}^T \underline{z}_{n-k+1} \\ \vdots \\ \underline{x}_n^T \underline{z}_n \end{bmatrix} = \\
 &= \underline{X}\underline{b} + (n+1)\underline{X}\underline{c} - \underline{D}\underline{X}\underline{c} + \underline{e}. \tag{24}
 \end{aligned}$$

Stąd:

$$\underline{a}_n^M = (\underline{X}_n^T \underline{W} \underline{X}_n)^{-1} \underline{X}_n^T \underline{W} \underline{y} = \underline{b} + (n+1)\underline{c} - (\underline{X}_n^T \underline{W} \underline{X}_n)^{-1} \underline{X}_n^T \underline{W} (-\underline{D} \underline{X} \underline{c} + \underline{e}). \quad (25)$$

Wprowadzając powyższe wyrażenie do (8) oraz (7) otrzymamy:

$$Q = E \left\{ (y_{n+1} - y_{n+1}^M)^2 \right\} = E \left\{ \left[\underline{z}_{n+1}^T \left[(\underline{X}_n^T \underline{W} \underline{X}_n)^{-1} \underline{X}_n^T \underline{W} \underline{D} \underline{X} \underline{c} + \underline{z}_{n+1} + (\underline{X}_n^T \underline{W} \underline{X}_n)^{-1} \underline{X}_n^T \underline{W} \underline{e} \right]^2 \right\} \quad (26)$$

Zauważmy, że wartość wskaźnika Q nie zależy w sposób jawny od chwili czasu n , w której dokonano identyfikacji.

Wykorzystując założenia o własnościach zakłóceń możemy przekształcić wskaźnik Q do postaci:

$$Q = E \left\{ \left[\underline{z}_{n+1}^T \left[(\underline{X}_n^T \underline{W} \underline{X}_n)^{-1} \underline{X}_n^T \underline{W} \underline{D} \underline{X} \underline{c} \right]^2 \right\} + E \left\{ (\underline{z}_{n+1}^T \underline{z}_{n+1})^2 \right\} + \sum_{i=n-k+1}^n \sum_{j=1}^p \sigma_{zj}^2 E \left\{ \left[\underline{x}_{n+1}^{n-i} \underline{x}_{j1}^T (\underline{X}_n^T \underline{W} \underline{X}_n)^{-1} \underline{z}_{n+1} \right]^2 \right\} = Q_0 + Q_z' + Q_z'' \quad (27)$$

Do dalszych rozważań przyjmijemy założenie, że wektor wielkości wejściowych jest realizacją zmiennej losowej o własnościach

$$E(x_{ji}) = m_j, \quad V(x_{ji}) = \sigma_j^2, \quad i = n-k+1, \dots, n \\ j = 1, \dots, p. \quad (28)$$

Wskazane w równaniu (27) wartości oczekiwane wyznaczamy wykorzystując przedstawioną uprzednio metodę uproszczoną.

Otrzymamy wtedy:

$$Q_0 \cong \left\{ E(\underline{z}_{n+1}^T) \left[E(\underline{X}_n^T \underline{W} \underline{X}_n) \right]^{-1} \cdot E(\underline{X}_n^T \underline{W} \underline{D} \underline{X}) \cdot \underline{c} \right\}^2. \quad (29)$$

Zauważmy, że

$$\underline{X}_n^T \underline{W} \underline{X}_n = \sum_{i=1}^k \underline{x}_{n+1-i} \underline{x}_{n+1-i}^T \alpha^{i-1}, \quad (30)$$

oraz

$$\underline{X}_n^T \underline{W} \underline{D} \underline{X} = \sum_{i=1}^k i \underline{x}_{n+1-i} \underline{x}_{n+1-i}^T \alpha^{i-1}.$$

Oznaczmy

$$\underline{V} = E(\underline{x}_i \underline{x}_i^T)$$

Z uwagi na własność (28) wartości elementów macierzy \underline{V} nie zależą od i . Mamy wobec tego

$$E(\underline{X}^T \underline{W} \underline{X}) = \underline{V} \cdot \sum_{i=1}^k \alpha^{i-1} \quad (31)$$

$$E(\underline{X}^T \underline{W} \underline{D} \underline{X}) = \underline{V} \cdot \sum_{i=1}^k i \alpha^{i-1} \quad (32)$$

