ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

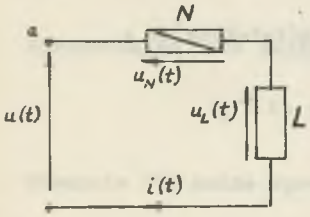
Seria: Elektryka z. 46 Nr kol. 427

Zygmunt Nowomiejski

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki

MOC UKŁADU NIELINIOWEGO POBUDZONEGO NAPIĘCIEM PRAWIE OKRESOWYM
- dodatek do artykułu: Uogólniona teoria mocy -

Niech między zaciskami (a,b) (por. rys. 1) zawarty jest układ składający się z dwóch elementów pasywnych: nieliniowego N oraz liniowego L. Załóżmy, że znana jest odpowiedź y(t) układu liniowego L na napięciowy impuls Diraca δ(t) (funkcja przejścia układu) oraz charakterystyka napięciowo-prądowa elementu N przy czym przyjmiemy, że:



Rys. 1

$$i(t) = \sum_{k=1}^{k=K} a_k \, u_N^k(t) \tag{1}$$

Na podstawie zasady superpozycji odnoszącej się do elementu liniowego, zachodzi:

$$i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\, u_L(t-\tau)d\tau; \quad y(\tau) = o, \quad \text{gdy } \tau < o \tag{2}$$

$$u_L(t) = u(t) - u_N(t)$$

Stąd:

$$\sum_{k=1}^{k=K} a_k \, u_N^k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\left[u(t-\tau) - u_N(t-\tau)\right] d\tau \tag{3}$$

Aby rozwiązać równanie (3) dla szukanej funkcji $u_N(t)$ wykorzystamy metodę N. Wienera (por. [1]) polegającą na przyjęciu, że napięcie $u_N(t)$ występujące na elemencie nieliniowym N jest rozwijalne na szereg zależny od napięcia u(t) przyłożonego do zacisków (a,b).

To znaczy zakładamy, że:

$$u_N(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\tau_1)\, u(t-\tau_1)d\tau_1 + \iint_{-\infty}^{\infty} w_2(\tau_1,\tau_2)\, u(t-\tau_1)\, u(t-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 +$$

$$+ \iiint_{-\infty}^{\infty} w_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\, u(t-\tau_1)\, u(t-\tau_2)\, u(t-\tau_3)d\tau_1\, d\tau_2\, d\tau_3 + \ldots \qquad (4)$$

Przy takim założeniu rozwiązanie równania (3) sprowadza się do znalezienia odpowiednich funkcji $w_n(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\ldots,\tau_n)$. W celu ich obliczenia wstawiamy szereg (4) do równania (3) i porównujemy wyrazy o tych samych potęgach. Dla wyrazu liniowego, otrzymamy:

$$a_1 \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\tau_1)\, u(t-\tau_1)d\tau_1 + \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} w_1(x)\, u(t-\tau-x)dx\right\}d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau_1)\, u(t-\tau_1)d\tau_1$$

Wstawiając do drugiej całki:

$$\tau_1 = x + \tau\,; \quad \lambda = x,$$

otrzymamy:

$$a_1 \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\tau_1)\, u(t-\tau_1)d\tau_1 + \iint_{-\infty}^{\infty} y(\tau_1-\lambda)\, w_1(\lambda)\, u(t-\tau_1)d\lambda\, d\tau_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau_1)\, u(t-\tau_1)d\tau_1 \qquad (5)$$

Równanie (5) będzie spełnione, jeżeli spełnione będzie równanie:

$$a_1\, w_1(\tau_1) + \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau_1-\lambda)\, w_1(\lambda)d\lambda = y(\tau_1) \qquad (6)$$

Można przyjąć, że funkcje $y(t)$ oraz $w_1(t)$ są transformowalne według Fouriera.

