ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria: AUTOMATYKA z. 56 Nr kol. 652

Michał Latarnik
Politechnika Śląska

OPTYMALNE STEROWANIE DYSTRYBUCYJNE W UKŁADACH NAPĘDOWYCH ROBOTA

Streszczenie. W artykule przedstawiono oryginalną metodę opisu nibyciągłych układów napędowych robota wykorzystującą zaproponowaną w pracy [2] dystrybucję wibracyjną. Sformułowano i rozwiązano problem syntezy dystrybucyjnego sterowania optymalnego układem napędowym robota.

1. Wstęp

Szybkość działanie i precyzyjne odtwarzanie pożądanej trajektorii ruchu należą do podstawowych wymagań stawianych robotom przemysłowym. Osiągnięcie dużych prędkości działania przy równoczesnym precyzyjnym ruchu transportowanego elementu wymaga pełnej znajomości obiektu robot - element transportowany. Rozpatrywana w referacie koncepcja wibracyjnego (nibyciągłego) typu sterowania wskazuje na możliwości spełnienia wymienionych wymagań również w przypadku niepełnej informacji o obiekcie. Analiza i synteza takich układów sterowania wibracyjnego jest jednak utrudniona ze względu na konieczność opisu pewnych granicznych zachowań układu przy częstotliwości przełączeń zmierzającej do nieskończoności. Wydaje się, że zaproponowana w niniejszym artykule oryginalna metoda opisu za pomocą dystrybucji wibracyjnej jest skutecznym narzędziem w analizie i syntezie układów wibracyjnych.

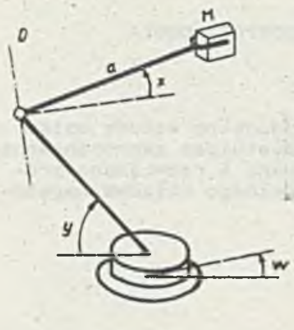
2. Sformułowanie problemu

Rozpatrzmy zagadnienie sterowania w układzie napędowym robota (rys.1). Celem uproszczenia zapisu załóżmy, że interesuje nas tutaj jedynie obrót masy M względem osi O przy stałych kątach $y = \text{const}$ oraz $w = \text{const}$. Wszystkie przeprowadzone tu rozważania w łatwy sposób można rozszerzyć na przypadek złożonych ruchów robotów.

Niechaj równanie interesującego nas ruchu ramienia "c" obciążonego masą M przyjmuje postać:

$$\ddot{x} = \eta(x, \dot{x}, u, t) \qquad /1/$$

gdzie $g(x, \dot{x}, u, t)$ - nieznana funkcja klasy C^1 ze względu na x oraz $\dot{x}$, ciągła ze względu na u oraz t, $u(t)$ - sygnał sterujący elementu napędowego przewidzianego do ustawiania kąta x (np. napięcie silnika prądu stałego).



Rys. 1. Schemat robota

Nieznajomość funkcji $g(x, \dot{x}, u, t)$ może być wynikiem na przykład braku informacji o masie M. Zakładamy, że nieznana funkcja $g(x, \dot{x}, u, t)$ może być jednak ograniczona od dołu i od góry przez znane funkcje ciągłe $G_1(x, \dot{x}, t)$ oraz $G_2(x, \dot{x}, t)$ takie, że:

$$\min_{u \subset B} g(x, \dot{x}, u, t) \leqslant G_1(x, x, t) \qquad /2/$$

$$\max_{u \subset B} g(x, x, u, t) \geqslant G_2(x, x, t) \qquad /3/$$

gdzie B - baza, zbiór dopuszczalnych wartości u.

Zbiór obiektów g opisywanych zależnością /1/ i spełniających ograniczenia /2/ i /3/ oznaczać będziemy przez G. Baza B utworzona jest przez zbiór m funkcji ciągłych $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)$ określonych w przedziale sterowania $t \subset [0, T]$. Zapis $u \subset B$ oznacza zatem, że:

$$u(t) = \{u_1(t) \vee u_2(t) \vee \ldots \vee u_m(t)\} \qquad /4/$$

dla $t \subset [0, T]$.