Stąd:

$$Q_0 \cong \left(\frac{\sum_{i=1}^k i \alpha^{i-1}}{\sum_{i=1}^k \alpha^{i-1}} \right)^2 \left(\sum_{j=1}^p m_j \sigma_j \right)^2. \quad (33)$$

Wartość drugiego składnika wyrażenia (27) otrzymamy po prostych przekształceniach

$$Q_z' = \sum_{j=1}^p (m_j^2 + \sigma_j^2) \sigma_{z_j}^2. \quad (34)$$

Dla ostatniego składnika otrzymamy

$$Q_z'' = \sum_{i=n-k+1}^n \sum_{j=1}^p \sigma_{z_j}^2 \left\{ E(\underline{x}_{ji} \underline{x}_{i-1}^T \alpha^{n-1}) [E(\underline{X}^T \underline{W} \underline{X})]^{-1} E(\underline{x}_{n+1}) \right\}^2 \quad (35)$$

Zauważmy, że

$$E(\underline{x}_{ji} \underline{x}_{i-1}^T) \cdot \underline{V}^{-1} = [w_1, w_2, \dots, w_1 \dots w_p] \quad (36)$$

$$\text{gdzie:} \quad w_1 = \delta_{j1}; \quad \begin{array}{l} l = 1, \dots, p \\ j = 1, \dots, p \end{array} \quad (37)$$

Mamy wobec tego

$$Q_z \approx \frac{\sum_{i=1}^k \alpha^{2(i-1)}}{\left(\sum_{i=1}^k \alpha^{i-1}\right)^2} \sum_{j=1}^p \sigma_{zj}^2 \cdot m_j^2 \quad (38)$$

Ostatecznie:

$$Q \approx \left(\frac{k\alpha^{k+1} - (k+1)\alpha^{k+1}}{(1-\alpha)(1-\alpha^k)} \right)^2 \left(\sum_{j=1}^p m_j \sigma_j \right)^2 + \\ + \sum_{j=1}^p (m_j^2 + \sigma_j^2) \sigma_{zj}^2 + \frac{(1+\alpha^k)(1-\alpha)}{(1-\alpha^k)(1+\alpha)} \sum_{j=1}^p \sigma_{zj}^2 m_j^2 \quad (39)$$

Zauważmy, że przyjmując wielkości zastępcze

$$\sigma_{zast} = \sum_{j=1}^p m_j \sigma_j, \quad \sigma_z^2 \text{ zast} = \sum_{j=1}^p \sigma_{zj}^2 m_j^2 \quad (40)$$

możemy przekształcić wyrażenie (39) do postaci różniącej się od równania (15) tylko składnikiem $\sum_{j=1}^p \sigma_j^2 \sigma_{zj}^2$. Tak więc słuszną pozostanie w tym przypadku analiza zależności wskaźnika Q od k oraz α , zilustrowana rysunkami 1a, 1b. Podobnie zamieszczone w tabeli 1 wartości k_{opt} , α_{opt} , α_{gran} odpowiadają analogicznym wartościom ilorazu $\sigma_z \text{ zast} / \sigma_{zast}$. Oczywiście dołączyć należy teraz dodatkowy warunek, aby $k_{opt} > p$. W przeciwnym wypadku należy przyjąć $k_{opt} = p$ i wyznaczyć nową wartość α_{opt} .

Podkreślimy jeszcze, że po obliczeniu granicznej wartości

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} Q = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 \left(\sum_{j=1}^p m_j \sigma_j\right)^2 + \sum_{j=1}^p (m_j^2 + \sigma_j^2) \sigma_{zj}^2 + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^p m_j^2 \sigma_{zj}^2 \quad (41)$$

łatwo rozwiązać można zadanie optymalizacji samej tylko liczby pomiarów dla wspomnianej metody modeli ruchomych w przypadku wielowymiarowym.

