ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Elektryka z. 50 Nr kol. 451

BERNARD BARON

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH MACIERZY SIECIOWEJ

Streszczenie. W pracy zwrócono uwagę na fakt, że macierz sieciowa T jest algebraicznym zapisem topologii grafu, będącego odwzorowaniem sieci. Wykazano, że wszystkie macierze sieciowe jakie można skonstruować dla danej sieci mają wspólną własność, a mianowicie ich wyznacznik jest równy liczbie drzew grafu. To centralne twierdzenie poprzedzono twierdzeniem o pewnej własności macierzy cyklomatycznej. Rozważania te przeprowadzono wykorzystując model przestrzeni napięciowej i prądowej stosując zapis tensorowy w sytuacjach upraszczających przeliczenia.

Weźmy pod uwagę dowolną sieć odwzorowaną w postaci grafu zorientowanego $G = (X,U)$ składającego się z m gałęzi i n węzłów, tj. $|X| = n$, $|U| = m$. Przyporządkujmy każdej gałęzi sieci napięcie v_g mierzone między początkiem i końcem gałęzi $u_g \in U$.

Stanem napięciowym nazywać będziemy zbiór wartości liczbowych napięć v_g mierzonych jednocześnie (mogą to być wartości zespolone lub rzeczywiste).

Dla dalszych rozważań wprowadzimy pojęcie przestrzeni unitarnej. Niech będzie dana przestrzeń wektorowa m-wymiarowa R^m nad ciałem liczb zespolonych.

Definicja. Przestrzeń R^m z iloczynem skalarnym

$$<X,Y> = \sum_{k=1}^{m} X^k \bar{Y}^k,$$

gdzie:

$$X = (X^1,\dots,X^m)$$

$$Y = (Y^1,\dots,Y^m)$$

nazywamy przestrzenią unitarną m-wymiarową i oznaczamy $\hat{U}^m$.

Definicja wektora napięciowego.

Niech będzie dana m-wymiarowa przestrzeń unitarna $\hat{U}^m$. Wektor $\mathbf{V}$ określony w przestrzeni $\hat{U}^m$, o współrzędnych będących wartościami liczbowymi napięć v_g $(g = 1,2...,m)$ dla jednego stanu elektrycznego danej sieci, nazywamy wektorem napięciowym.

Utwórzmy dla grafu G macierz cyklomatyczną. Weźmy w tym celu zbiór wszystkich cykli elementarnych $\{\mu_i\}$ grafu G i przyporządkujmy każdemu z nich wektor

$$\mathbf{C}_i = (C_i^1, C_i^2, ..., C_i^m) \tag{1}$$

w następujący sposób:

$$C_i^j = \begin{cases} +1 & \text{jeśli orientacja gałęzi } u_j \text{ zgadza się z obiegiem cyklu } \mu_i, \\ -1 & \text{jeśli orientacja gałęzi } u_j \text{ nie zgadza się z obiegiem cyklu } \mu_i, \\ 0 & \text{jeśli gałąź } u_j \text{ nie należy do cyklu } \mu_i. \end{cases}$$

Ponieważ maksymalna liczba cykli niezależnych grafu spójnego G jest równa $\nu(G) = m - n + 1$ [1] więc wektory cykliczne $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_{m-n+1}$ odpowiadające tym cyklom wyznaczają $(m-n+1)$ wymiarową podprzestrzeń liniową w przestrzeni $\hat{U}^m$. Oznaczmy tę podprzestrzeń

$$\hat{\mathcal{C}} = \hat{\mathcal{C}}(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, ..., \mathbf{C}_{m-n+1}). \tag{2}$$

Utwórzmy macierz

$$C_K^M = \begin{bmatrix} C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_{m-n+1}^1 \\ C_1^2 & C_2^2 & \cdots & C_{m-n+1}^2 \\ C_1^M & C_2^M & \cdots & C_{m-n+1}^M \end{bmatrix}, \tag{3}$$

gdzie:

$$M = \{1,2,...,m\}$$

$$K = \{1,2,...,m-n+1\}.$$

Przy pomocy macierzy C można zapisać II prawo Kirchhoffa

$$\mathbf{V} C_K^M = 0 \tag{4}$$

lub używając symboliki tensorowej

$$v_j \, C_i^j = 0, \tag{5}$$

gdzie sumowanie odbywa się po wskaźniku $j \in M$ dla każdego $i \in K$. Zanim przystąpimy do rozwiązania układu (5) wykażemy następujące:

Twierdzenie 1

Niech C_K^M będzie macierzą cyklomatyczną.
Jeżeli macierz kwadratowa C_K^K powstała z macierzy C_K^M przez wykreślenie wierszy odpowiadających gałęziom pewnego drzewa grafu to det $C_K^K = \pm 1$, w pozostałych przypadkach wyznacznik tej jest równy zeru.