Ograniczenie /4/ wskazuje, że sterowanie polegać będzie na próbkowaniu sygnałów bazowych $u_i(t)$. Dla przykładu, jeśli źródłem energii wykorzystywanej w sterowaniu jest typowa sieć prądu zmiennego, to bazy mogą stanowić wprost napięcia fazowe i zero (potencjał odniesienia). Stały rozwój elementów półprzewodnikowych zabezpiecza coraz łatwiejszą praktyczną realizację sterowania opartego na próbkowaniu napięć bazowych. Taki sposób generowania sygnału sterującego może odbywać się praktycznie bez strat na "formowanie" sygnału sterującego z napięć bazowych.

W niniejszym artykule rozpatrywany jest problem sterowania czasowo-optymalnego. Konkretnie poszukiwać będziemy jednej, optymalnej trajektorii dla wszystkich obiektów $g \subset G$. Wymagamy, aby sterowanie u przeprowadzało nieznany w pełni obiekt /1/ z zadanego stanu początkowego $[x(0), \dot{x}(0)]$ do zadanego stanu końcowego $[x(T), \dot{x}(T)]$, zapewniając równocześnie uzyskanie czasu sterowania T_o równego:

$$T_o = \max_{g \subset G} \min_{u \subset B} T \qquad /5/$$

Innymi słowy poszukiwana jest taka trajektoria czaso-optymalna, która osiągalna jest dla wszystkich obiektów należących do zbioru G. Można się spodziewać, że w wielu przypadkach trajektoria optymalna będzie odpowiadała nieskończenie krótkim próbkowaniom poszczególnych funkcji bazowych u_i. Opisywanie takiego granicznego zachowania się układu, odpowiadającego nieskończenie dużej częstotliwości przełączeń jest niezwykle uciążliwe i niejednoznaczne w klasie funkcji. Z tego powodu wprowadza się do opisu tych granicznych zachowań tzw. dystrybucję wibracyjną [2]. Podobnie jak powszechnie stosowana dystrybucja "delta Diraca", również zaproponowana tutaj dystrybucja wibracyjna jest tylko modelem pewnego przypadku granicznego, pozwalającym wprowadzić prosty i jednoznaczny opis oraz umożliwiający uproszczenie obliczeń.

3. Dystrybucja wibracyjna [2]

Pojęcie dystrybucji wibracyjnej wprowadza się w oparciu o podejście ciągowe zaproponowane przez Prof. J. Mikusińskiego [1]. Jednakże specyfika przyjętego sposobu generacji sterowania u polegającego na próbkowaniu bazy B skłania do pewnej modyfikacji definicji dystrybucji podanej w [1]. Zaproponowana tu modyfikacja polega na zastąpieniu ciągów podstawowych opartych na funkcjach ciągłych ciągami bazowymi opartymi na funkcjach przedziałami ciągłych. Zakładamy, że funkcje $f_j(t)$, $j = 1,2,...$ tworzące ciągi bazowe:

(a) są prawostronnie ciągłe $(f_j(t) = f_j(t+))$ w punktach nieciągłości,
(b) przyjmują tylko wartości określone przez funkcje bazy B $(f_j(t) = u_i(t))$.

3.1. Definicja ciągu bazowe

Ciąg $f_j(t)$ funkcji przedziałami ciągłych, określonych w przedziale $0 \leqslant t \leqslant T$ i posiadających właściwości (a), (b) nazywa się bazowym, jeśli istnieje taki ciąg funkcji $F_j(t)$ oraz taka liczba całkowita $k \geqslant 0$, że
(c) $F_j^{(k)}(t+) = f_j(t)$,
(d) ciąg $F_j(t)$ jest zbieżny jednostajnie,
gdzie $F_j^{(k)}(t+)$ oznacza k-tą pochodną prawostronną funkcji $F_j(t)$ w punkcie t.