Czyli:

$$a_1\ W_1(\omega_1) + Y(\omega_1)\ W_1(\omega_1) = Y(\omega_1)$$

$$W_1(\omega_1) = \frac{Y(\omega_1)}{a_1 + Y(\omega_1)} \tag{7}$$

Dla wyrazów kwadratowych, otrzymamy:

$$a_1 \iint_{-\infty}^{\infty} w_2(\tau_1,\tau_2)\ u(t-\tau_1)\ u(t-\tau_2)d\tau_1\ d\tau_2 + a_2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} w_1(\tau_1)\ u(t-\tau_1)d\tau_1\right]^2 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \left\{\iint_{-\infty}^{\infty} w_2(x_1,x_2)\ u(t-\tau-x_1)\ u(t-\tau-x_2)dx_1\ dx_2\right\} d\tau = 0 \tag{8}$$

Wprowadzając nowe zmienne:

$$\tau_1 = \tau + x_1;\quad \tau_2 = \tau + x_2;\quad \lambda_1 = x_1;\quad \lambda_2 = x_2$$

równanie (8) można sprowadzić do postaci:

$$a_1\ w_2(\tau_1,\tau_2) + a_2\ w_1(\tau_1)\ w_1(\tau_2) + \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\ w_2(\tau_1-\tau,\tau_2-\tau)d\tau = 0 \tag{9}$$

Zachodzi:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\ w_2(\tau_1-\tau,\tau_2-\tau)d\tau\right\} e^{-j\omega_1\tau_1} \cdot e^{-j\omega_2\tau_2}\ d\tau_1\ d\tau_2 =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)e^{-j\omega_1\tau}\left[\int_{-\infty}^{\infty} w_2(x_1,\tau_2-\tau)e^{-j\omega_1 x_1}\ dx_1\right] d\tau\right\} e^{-j\omega_2\tau_2}\ d\tau_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)e^{-j\omega_1\tau}\ W_2(\omega_1,\tau_2-\tau)\right\} e^{-j\omega_2\tau_2}\ d\tau_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)e^{-j\tau(\omega_1+\omega_2)}\ d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} W_2(\omega_1,x_2)e^{-j\omega_2 x_2}dx_2 = W_2(\omega_1,\omega_2)\ Y(\omega_1+\omega_2)$$

Stąd, na podstawie (9):

$$a_1 W_2(\omega_1,\omega_2) + a_2 W_1(\omega_1) W_1(\omega_2) + W_2(\omega_1,\omega_2) Y(\omega_1+\omega_2) = 0 \tag{10}$$

$$W_2(\omega_1,\omega_2) = \frac{-a_2 W_1(\omega_1) W_1(\omega_2)}{a_1 + Y(\omega_1+\omega_2)} \tag{11}$$

Postępując podobnie dla wyrazów trzeciego stopnia, otrzymamy:

$$W_3(\omega_1,\omega_2,\omega_3) =$$

$$= -\frac{1}{a_1 + Y(\omega_1+\omega_2+\omega_3)} \left[a_3 W_1(\omega_1) W_1(\omega_2) W_1(\omega_3) + 2 a_2 W_1(\omega_1) W_2(\omega_2,\omega_3)\right] \tag{12}$$

Bezpośrednie obliczenie kolejnych funkcji wagi jest czasochłonne lecz uzyskuje się je przy pomocy tej samej metody. Można je wyznaczyć przy pomocy prostego schematu liczbowgo. Mianowicie zauważamy, że aby uzyskać równanie (10) dla wyrazów r-tego stopnia należy wyznaczyć sumę:

$$\sum_{k=1}^{k=r} a_k \left(\sum W_1^{n_1} W_2^{n_2} \dots W_r^{n_r} \frac{k!}{n_1!\, n_2! \dots n_r!}\right) \tag{13}$$

przy czym musi zachodzić (dla sumy wewnętrznej):

$$n_1 + n_2 + \dots + n_r = k$$

$n_1 + (2\, n_2) + \dots + (r n_r) = r$ i gdzie $n_1\, n_2, \dots, n_r$ są liczbami naturalnymi lub zero.