Dowód

Weźmy macierz C_K^M, której kolumnom odpowiadają cykle elementarne $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m-n+1}$. Niech $\{u_1\ u_2, \dots, u_{m-n+1}\} \subset U$ jest zbiorem gałęzi stanowiących dopełnienie pewnego drzewa grafu G. Dołączenie więc dowolnej gałęzi u_i, z tego zbioru do drzewa grafu G powoduje powstanie cyklu elementarnego μ_i, [1]. W ten sposób otrzymamy układ cykli elementarnych $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m-n+1}$, do których należą odpowiednio gałęzie $u_1, u_2, \dots, u_{m-n+1}$. W nowych wektorach cyklicznych $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots \mathbf{C}_{(m-n+1)}$, na pozycjach 1' w $\mathbf{C}_1$, ..., (m-n+1)', w $\mathbf{C}_{(m-n+1)'}$, współrzędne wektorów są równe +1 lub -1, natomiast na tych samych pozycjach w pozostałych wektorach współrzędne są równe zeru.
Wektory $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_{(m-n+1)}$, stanowią bazę przestrzeni a więc dla dowolnego wektora $\mathbf{C}_i$, należącego do nowej bazy, istnieje układ wektorów $\mathbf{C}_{j1}, \mathbf{C}_{j2}, \dots, \mathbf{C}_{jk}$ należących do starej bazy i układ elementów $\lambda_{j1}, \lambda_{j2}, \dots, \lambda_{jk}$, gdzie $k \leq m-n+1$ taki, że $\mathbf{C}_{i'} = \lambda_{j1}\mathbf{C}_{j1} + \dots + \lambda_{jk}\mathbf{C}_{jk}$.
Ponieważ wektory starej i nowej bazy mają współrzędne równe 0, +1 lub -1, elementy układu $\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{jk}$ są równe 1 lub -1.
Pozwala to na otrzymanie macierzy

$$C_{K'}^M = \begin{bmatrix} C_{1'}^1, \dots, C_{(m-n+1)'}^1 \\ \\ C_{1'}^m, \dots, C_{(m-n+1)'}^m \end{bmatrix}$$

z macierzy C_K^M przez zmianę kolumn odpowiednią ich kombinacją liniową ze współczynnikami +1 lub -1.

Weźmy teraz dwie podmacierze kwadratowe rzędu m-n+1, otrzymane z C_K^M i $C_{K'}^M$, przez wykreślenie tych wierszy macierzy, które odpowiadają gałęziom wybranego na początku drzewa grafu:

$$C_K^K = \begin{bmatrix} c_1^{g_1} & \cdots & c_{m-n+1}^{g_1} \\ & & \\ c_1^{g_{m-n+1}} & & c_{m-n+1}^{g_{m-n+1}} \end{bmatrix}, \qquad C_{K'}^K = \begin{bmatrix} \pm 1 & & & 0 \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pm 1 \end{bmatrix}.$$

W macierzach C_K^M i $C_{K'}^M$ numeracja wierszy (gałęzi) nie uległa zmianie, więc macierz $C_{K'}^K$ powstała z macierzy C_K^K przez dodanie do poszczególnych kolumn pewnych wektorów kolumnowych, co jak wiadomo nie zmienia wartości wyznacznika.
Mamy więc

$$\det C_K^K = \det C_{K'}^K = \pm 1.$$

Jeżeli natomiast gałęzie odpowiadające wierszom macierzy C_K^K nie tworzą dopełnienia drzewa grafu, to istnieje wśród nich taka gałąź $u_{i'}$, która dołączona do wybranego drzewa grafu nie powoduje powstania cyklu elementarnego $\mu_{i'}$. Cykl μ_i powstał więc nie przez dołączenie gałęzi u_i, lecz jakiejś innej nie należącej do wybranych. W takiej sytuacji macierz $C_{K'}^K$ ma postać

$$C_K^K = \begin{bmatrix} +1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pm 1 & & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1'}^{g_i} & c_{2'}^{g_i} & & 0 & \cdots & c_{(m-n+1)'}^{g_i} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \pm 1 \end{bmatrix}.$$