3.2. Definicja równoważności ciągów bazowych

Dwa ciągi bazowe $f_j(t)$ oraz $h_j(t)$ będziemy nazywać równoważnymi, jeśli istnieją takie ciągi $F_{j,q}(t)$ i $H_{j,q}(t)$ oraz liczba całkowita $k \geqslant 0$, że dla dowolnej funkcji ciągłej $q[s]$:

(e) $F^{(k)}_{j,q}(t+)=q\left[f_j(t)\right]$ oraz $H^{(k)}_{j,q}(t+)=q\left[h_j(t)\right]$,

(f) ciągi $|F_{j,q}(t)$ oraz $|H_{j,q}(t)$ zbieżne są jednostajnie do tej samej funkcji zależnej od funkcji q.

Można udowodnić, że podana tu definicja równoważności ciągów bazowych zapewnia rozkład zbioru wszystkich ciągów bazowych na klasy równoważności bez wspólnych elementów.

3.3. Definicja dystrybucji wibracyjnej

Dystrybucją wibracyjną będziemy nazywać klasę równoważnych ciągów bazowych $f_j(t)$ określonych w przedziale $0 < t < T$ i posiadających dwie właściwości:

(g) istnieje ciąg funkcji $F_j(t)$ taki, że $F^{(1)}_j(t+) = f_j(t)$,

(h) ciąg $F_j(t)$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $F(t)$ określonej następująco:

$$F(t) = \int_0^t \left[p_1(s).u_1(s) + \ldots + p_m(s).u_m(s)\right] ds + C \qquad /6/$$

gdzie C - stała; $p_1(s),\ldots,p_m(s)$ - funkcje wagowe, funkcje przedziałami ciągłe posiadające co najwyżej nieciągłości pierwszego rodzaju oraz dodatkowo spełniające ograniczenia:

$$p_i \geqslant 0,\ i = 1,2,\ldots,m; \qquad p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1 \qquad /7/$$

3.4. Właściwość dystrybucji wibracyjnej

W tym punkcie zostanie przedstawiona tylko jedna, najistotniejsza właściwość dystrybucji wibracyjnej. Właściwość ta dotyczy jednoznaczności określenia, w klasie dystrybucji wibracyjnych, odpowiedzi statycznego elementu nieliniowego na pobudzenie sygnałem wejściowym o postaci dystrybucji wibracyjnej.

Niech sygnał wejściowy $u(t)$ będzie dystrybucją wibracyjną określoną przez funkcje wagowe $p_1,\ldots,p_m$ przy zadanej bazie $B = \left[u_1,\ldots,u_m\right]$. Element nieliniowy natomiast niech będzie opisany zależnością:

$$y = r(t,u) \qquad /8/$$

gdzie $r(t,u)$ ciągła funkcja swoich argumentów.
Można zauważyć, że sygnał wyjściowy y jest również dystrybucją wibracyjną określoną jednoznacznie na bazie $B_y = \left[r(t,u_1),\ldots,r(t,u_m)\right]$ przez funkcje wagowe $p_{yi}(s)$, równe odpowiednim funkcjom wagowym sygnału wejściowego:

$$p_{yi}(s) = p_i(s) \qquad /9/$$

4. Sterowanie optymalne w klasie dystrybucji wibracyjnych

Niech sygnał sterujący u rozpatrywanych obiektów /1/ będzie dystrybucją wibracyjną określoną na bazie $B = [u_1,\ldots,u_m]$ przez funkcje wagowe $p_1,\ldots,p_m$. W oparciu o właściwości przedstawione w p. 3.4 można stwierdzić, że sygnał $\ddot{x}$ jest dystrybucją wibracyjną określoną na bazie $B_g = [g(x,\dot{x},u_1,t),\ldots,g(x,\dot{x},u_m,t)]$ i posiadającą te same funkcje wagowe $p_1,\ldots,p_m$ co sygnał sterujący u. Zgodnie z definicją dystrybucji wibracyjnej (p. 3.3) mamy:

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(0) + \int_0^t \left[p_1\, g(x,\dot{x},u_1,t) + \ldots + p_m\, g(x,\dot{x},u_m,t)\right] dt \qquad /10/$$

Z drugiej strony można pokazać, że przynależność obiektu g do zbioru G daje się w sposób równoważny wyrazić przez następujące warunki narzucone na funkcje wagowe:

1^0 dla dowolnej chwili $t \subset (0,T)$ funkcje wagowe $p_1,\ldots,p_m$ muszą spełniać oprócz warunku /7/ jeszcze dodatkowe ograniczenie:

$$G_1(x,\dot{x},t) \leqslant p_1\, g(x,\dot{x},u_1,t) + \ldots + p_m\, g(x,\dot{x},u_m,t) \leqslant G_2(x,\dot{x},t) \qquad /11/$$

2^0 dla dowolnej chwili $t \subset (0,T)$ istnieją takie dwie kombinacje funkcji wagowych, że:

$$p_1^1\, g(x,\dot{x},u_1,t) + \ldots + p_m^1\, g(x,\dot{x},u_m,t) = G_1(x,\dot{x},t) \qquad /12)$$

$$p_1^2\, g(x,\dot{x},u_1,t) + \ldots + p_m^2\, g(x,\dot{x},u_m,t) = G_2(x,\dot{x},t) \qquad /13/$$

W tej sytuacji rozpatrywane pierwotne zadanie optymalizacji (1) $\div$ (5) można sprowadzić do następującego zadania wtórnego: dla obiektu

$$\ddot{z} = p_1\, g(z,\dot{z},u_1,t) + \ldots + p_m\, g(z,\dot{z},u_m,t) \qquad /14/$$

wyznaczyć takie sterowanie $p_1,\ldots,p_m$, które zapewnia uzyskanie minimalnego czasu przejścia ze stanu $[z(0),\ \dot{z}(0)]$ do stanu $[z(T),\ \dot{z}(T)]$:

$$\min_{p_1,\ldots,p_m} T = T_0 \qquad /15/$$

przy ograniczeniach:

$$p_i \geqslant 0, \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1 \qquad /16/$$

oraz:

$$G_1(z,\dot{z},t) \leqslant \ddot{z} \leqslant G_2(z,\dot{z},t) \qquad /17/$$

Z definicji dystrybucji wibracyjnej wynika $x(t) = z(t)$ oraz $\dot{x}(t) = \dot{z}(t)$. Ponieważ przyjęto, że funkcje wagowe $p_1, p_2, \ldots, p_m$ są przedziałami ciągłe, zadanie wtórne może być rozwiązane jako klasyczne w oparciu o zasadę maksimum Pontriagina [3].

Hamiltonian dla zadania wtórnego przyjmuje postać:

$$H = v_1 \cdot \dot{z} + v_2 \left[p_1\, g(z,\dot{z},u_1,t) + \ldots + p_m\, g(z,\dot{z},u_m,t)\right] \qquad /18/$$

gdzie v_1, v_2 - zmienne sprzężone.

Uwzględniając właściwość 2^o (/12/, /13/) oraz zależności /14/, /17/ łatwo zauważyć, że maksimum hamiltonianu zostaje osiągnięte dla:

$$\ddot{z} = \begin{cases} G_2(z,\dot{z},t) & \text{dla} \quad v_2(t) > 0 \\ G_1(z,\dot{z},t) & \text{dla} \quad v_2(t) < 0 \end{cases} \qquad /19/$$

Można udowodnić, że w rozpatrywanym zadaniu wtórnym nie występuje przypadek osobliwy odpowiadający $v_2(t) = 0$ dla $t \in (t_1, t_2]$, $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$. Jeśli zatem dla zadania wtórnego istnieje sterowanie optymalne odpowiadające punktom brzegowym $[x(0),\ \dot{x}(0)]$ oraz $[x(T),\ \dot{x}(T)]$, to trajektorię optymalną można wyznaczyć bez znajomości modelu obiektu $g(x,\dot{x},u,t)$ poprzez złożenie odcinków trajektorii /19/. Otrzymujemy wtedy:

$$\ddot{z}_o = G(z_o, \dot{z}_o, t) \qquad /20/$$

Pełne rozwiązanie zadania pierwotnego wymaga jeszcze określenia sposobu wygenerowania dystrybucji wibracyjnej $\ddot{x}_o$, dla której:

$$\int_0^t \ddot{x}_o dl = \int_0^t \left[p_1\, g(x_o,\dot{x}_o,u_1,l) + \ldots + p_m\, g(x_o,\dot{x}_o,u_m,l)\right] dl = \int_0^t \ddot{z}_o dl \qquad /21/$$

Jeden z możliwych sposobów generacji optymalnej dystrybucji $\ddot{x}_o$ podano w przykładzie. Bardziej ogólne omówienie sposobów generacji optymalnych dystrybucji przedstawiono w [2].