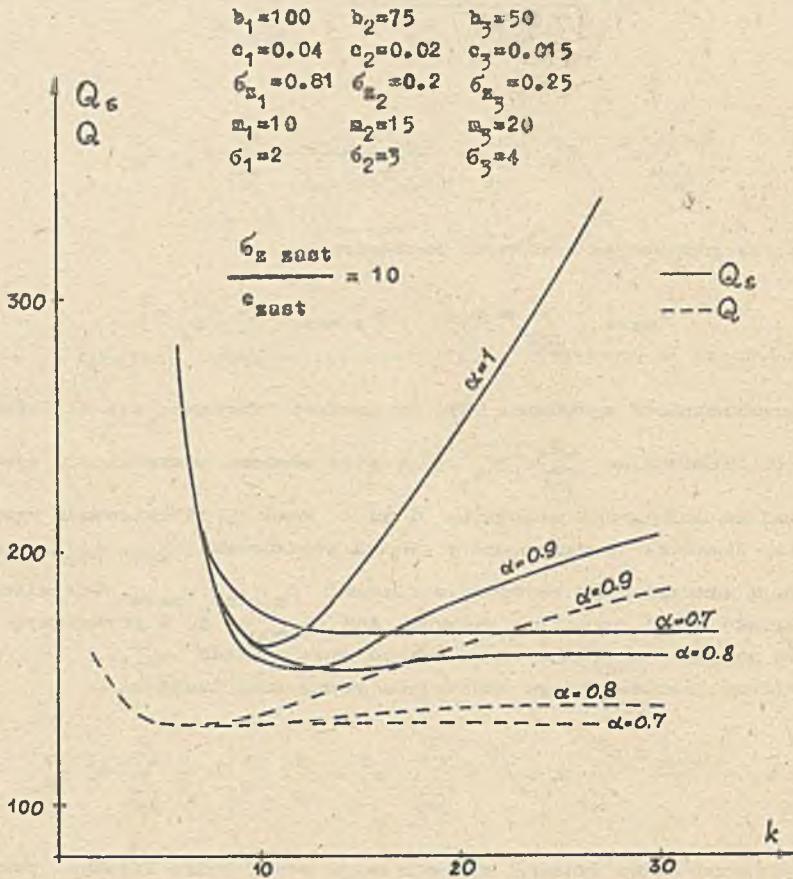
Dla porównania zgodności przedstawionych rozwiązań z danymi eksperymentalnymi przeprowadzono identyfikację - przy wykorzystaniu przedstawionej metody - obiektów symulowanych numerycznie. Symulacji dokonano w oparciu o równanie (1), przy czym wielkości \underline{x}_1 oraz \underline{z}_1 uzyskano z generatorów

liczb pseudoprzypadkowych o rozkładzie normalnym. Wynikiem badań była wartość wskaźnika

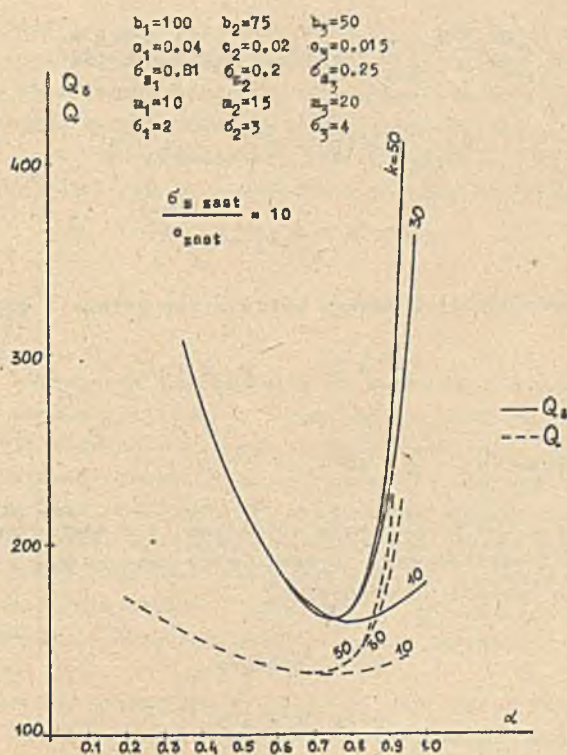
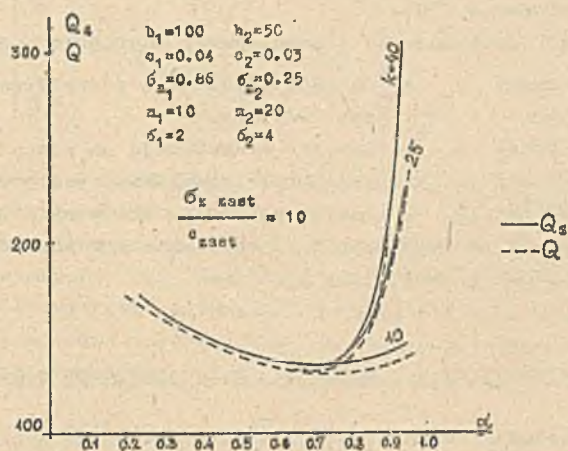
$$Q_s = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^H (y_{n+1}^j - y_{n+1}^{Mj})^2, \quad (42)$$