Przykładowo, dla wyrazów w czwartej i piątej potędze, otrzymamy:

$$W_4(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4) = -\frac{1}{a_1 + Y(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)} \Big\{a_4 W_1(\omega_1) W_1(\omega_2) W_1(\omega_3) W_1(\omega_4) +$$

$$+ 3 a_3 W_1(\omega_1) W_1(\omega_2) W_2(\omega_3,\omega_4) + a_2\Big[W_2(\omega_1,\omega_2) W_2(\omega_3,\omega_4) +$$

$$+ 2 W_1(\omega_1) W_3(\omega_2,\omega_3,\omega_4)\Big]\Big\} \tag{14}$$

$$W_5(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5) = -\frac{1}{a_1 + Y(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)} \times$$

$$\times \Big\{ a_5\, W_1(\omega_1)\, W_1(\omega_2)\, W_1(\omega_3)\, W_1(\omega_4)\, W_1(\omega_5) + 4\, a_4\, W_1(\omega_1) W_1(\omega_2) W_1(\omega_3) W_2(\omega_4,\omega_5)$$

$$+ 3\, a_3 \Big[W_1(\omega_1)\, W_2(\omega_2,\omega_3)\, W_2(\omega_4,\omega_5) + W_1(\omega_1)\, W_1(\omega_2)\, W_3(\omega_3,\omega_4,\omega_5) \Big] +$$

$$+ 2 \Big[a_2\, W_2(\omega_1,\omega_2)\, W_3(\omega_3,\omega_4,\omega_5) + W_1(\omega_1)\, W_4(\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5) \Big] \Big\} \tag{15}$$

Powracając do relacji (4) widzimy, że mając obliczone funkcje $w_n(\tau_1,\tau_2,\ldots$ $\ldots,\tau_n)$ (tzn. taką ich liczbę, aby otrzymać wystarczająco dobrą aproksymację) możemy wyznaczyć napięcie $u_N(t)$, a tym samym szukany prąd $i(t)$. Połóżmy:

$$\vartheta(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\, i(t-\tau)\, dt \tag{16}$$

$$\varphi(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\, u(t-\tau)\, dt \tag{17}$$

Funkcja $\vartheta(\tau)$ jest funkcją korelacji wzajemnej między napięciem i prądem (korelacją napięciowo-prądową układu), a funkcja $\varphi(\tau)$ jest funkcją autokorelacji przyłożonego napięcia $u(t)$. Obie te funkcje są transformowalne według Fouriera, tzn. zachodzi:

$$\Theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau \tag{18}$$

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau \tag{19}$$

Można wykazać (por. 2.27), że:

$$P + j\,Q = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \Theta(\omega)\, d\omega \tag{20}$$

gdzie P jest mocą czynną a Q mocą bierną układu zawartego między zaciskami (a,b).

Mamy:

$$\vartheta(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\, i(t-\tau)dt = \sum_{k=1}^{k=K} a_k \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\, u_N^K(t-\tau)dt$$

$$= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\tau_1) \left\{ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\, u(t-\tau-\tau_1)dt \right\} d\tau_1 +$$

$$+ \left[a_1 \iint_{-\infty}^{\infty} w_2(\tau_1,\tau_2) \left\{ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\, u(t-\tau-\tau_1)\, u(t-\tau-\tau_2)dt \right\} d\tau_1\, d\tau_2 + \right.$$

$$\left. + a_2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\tau_1)\, u(t-\tau-\tau_1)d\tau_1 \right\}^2 dt \right] +$$

$$+ \left[a_1 \iiint_{-\infty}^{\infty} w_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3) \left\{ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\, u(t-\tau-\tau_1)\, u(t-\tau-\tau_2)\, u(t-\tau-\tau_3)dt \right\} \right.$$

$$+ 2\, a_2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\tau_1)\, u(t-\tau-\tau_1)d\tau_1 \iint_{-\infty}^{\infty} w_2(\tau_2,\tau_3)\, u(t-\tau-\tau_2) \right.$$

$$\left. u(t-\tau-\tau_3)d\tau_2\, d\tau_3 \right\} dt$$

$$\left. + a_3 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\tau_1)\, u(t-\tau-\tau_1)d\tau_1 \right\}^3 dt \right] +$$

$$+ a_1 \iiiint_{-\infty}^{\infty} w_4(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4) \left\{ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\, u(t-\tau-\tau_1)\, u(t-\tau-\tau_2) \right.$$

$$\left. u(t-\tau-\tau_3)\, u(t-\tau-\tau_4)dt \right\} d\tau_1\, d\tau_2\, d\tau_3\, d\tau_4$$

$$+ a_2 \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t) \left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} w_2(\tau_1,\tau_2)\, u(t-\tau-\tau_1)\, u(t-\tau-\tau_2)d\tau_1\, d\tau_2 \right\}^2 dt + \right.$$