Mamy więc

$$\det C_K^K = 0.$$

Przystąpimy teraz do rozwiązania układu (5). Weźmy w tym celu niezerowy wyznacznik $\det C_K^K \neq 0$ podmacierzy kwadratowej rzędu m-n+1 macierzy C_K^M. Wybór takiego wyznacznika jest związany, jak wiadomo, z ustaleniem zmiennych zależnych v_i.
Z twierdzenia 1 wynika, że wybór zmiennych zależnych v_i jest równoważny wyborowi dopełnienia pewnego drzewa grafu G, będącego odwzorowaniem rozważanej sieci, gdyż tylko wówczas $\det C_K^K \neq 0$.

Przenieśmy wybrane zmienne niezależne na prawą stronę

$$\begin{bmatrix} c_1^{g_n} & c_1^{g_n+1} & c_1^{g_m} \\ c_2^{g_n} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \\ c_{m-n+1}^{g_n} & \cdots & c_{m-n+1}^{g_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{g_n} \\ v_{g_{n+1}} \\ \vdots \\ v_{g_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1^{g_1} & c_1^{g_2} & \cdots & c_1^{g_{n-1}} \\ -c_2^{g_1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \\ -c_{m-n+1}^{g_1} & \cdots & & c_{m-n+1}^{g_{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{g_1} \\ v_{g_2} \\ \vdots \\ v_{g_{n-1}} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Nadając zmiennym niezależnym $(v_{g_1},\ldots,v_{g_2},\ldots,v_{g_{n-1}})$ układy znaczeń $(1,0,\ldots,0)$, $(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)$, otrzymamy fundamentalną bazę rozwiązań

$$V^{g_1},\quad V^{g_2},\ldots,V^{g_{n-1}},$$

$$V^{g_i} = (v_1^{g_i},\ v_2^{g_i},\ldots,v_m^{g_i}),$$

gdzie:

j-ta składowa $(m \geqslant j > n-1)$ $v_j^{g_i}$ wyraża się formułą

$$v_j^{g_i} = \frac{1}{\det C_K^K} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} c_1^{g_n} & c_1^{g_{n-1}} & \cdots & -c_1^{g_i} & \cdots & c_1^{g_m} \\ c_2^{g_m} & \cdots & & -c_2^{g_i} & & c_2^{g_m} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ c_{m-n+1}^{g_n} & \cdots & & -c_{m-n+2}^{g_i} & \cdots & c_{m-n+1}^{g_n} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & \quad 2 & \quad \cdots & \quad j & \quad \cdots & \quad m-n+1 \end{matrix} \end{array} = \frac{\Delta j}{\det C_K^K}.$$

Na mocy twierdzenia 1 $\det C_K^K = \pm 1$ natomiast $\Delta j = 0$, $+1$ lub -1. Wynika z tego, że wektory V^{g_i} tworzące fundamentalną bazę rozwiązań układu (6) mają współrzędne 0, +1 lub −1.

Weźmy pod uwagę przestrzeń unitarną $\hat{U}^m$ i układ ortonormalny wektorów tej przestrzeni $\mathcal{E} = \left\{e^1,\ldots,e^m\right\}$

$$\mathbf{e}^1 = (1,0,\dots,0),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\mathbf{e}^m = (0,\dots,0,1),$$

który stanowi bazę tej przestrzeni. Przyporządkujemy każdemu wektorowi tej bazy $\mathbf{e}^g$ napięcie gałęziowe v_g, wówczas wektor napięciowy $\mathbf{V}$ może-v zapisać w postaci sumy

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}^g \; v_g, \tag{8}$$

gdzie sumowanie odbywa się po wskaźnikach $g \in \{1,2,\dots,m\}$.