gdzie:

N - ilość uśrednień,



Rys. 3a. Porównanie eksperymentalnych i teoretycznych wykresów wskaźnika Q w funkcji liczby pomiarów k i współczynnika wagi α . Parametry modelowanych dwu- i trójwymiarowych obiektów podano na rysunkach.



Rys. 3b. Porównanie eksperymentalnych i teoretycznych wykresów wskaźnika Q w funkcji liczby pomiarów k i współczynnika wagi α . Parametry modelowanych dwu- i trójwymiarowych obiektów podano na rysunkach

Przykłady otrzymanych z badań numerycznych wykresów wskaźnika Q_s zestawiono na rys. 3 z wykresami zależności teoretycznych uzyskanymi na drodze tabelaryzacji wyrażenia (39).

Wyniki obliczeń pozwalają na sformułowanie następujących wniosków:

- wartości wskaźnika Q_s są na ogół większe od przewidywanych, chociaż kształt krzywych Q i Q_s jest zbliżony.
- przebiegi wskaźnika Q_s w funkcji k wskazują na pewne powiększenie optymalnej wartości k w stosunku do przewidywań teoretycznych.
- przebiegi wskaźnika Q_s w funkcji współczynnika wagi α pozwalają stwierdzić dużą zgodność przewidywanych teoretycznie i wyznaczonych eksperymentalnie optymalnych wartości α .

4. Dobór współczynnika wagi w przypadku rekurencyjnego algorytmu MNWSK

Zadanie wyznaczania współczynników modelu metodą NWSK posiada, obok rozwiązania klasycznego jednokrokowego (6), znane rozwiązanie rekurencyjne dane układem równań¹⁾

$$\underline{a}_{-n+1}^M = \underline{a}_{-n}^M + \gamma_{-n}^T \underline{P}_{-n} \underline{x}_{-n+1} (y_{-n+1} - \underline{x}_{-n+1}^T \underline{a}_{-n}^M)$$

$$\underline{P}_{-n+1} = \frac{1}{\alpha} (\underline{P}_{-n} - \underline{P}_{-n} \underline{x}_{-n+1} \gamma_{-n}^T \underline{x}_{-n+1}^T \underline{P}_{-n}) \quad (43)$$

$$\gamma_{-n}^T = (\alpha + \underline{x}_{-n+1}^T \underline{P}_{-n} \underline{x}_{-n+1})^{-1}$$

Warunki początkowe dla tych równań wybiera się zwykle w postaci

$$\underline{a}_0^M = \underline{0}, \quad \underline{P}_0 = \underline{1} \cdot \beta,$$

gdzie:

β - duża liczba (np.: $\beta = 10^6$).

Dla wskazania drogi wyznaczenia optymalnej - w zdefiniowanym poprzednio sensie - wartości współczynnika α rozpatrzmy następujące równania wyjściowe prowadzące do postaci rekurencyjnej

$$\begin{aligned} \underline{a}_{-n}^M &= \underline{P}_{-n} \underline{x}_{-n}^T \underline{W} \underline{y} \\ \underline{P}_{-n} &= (\underline{x}_{-n}^T \underline{W} \underline{x}_{-n})^{-1}, \end{aligned} \quad (44)$$

¹⁾ Znane są również inne warianty równań (43) uzyskane dla inaczej zdefiniowanych współczynników wagowych (np. [4]). Metoda rozwiązania takich przypadków byłaby identyczna do przedstawionej.