$$+ 2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t) \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\tau_1) u(t-\tau-\tau_1) d\tau_1 \iiint_{-\infty}^{\infty} w_3(\tau_2, \tau_3, \tau_4) \right.$$

$$\left. u(t-\tau-\tau_2)\ u(t-\tau-\tau_3)\ u(t-\tau-\tau_4) d\tau_2\ d\tau_3\ d\tau_4 \right\} dt \Big] +$$

$$+ 3a_3 \Big[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t) \left\{ \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\tau_1) u(t-\tau-\tau_1) d\tau_1 \right\}^2 \iint_{-\infty}^{\infty} w_2(\tau_3, \tau_4)\ u(t-\tau-\tau_3) \right.$$

$$\left. u(t-\tau-\tau_4) d\tau_3\ d\tau_4 \right\} \Big] dt + a_4 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\tau_1)\ u(t-\tau-\tau_1) d\tau_1 \right\}^4 dt +$$

$$+ a_1 \iiiint\!\!\int_{-\infty}^{\infty} w_5(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5) \left\{ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t) u(t-\tau-\tau_1) u(t-\tau-\tau_2) u(t-\tau-\tau_3) \right.$$

$$\left. u(t-\tau-\tau_4)\ \times\ u(t-\tau-\tau_5) dt \right\} d\tau_1\ d\tau_2\ d\tau_3\ d\tau_4\ d\tau_5 +$$

$$+ 2\ a_2 \Big[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t) \left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} w_2(\tau_1, \tau_2)\ u(t-\tau-\tau_1)\ \times \right.$$

$$\left. \times\ u(t-\tau-\tau_2) d\tau_1\ d\tau_2 \iiint_{-\infty}^{\infty} w_3(\tau_3, \tau_4, \tau_5) u(t-\tau-\tau_3) u(t-\tau-\tau_4) u(t-\tau-\tau_5) d\tau_3 d\tau_4 d\tau_5 \right\} dt +$$

$$+ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\tau_1) u(t-\tau-\tau_1) d\tau_1 \iiiint\!\!\int_{-\infty}^{\infty} w_4(\tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5) u(t-\tau-\tau_2) u(t-\tau-\tau_3) \times \right.$$

$$\left. \times\ u(t-\tau-\tau_4)\ u(t-\tau-\tau_5) d\tau_2\ d\tau_3\ d\tau_4\ d\tau_5 \right\} \Big] dt +$$

$$+ 3\ a_3 \Big[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t) \left\{ \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\tau_1)\ u(t-\tau-\tau_1) d\tau_1 \right\}^2 \times \right.$$

$$\left. \times \iiint_{-\infty}^{\infty} w_3(\tau_3, \tau_4, \tau_5)\ u(t-\tau-\tau_3)\ u(t-\tau-\tau_4)\ u(t-\tau-\tau_5) d\tau_3\ d\tau_4\ d\tau_5 \right\} dt +$$

$$+ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} w_1(\tau_1)u(t-\tau-\tau_1)d\tau_1\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} w_2(\tau_2,\tau_3)u(t-\tau-\tau_2)\ \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\ u(t-\tau-\tau_3)d\tau_2\ d\tau_3\right\}^2\right\} dt\Big] +$$

$$+ 4\ a_4 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\left\{\left\{\int_{-\infty}^{\infty} w_1(\tau_1)u(t-\tau-\tau_1)d\tau_1\right\}^3 \iint_{-\infty}^{\infty} w_2(\tau_4,\tau_5)u(t-\tau-\tau_4)\ \times\right.$$

$$\left.\times\ u(t-\tau-\tau_5)d\tau_4\ d\tau_5\right\}dt + a_5 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} w_1(\tau_1)u(t-\tau-\tau_1)d\tau_1\right\}^5 dt + \ldots \tag{21}$$

Wpływ poszczególnych wyrazów szeregu (21) na funkcję korelacji wzajemnej zbadamy obliczając wartość całek:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\ u(t-\tau-\tau_1)dt \tag{22}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\ u(t-\tau-\tau_1)\ u(t-\tau-\tau_2)dt \tag{23}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\ u(t-\tau-\tau_1)\ u(t-\tau-\tau_2)\ u(t-\tau-\tau_3)dt \tag{24}$$

$$\vdots$$

Zakładamy, że przyłożone napięcie $u(t)$ jest przebiegiem jednostajnie prawie okresowym. (Wydaje się, że jest to wystarczająco ogólne założenie. Zawiera ono przebiegi okresowe ciągłe, przebiegi okresowe ograniczone o przeliczalnej liczbie punktów nieciągłości pierwszego rodzaju oraz przebiegu wielookresowe lub w różny sposób modulowane).