Ponieważ zbiór wszystkich wektorów ortogonalnych do $\hat{\mathcal{C}}$ tworzy podprzestrzeń liniową n-1 wymiarową, zatem zbiór wszystkich wektorów $\mathbf{V}$ stanowiących możliwe rozwiązanie układu

$$\langle \mathbf{V}\mathbf{C}_i \rangle = 0 \quad (i = 1,2,\dots,m-n+1)$$

tworzy przestrzeń liniową n-1 wymiarową. Oznaczmy ją

$$\hat{\mathcal{V}} = \hat{\mathcal{V}}\,(\mathbf{V}^1,\ \mathbf{V}^2,\dots,\mathbf{V}^{n-1})$$

i nazwijmy przestrzenią napięciową. Każdy wektor $\mathbf{V} \in \hat{\mathcal{V}}$ może być wyrażony jako kombinacja liniowa wektorów bazy

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^k \; v_{k_t}, \tag{9}$$

gdzie v_{k_t} napięcia drzewa grafu G a sumowanie odbywa się po wskaźnikach $k \in \{g_1, g_2,\dots,g_{n-1}\}$ odpowiadających wybranemu drzewu grafu G.
Z porównania wzorów (8) i (9) otrzymamy

$$v_g = v_g^k \; v_{{}_t k}, \tag{10}$$

gdzie sumowanie się po wskaźnikach $k \in \{g_1,\dots,g_{n-1}\}$ odpowiadających wybranemu drzewu grafu G dla każdego $g \in \{1,2,\dots,m\}$. Utwórzmy sumę prostą przestrzeni $\hat{\mathcal{C}}$ i $\hat{\mathcal{V}}$. Suma ta $\hat{\mathcal{C}} \oplus \hat{\mathcal{V}} = \hat{U}^m$ gdyż każdy wektor przestrzeni $\hat{U}^m$ daje się przedstawić i to tylko na jeden sposób w postaci sumy dwu wektorów, z których jeden jest wektorem z przestrzeni $\hat{\mathcal{V}}$ a drugi z $\hat{\mathcal{C}}$.
Wektory $\mathbf{V}^g$ i $\mathbf{C}_g$ tworzą razem zbiór m liniowo niezależnych wektorów w przestrzeni. Oznaczamy tę bazę

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{V}^1,\ \mathbf{V}^2,\dots,\ \mathbf{V}^{n-1},\ \mathbf{C}_n,\ \mathbf{C}_{n+1},\dots,\mathbf{C}_m\} = \{\boldsymbol{\alpha}^1,\dots,\boldsymbol{\alpha}^m\}.$$

Znajdziemy teraz macierz przejścia ze starej bazy ortonormalnej $\mathcal{E}$ do bazy $\mathcal{A}$. Dowolny wektor $\alpha^k \in \mathcal{A}$ daje się wyrazić jako kobminacja liniowa wektorów bazy

$$\alpha^k = t_l^k \ e^l = (t_1^k, t_2^k, \ldots, t_m^k). \tag{11}$$

Jak więc z tego wynika kolumny macierzy przejścia $\left[t_j^k\right]$ są równe wektorom bazy $\mathcal{A}$. Macierz $T_v = \left[t_j^k\right]$ nazywamy macierzą sieciową napięciową.

Mając macierz sieciową napięciową wyznaczamy teraz współrzędne wektora $\mathbf{V}$ względem bazy $\mathcal{A}$. Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ i $v_1, v_2, \ldots, v_m$ będą współrzędnymi wektora $\mathbf{V}$ przestrzeni $\hat{U}^m$ względem bazy $\mathcal{A}$ i $\mathcal{E}$ i niech $T_v = \left[t_j^k\right]$ będzie macierzą przejścia z bazy $\mathcal{E}$ do $\mathcal{A}$. Podstawiając do równości

$$v_g \ e^g = \alpha_g \ \alpha^g = \mathbf{V}. \tag{12}$$

Prawe strony równości (11) otrzymamy

$$v_g \, e^g = \alpha_g \ \ t_j^g \ e^j.$$

Po nieistotnej zmianie wskaźników otrzymamy

$$v_g \, e^g = \alpha_k \ \ t_g^k \ e^g. \tag{13}$$

Ponieważ wektory e^g są liniowo niezależne mamy stąd

$$v_g = t_g^k \ \ \alpha_k, \tag{14}$$

gdzie $k, \ g \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Zastanówmy się teraz nad interpretacją powyższych rozważań. Wprowadzimy w tym celu dwa wektory w $\hat{U}^m$, wektor napięć drzewa v_g i wektor napięć dopełnienia v_{d^g}. Niech wektory ${}_t^v g$ i ${}_d^v g$ będą rzutami v_g, czyli