przy czym z założenia $\det(\underline{X}_n^T \underline{W}_n \underline{X}_n) \neq 0$,

$$\underline{X}_n = \begin{bmatrix} \underline{x}_1^T \\ \vdots \\ \underline{x}_n^T \end{bmatrix} \quad \underline{y}_n = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \underline{W}_n = \begin{bmatrix} \alpha^{n-1} & & & 0 \\ & \alpha^{n-2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Zauważmy, że równanie określające współczynniki modelu w postaci (44) różni się od rozpatrywanego poprzednio wariantu (6) jedynie liczbą wykorzystywanych pomiarów. Powtarzając analizę wskaźnika Q według punktu 3 otrzymamy więc zależność (39), przy czym $k=n$. Ze względu na wskazaną poprzednio własność szybkiego ustalania się wartości wskaźnika Q przy zwiększeniu liczby pomiarów, interesującą dla algorytmu rekurencyjnego jest tylko wartość graniczna

$$Q_{\text{gran}} = \lim_{n \rightarrow \infty} Q = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^2 \left(\sum_{j=1}^p m_j^2 \sigma_j^2\right)^2 + \sum_{j=1}^p (m_j^2 + \sigma_j^2) \sigma_{z_j}^2 + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \cdot \sum_{j=1}^p m_j^2 \sigma_{z_j}^2 \quad (46)$$

Przykładowe wartości α_{gran} , dla których Q_{gran} przyjmuje minimum przedstawia tabela 1 (dla zastępczych wielkości σ_{zast} , $\sigma_{z \text{ zast}}$).

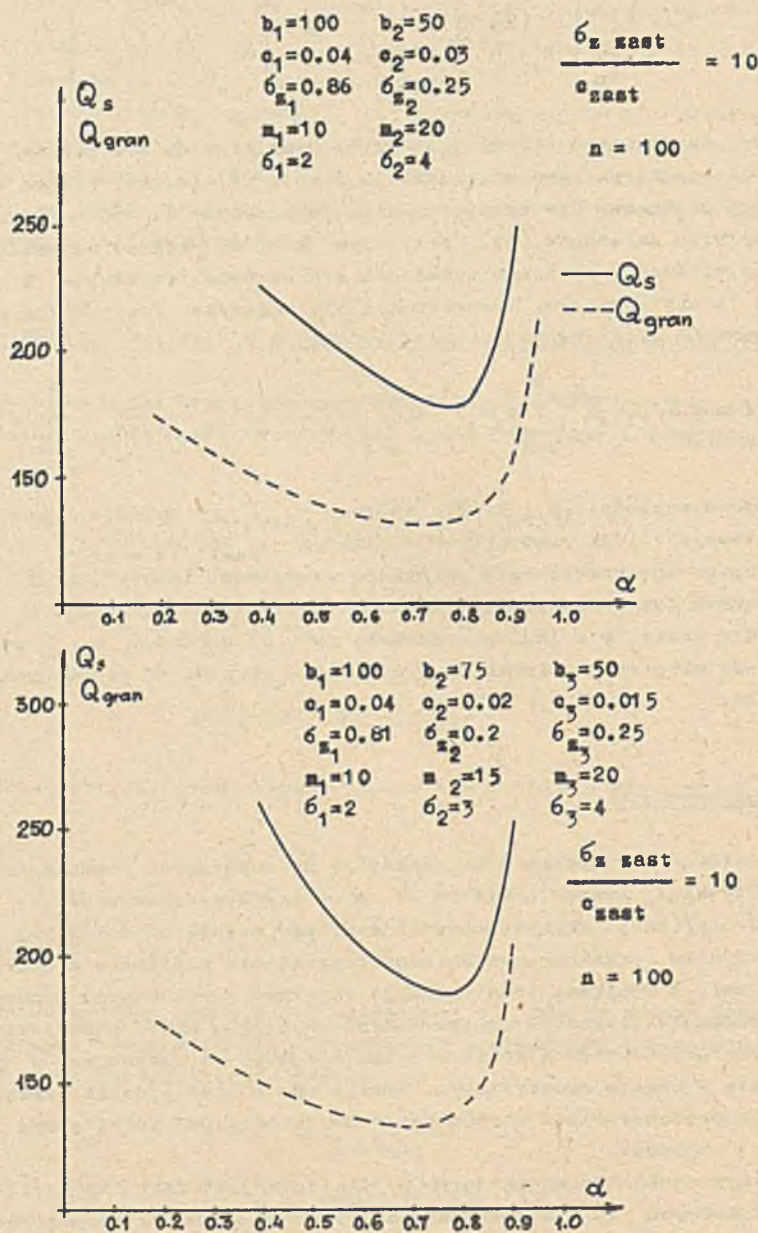
Zaproponowane rozwiązanie porównano z wynikami identyfikacji obiektów symulowanych numerycznie. Przykładowe wykresy wskaźników Q i Q_n w funkcji α (dla kroku $n = 100$) przedstawia rys. 4. Wartości α_{gran} wyznaczone z wykresów eksperymentalnych są nieznacznie większe od przewidywanych teoretycznie.