Przy takim założeniu:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\ u(t-\tau-\tau_1)\ \ldots\ u(t-\tau-\tau_n)dt =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą parzystą} \\ \sum\limits_{(x,y)} \varphi(\tau+\tau_i)\ \varphi(\tau_j-\tau_k)\ \varphi(\tau_l-\tau_m)\ \ldots\ \varphi(\tau_p-\tau_q) & \\ \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste} & \end{cases} \tag{25}$$

przy czym sumowanie wykonujemy po wszystkich różnych i rozdzielczych parach liczb zawartych w ciągu: 1,2,3,...n.
(Powyższe relacje łatwo sprawdzić dla dowolnej skończonej liczby wyrazów szeregu Fouriera funkcji prawie okresowej).

I tak:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)u(t-\tau-\tau_1)dt = \varphi(\tau+\tau_1)$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)u(t-\tau-\tau_1)u(t-\tau-\tau_2)dt = 0$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)u(t-\tau-\tau_1)u(t-\tau-\tau_2)u(t-\tau-\tau_3)dt =$$

$$= \varphi(\tau+\tau_1)\varphi(\tau_3-\tau_2) + \varphi(\tau+\tau_2)\varphi(\tau_3-\tau_1) + \varphi(\tau+\tau_3)\varphi(\tau_2-\tau_1)$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)u(t-\tau-\tau_1)u(t-\tau-\tau_2)u(t-\tau-\tau_3)u(t-\tau-\tau_4)dt = 0$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)u(t-\tau-\tau_1)u(t-\tau-\tau_2)u(t-\tau-\tau_3)u(t-\tau-\tau_4)u(t-\tau-\tau_5)dt =$$

$$= \varphi(\tau+\tau_1)\left[\varphi(\tau_5-\tau_2)\varphi(\tau_4-\tau_3)+\varphi(\tau_5-\tau_3)\varphi(\tau_4-\tau_2)+\varphi(\tau_5-\tau_4)\varphi(\tau_3-\tau_2)\right] +$$

$$+ \varphi(\tau+\tau_2)\left[\varphi(\tau_5-\tau_1)\varphi(\tau_4-\tau_3) + \varphi(\tau_5-\tau_3)\varphi(\tau_4-\tau_1) + \varphi(\tau_5-\tau_4)\varphi(\tau_3-\tau_1)\right] +$$

$$+ \varphi(\tau+\tau_3)\left[\varphi(\tau_5-\tau_1)\varphi(\tau_4-\tau_2) + \varphi(\tau_5-\tau_2)\varphi(\tau_4-\tau_1) + \varphi(\tau_5-\tau_4)\varphi(\tau_2-\tau_1)\right] +$$

$$+ \varphi(\tau+\tau_4)\left[\varphi(\tau_5-\tau_1)\varphi(\tau_3-\tau_2) + \varphi(\tau_5-\tau_2)\varphi(\tau_3-\tau_1) + \varphi(\tau_5-\tau_3)\varphi(\tau_2-\tau_1)\right] +$$

$$+ \varphi(\tau+\tau_5)\left[\varphi(\tau_4-\tau_1)\varphi(\tau_3-\tau_2) + \varphi(\tau_4-\tau_2)\varphi(\tau_3-\tau_1) + \varphi(\tau_4-\tau_3)\varphi(\tau_2-\tau_1)\right] \qquad (26)$$