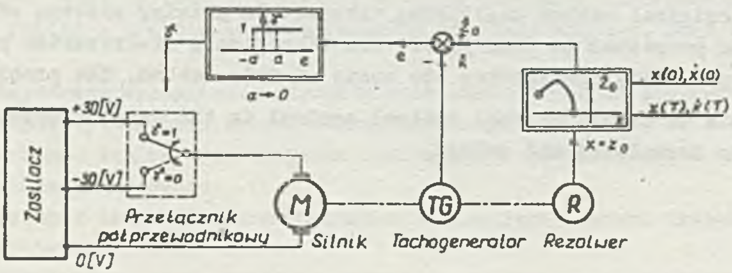
5. Przykład

Załóżmy, że elementem wykonawczym w rozpatrywanym układzie napędowym ramienia "c" robota jest silnik prądu stałego. Niechaj napięcia bazowe są równe $u_1(t) = 30$ [V], $u_2(t) = -30$ [V], natomiast dla pewnego zakresu pracy ramienia i dopuszczalnych mas M funkcje ograniczające określone są następująco: $G_1(x,\dot{x},t) = -50\ [°/s^2]$, $G_2(x,\dot{x},t) = -20\ [°/s^2]$. Celem uproszczenia przyjmijmy dodatkowo $\dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0$. Dla tego zakresu pracy przebieg trajektorii optymalnej /20/ jest następujący:

$$\dot{z}_0 = \begin{cases} \sqrt{40(z_0-x(0))} & \text{dla} \quad z_0 < z_1 \quad \text{oraz} \quad x(T) > x(0) \\ \sqrt{100(z_0-x(T))} & \text{dla} \quad z_0 > z_1 \quad \text{oraz} \quad x(T) > x(0) \\ -\sqrt{100(z_0-x(0))} & \text{dla} \quad z_0 > z_2 \quad \text{oraz} \quad x(T) < x(0) \\ -\sqrt{40(z_0-x(T))} & \text{dla} \quad z_0 < z_2 \quad \text{oraz} \quad x(T) < x(0) \end{cases} \qquad /22/$$

gdzie $z_1 = \dfrac{20x(0) + 50x(T)}{70}$; $z_2 = \dfrac{50x(0) + 20x(T)}{70}$.

Można pokazać, że układ przedstawiony na rys. 2 realizuje przy $a \to 0$ optymalne sterowanie dystrybucyjne określone zależnością /22/.



Rys. 2. Schemat blokowy układu napędowego pojedynczej osi robota

6. LITERATURA

[1] Mikusiński J., Sikorski R.: Elementarna teoria dystrybucji. PWN, Warszawa 1964.

[2] Latarnik M.: Sterowanie optymalne w klasie dystrybucji wibracyjnych. Referat przyjęty na VIII KKA. Szczecin, 1980.

[3] Pontriagin L., Bołtiański W., Gamkrelidze R., Miszczenko E.: Matiematiczeskaja tieorija optimalnych procesow. Nauka, Moskwa 1976.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВИДА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИИ В ПРИВОДЕ РОБОТА

Р е з ю м е

В статье дается оригинальный метод описания скользящих систем привода робота. Этот метод базирует на вибрационной обобщенной функции данной в [2]. В статье формулируется задача синтеза оптимального управления, вида обобщенной функции, для системпривода робота.

THE DISTRIBUTIONAL OPTIMAL CONTROL IN THE DRIVING SYSTEMS OF ROBOT

S u m m a r y

An original method discribing vibration's driving systems of robot has been presented in this paper. The vibration's distribution proposed in the paper [2] constitutes the basis of this method. The problem of synthesis of distributional optimal control in the driving systems of robot is formulated and solved.