5. Podsumowanie

Przedstawione rozważania doprowadziły do zależności pozwalających na wybór optymalnej liczby pomiarów k oraz współczynnika wagi α , w przypadku identyfikacji obiektu niestacjonarnego metodą najmniejszej ważonej sumy kwadratów. Uzyskane przybliżone rozwiązania porównano z pozytywnymi rezultatami, z wynikami identyfikacji obiektów symulowanych numerycznie.

Podsumowując własności analizowanych wariantów MNWSK podkreślić należy szczególną przydatność algorytmu rekurencyjnego do zastosowań w systemach sterowania w czasie rzeczywistym. Wynika ona z oszczędności pamięci wymaganej dla przechowywania danych pomiarowych oraz prostoty, a tym samym szybkości obliczeń.

Istotnym problemem wymagającym wyjaśnienia jest fakt, że możliwość doboru optymalnych k i α uzależniona jest od znajomości parametrów charakteryzujących niestacjonarność obiektu (σ) i zakłócenia losowe (σ_z). Ocena tych parametrów jest możliwa, lecz wymaga zastosowania bardziej złożo-



Rys. 4. Porównanie eksperymentalnych i teoretycznych wykresów wskaźnika Q dla algorytmu rekurencyjnego. Wykresy wykonano dla kroku $n = 100$

nych metod identyfikacji, np. tzw. modeli niestacjonarnych [1,3] lub modeli ruchomych z predykcją [3]. Porównanie efektywności identyfikacji wymienionymi metodami [3] z MNWSK nie uzasadnia na ogół stosowania tak złożonych metod do bieżącej identyfikacji w systemach czasu rzeczywistego. Celem jest natomiast ich okresowe wykorzystanie do aktualizacji optymalnych wartości k oraz α .

LITERATURA

- [1] Bubnioki Z.: Identyfikacja obiektów sterowania. PWN, Warszawa 1974.
- [2] Fisz M.: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa 1967.
- [3] Kozielski S.: Identyfikacja procesów niestacjonarnych w systemach czasu rzeczywistego, Praca doktorska, Gliwice 1977.
- [4] Krebs V., Thöm H.: Parameter - Identifizierung nach der Methode der Kleinsten Quadrate - ein Überblick, Regelungstechnik und Prozess - Datenverarbeitung, No 1, 1974.
- [5] Węgrzyn S.: Podstawy automatyki. PWN, Warszawa 1974.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОБЪЕКТОВ С ПОМОЩЬЮ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Р е з ю м е

В работе рассмотрено проблему выбора оптимальной длины серии измерений и коэффициента веса в случае идентификации нестационарных объектов с помощью регрессионного анализа с экспоненциальной весовой функцией.

Отдельно представлено проблему выбора коэффициента веса в рекуррентном алгоритме этого метода идентификации.

Полученные решения сравнено с результатами цифрового моделирования.

THE IDENTIFICATION OF NON-STATIONARY PLANTS BY THE WEIGHTED LEAST - SQUARES METHOD

S u m m a r y

The paper concerns the problem of finding of the optimal length of the measurement series and the weight coefficient in the case of the identification of non-stationary plant by using the method of weighted least-squares.

The problem of finding the weight coefficient for the recursive algorithm of this method is presented separately.

The theoretical results are compared with the results of the numerical simulation.