$$v_g = {}_t^v g + {}_d^v g. \tag{15}$$

Na podstawie zależności (10) mamy

$$v_g = t_g^k \ {}_t^v k. \tag{16}$$

Porównując wzory (16) i (14) otrzymamy

$$\alpha_{\kappa} = {}_{t}^{v}{}_{\kappa}$$

a więc współrzędnymi wektora napięciowego w nowej bazie będą jedynie napięcia drzewa. Wektor v_{g} w bazie $\mathcal{E}$ staje się wektorem ${}_{t}^{v}{}_{g}$ w nowej bazie $\mathcal{A}$. Z wzoru (14) wynika, że jeżeli są dane napięcia drzewa ${}_{t}^{v}{}_{g}$ to możemy określić wszystkie napięcia gałęziowe. Działanie odwrotne jest również możliwe.

Wprowadzimy teraz pojęcie przestrzeni prądowej. Przyporządkujemy każdej gałęzi sieci prąd i_{g} mierzony w gałęzi g. Stanem prądowym nazywać będziemy zbiór wartości liczbowych prądów i_{g} zmierzonych jednocześnie.

Definicja wektora prądowego $\mathbf{J}$

Niech będzie dana m-wymiarowa przestrzeń unitarna $\hat{U}^{m}$. Wektor $\mathbf{J}$ określony w tej przestrzeni o współrzędnych będących wartościami liczbowymi i_{g} $(g = 1,2,\ldots,m)$ dla jednego stanu prądowego danej sieci nazywamy wektorem prądowym.

Utwórzmy dla grafu zorientowanego G będącego odwzorowaniem rozważanej sieci macierz incydencji $S_{W}^{M} = \left[S_{k}^{g}\right]$:

$$S_{k}^{g} = \begin{cases} +1 & \text{gdy } g\text{-ta gałąź wychodzi z } k\text{-tego węzła;} \\ -1 & \text{gdy } g\text{-ta gałąź wchodzi w } k\text{-ty węzeł,} \\ 0 & \text{jeśli } g\text{-ta gałąź nie jest incydentna z } k\text{-tym węzłem,} \end{cases}$$

gdzie

$$W = \{1,2,\ldots,n-1\}$$

$$M = \{1,2,\ldots,m\}.$$

Pierwsze prawo Kirchhoffa można wówczas zapisać w postaci

$$S_{k}^{g}\ i_{g} = 0, \tag{17}$$

gdzie sumowanie odbywa się po wskaźnikach $g \in M$ dla każdego węzła $k \in W$.

Korzystając z własności macierzy incydencji [1] można wykazać, że wybór zmiennych zależnych przy rozwiązywaniu układu (17) jest równoważny wyborowi drzewa grafu będącego odwzorowaniem rozważanej sieci. Wektory kolumnowe $\mathbf{S}^{i}$ macierzy incydencji wyznaczają (n-1) wymiarową podprzestrzeń liniową przestrzeni $\hat{U}^{m}$. Oznaczmy ją przez

$$\hat{\mathcal{S}} = \hat{\mathcal{S}}\,(\mathbf{S}^{1},\ \mathbf{S}^{2},\ldots,\mathbf{S}^{n-1}).$$

Zbiór wszystkich wektorów ortogonalnych do $\hat{\mathcal{S}}$ tworzy podprzestrzeń (m-n+1) wymiarową, zatem zbiór wszystkich wektorów $\mathbf{J}$, stanowiących możliwe rozwiązanie układu (17) tworzy podprzestrzeń liniową (m-n+1) wymiarową. Oznaczmy ją $\hat{\mathcal{J}}$ i nazwijmy przestrzenią prądową.