Wstawiając całki (26) do szeregu (21), otrzymamy:

$$\vartheta(\tau) = a_1 \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\tau_1)\varphi(\tau+\tau_1)d\tau_1 +$$

$$+\iiint_{-\infty}^{\infty}\Big[a_1\ w_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)+2a_2\ w_1(\tau_1)w_2(\tau_2,\tau_3)+a_3\ w_1(\tau_1)w_1(\tau_2)w_1(\tau_3)\Big]\ x$$

$$x\Big[\varphi(\tau+\tau_1)\varphi(\tau_3-\tau_2)+\varphi(\tau+\tau_2)\varphi(\tau_3-\tau_1)+\varphi(\tau+\tau_3)\varphi(\tau_2-\tau_1)\Big]d\tau_1\ d\tau_2\ d\tau_3 +$$

$$+\iiiint\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{a_1 w_5(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4\tau_5)+2a_2\Big[w_2(\tau_1,\tau_2)w_3(\tau_3,\tau_4,\tau_5)+w_1(\tau_1)w_4(\tau_2,\tau_3,\tau_4,\tau_5)\Big]+$$

$$+\ 3a_3\Big[w_1(\tau_1)w_1(\tau_2)w_3(\tau_3,\tau_4,\tau_5)\ +\ w_1(\tau_1)w_2(\tau_2,\tau_3)w_2(\tau_4,\tau_5)\Big]\ +$$

$$+\ 4a_4\ w_1(\tau_1)w_1(\tau_2)w_1(\tau_3)w_2(\tau_4,\tau_5)+a_5\ w_1(\tau_1)w_1(\tau_2)w_1(\tau_3)w_1(\tau_4)w_1(\tau_5)\Big\}\ x$$

$$x\Big\{\varphi(\tau+\tau_1)\Big[\varphi(\tau_5-\tau_2)\varphi(\tau_4-\tau_3)\ +\ \varphi(\tau_5-\tau_3)\varphi(\tau_4-\tau_2)\ +\ \varphi(\tau_5-\tau_4)\ \varphi(\tau_3-\tau_2)\Big]\ +$$

$$+\ \varphi(\tau+\tau_2)\Big[\varphi(\tau_5-\tau_1)\varphi(\tau_4-\tau_3)\ +\ \varphi(\tau_5-\tau_3)\ \varphi(\tau_4-\tau_1)\ +\ \varphi(\tau_5-\tau_4)\ \varphi(\tau_3-\tau_2)\Big]\ +$$

$$+\ \varphi(\tau+\tau_3)\Big[\varphi(\tau_5-\tau_1)\ \varphi(\tau_4-\tau_2)\ +\ \varphi(\tau_5-\tau_2)\ \varphi(\tau_4-\tau_1)\ +\ \varphi(\tau_5-\tau_4)\ \varphi(\tau_2-\tau_1)\Big]\ +$$

$$+\ \varphi(\tau+\tau_4)\Big[\varphi(\tau_5-\tau_1)\ \varphi(\tau_3-\tau_2)\ +\ \varphi(\tau_5-\tau_2)\ \varphi(\tau_3-\tau_1)\ +\ \varphi(\tau_5-\tau_3)\ \varphi(\tau_2-\tau_1)\Big]\ +$$

$$+\ \varphi(\tau+\tau_5)\Big[\varphi(\tau_4-\tau_1)\ \varphi(\tau_3-\tau_2)\ +\ \varphi(\tau_4-\tau_2)\varphi(\tau_3-\tau_1)\ +\ \varphi(\tau_4-\tau_3)\varphi(\tau_2-\tau_1\Big]\Big\}+\ \ldots$$

Stąd:

$$\Theta(\omega) = \Phi(\omega)\ \Big\{a_1 \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\tau_1)e^{j\omega\tau_1}\ d\tau_1\ +$$

$$+\iiint_{-\infty}^{\infty}\Big[a_1\ w_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\ +\ 2a_2\ w_1(\tau_1)w_2(\tau_2,\tau_3)\ +\ a_3\ w_1(\tau_1)w_1(\tau_2)w_1(\tau_3)\Big]\ x$$

$$x\ \Big[\varphi(\tau_{32})e^{j\omega\tau_1}\ +\ \varphi(\tau_{31})e^{j\omega\tau_2}\ +\ \varphi(\tau_{21})e^{j\omega\tau_3}\Big]\ d\tau_1\ d\tau_2\ d\tau_3\Big\}+$$

$$+\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty}\Big\{a_1\, w_5(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,\tau_5)+2a_2\Big[w_2(\tau_1,\tau_2)w_3(\tau_3,\tau_4,\tau_5)+$$

$$+\, w_1(\tau_1)w_4(\tau_2,\tau_3,\tau_4,\tau_5)\Big]+3a_3\Big[w_1(\tau_1)w_1(\tau_2)w_3(\tau_3,\tau_4,\tau_5)+$$

$$+\, w_1(\tau_1)w_2(\tau_2,\tau_3)w_2(\tau_4,\tau_5)\Big]+4a_4\, w_1(\tau_1)w_1(\tau_2)w_1(\tau_3)w_2(\tau_4,\tau_5)+$$

$$+\, a_5\, w_1(\tau_1)w_1(\tau_2)w_1(\tau_3)w_4(\tau_4)w_1(\tau_5)\Big\}\ \mathrm{x}$$

$$\mathrm{x}\Big\{e^{j\omega\tau_1}\Big[\varphi(\tau_{52})\varphi(\tau_{43})+\varphi(\tau_{53})\,\varphi(\tau_{42})+\varphi(\tau_{54})\,\varphi(\tau_{32})\Big]+$$

$$+\, e^{j\omega\tau_2}\Big[\varphi(\tau_{51})\varphi(\tau_{43})+\varphi(\tau_{53})\,\varphi(\tau_{41})+\varphi(\tau_{54})\,\varphi(\tau_{32})\Big]+$$

$$+\, e^{j\omega\tau_3}\Big[\varphi(\tau_{51})\,\varphi(\tau_{42})+\varphi(\tau_{52})\,\varphi(\tau_{41})+\varphi(\tau_{54})\,\varphi(\tau_{21})\Big]+$$

$$+\, e^{j\omega\tau_4}\Big[\varphi(\tau_{51})\,\varphi(\tau_{32})+\varphi(\tau_{52})\,\varphi(\tau_{31})+\varphi(\tau_{53})\,\varphi(\tau_{21})\Big]+$$

$$+\, e^{j\omega\tau_5}\Big[\varphi(\tau_{41})\,\varphi(\tau_{32})+\varphi(\tau_{42})\,\varphi(\tau_{31})+\varphi(\tau_{43})\,\varphi(\tau_{21})\Big]\Big\}+\ldots\Big\}$$

gdzie w celu uproszczenia zapisu: $\varphi(\tau_i-\tau_k)=\varphi_{ik}$.

Oznaczmy szereg zawarty w dużym nawiasie przez: $K^*(\omega)$.

Otrzymamy:

$$P+jQ=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\Phi(\omega)\;K^*(\omega)d\omega \tag{27}$$

Interesująca jest możliwość wykorzystania relacji (27) do oceny stabilności rozważanego układu. Zachodzi (porównując (27) z relacją (2.07)):

$$I_c(\omega)=U_c(\omega)\;K(\omega) \tag{28}$$

Stąd: (por. (1.23)):

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} i^2(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|U_\varepsilon(\omega)\ K(\omega)\right|^2 d\omega}{4\pi\varepsilon}$$

$$\leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|U_\varepsilon(\omega)\right|^2}{4\pi\varepsilon}\left|K(\omega)\right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)\left|K(\omega)\right|^2 d\omega$$

Tak więc dla wartości skutecznej I przebiegu prądu i(t) płynącego w układzie:

$$I\leqslant\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)\left|K(\omega)\right|^2 d\omega} \tag{29}$$

Wykorzystując własności impulsu Diraca (w sensie dystrybucyjnym) zauważamy, że relacja (29) jest równoważna nierówności:

$$I\leqslant\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U^2\ 2\pi\delta(\omega)\left|K(\omega)\right|^2\ d\omega}$$

Czyli:

$$I\leqslant U\left|K(o)\right| \tag{30}$$

Połóżmy:

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t)e^{-j\omega t}dt$$

Stąd:

$$\left|K(o)\right|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\left|k(t)\right| dt$$

oraz (por. (30)):

$$I \leqslant U \int_{-\infty}^{\infty} |k(t)|\, dt \tag{31}$$

Z zależności (31) wynika, że wartość skuteczna przebiegu prądu będzie ograniczona dla każdej ograniczonej wartości skutecznej napięcia przyłożonego do zacisków (a,b), jeżeli spełniona będzie relacja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |k(t)|\, dt < \infty \tag{32}$$

LITERATURA

[1] Wiener N.: Response of a Non-Linear Device to Noise. MIT Rad.Lab. Report, 168, 1942.