Postępując analogicznie jak przy rozwiązaniu systemu napięciowego można wyznaczyć układ rozwiązań $\left\{\mathbf{J}^n, \mathbf{J}^{n+1}, \ldots, \mathbf{J}^m\right\}$ stanowiący bazę przestrzeni prądowej $\hat{\mathcal{J}}$. Współrzędne i_g dowolnego wektora z przestrzeni $\hat{\mathcal{J}}$ wyraża się wówczas wzorem

$$i_g = i_g^k \, {}_d^i k, \tag{18}$$

gdzie:

${}_d^i k$ - współrzędne wektora prądów dopełnienia,

i_g^k - g-ta współrzędna wektora $\mathbf{J}^k$ z fundamentalnej bazy rozwiązań.

Wektory $\mathbf{S}^1, \mathbf{S}^2, \ldots, \mathbf{S}^{n-1}, \mathbf{J}^n, \ldots, \mathbf{J}^m$ tworzą zbiór m liniowo niezależnych wektorów w przestrzeni $\hat{U}^m$, stanowią więc pewną bazę tej przestrzeni. Oznaczmy tę bazę

$$\mathcal{B} = \left\{\mathbf{S}^1, \ldots, \mathbf{S}^{n-1}, \quad \mathbf{J}^n, \ldots, \mathbf{J}^m\right\}$$

Wykazuje się, że kolumny macierzy przejścia $T_J = \left[t_j^k\right]$ ze starej bazy $\mathcal{E}$ do bazy $\mathcal{B}$ są równe wektorom bazy $\mathcal{B}$. Macierz T_j nazywamy macierzą sieciową prądową. Przy pomocy macierzy sieciowej prądowej można wyznaczyć współrzędne i_g dowolnego wektora z przestrzeni prądowej $\hat{\mathcal{J}}$ znając współrzędne ${}_d^i k$ wektora prądów dopełnienia

$$i_g = t_g^k \, {}_d^i k. \tag{19}$$

Zastanówmy się teraz, kiedy macierze T_j i T_v są identyczne. Zauważmy w tym celu, że jeżeli przy rozwiązywaniu systemu prądowego

$$S_W^M \, \mathbf{J} = 0$$

oraz przy doborze cykli niezależnych (warunek konieczny i wystarczający aby $\mathbf{C}_i$ odpowiadał cyklowi [1])

$$S_W^M \, \mathbf{C}_i = 0$$

wybrano to samo drzewo, te same zmienne zależne i niezależne, to bazy przestrzeni $\hat{\mathcal{J}}$ i $\hat{\mathcal{C}}$ są identyczne.

Analogicznie wybierając to samo drzewo przy rozwiązywaniu systemu napięć $\mathbf{V} C^M_{\hat{K}} = 0$ co przy doborze cykli niezależnych S^M_W $\mathbf{C}_i = 0$ otrzymamy, że $\hat{\mathcal{V}}$ i $\hat{\mathcal{G}}$ mają tę samą bazę. W tej sytuacji macierze sieciowe, prądowe i napięciowa są identyczne

$$T_j = T_v = T^{def} = \left[\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2, \ldots, \mathbf{V}^{n-1}, \mathbf{J}^n, \mathbf{J}^{n+1}, \ldots, \mathbf{J}^m\right].$$

Tak zdefiniowaną macierz sieciową T, niezależnie od tego że $T_j = T_v$, spełnia następujące:

Twierdzenie 2

Wszystkie macierze sieciowe T posiadają ten sam wyznacznik równy liczbie drzew grafu G będącego odwzorowaniem rozważanej sieci.

Dowód

Przy dowodzie tego twierdzenia wystarczy rozpatrywać macierze

$$T' = \left[\mathbf{S}^1, \mathbf{S}^2, \ldots, \mathbf{S}^{n-1}, \mathbf{C}_n, \ldots, \mathbf{C}_m\right],$$

gdyż każdy wektor $\mathbf{S}^i$ daje się przedstawić jako suma pewnych wektorów $\mathbf{V}^i$ $\mathbf{V}^j, \ldots$ ze znakiem "+" lub "-", a każdy wektor $\mathbf{C}_i$ daje się przedstawić jako suma pewnych wektorów $\mathbf{J}^i$, $\mathbf{J}^k, \ldots$ ze znakiem "+" lub "-" co jak wiadomo nie zmienia wartości wyznacznika.

Utwórzmy z macierzy T, macierz Grama

$$G = \overset{*}{T}{}' \, T',$$

gdzie:

$\overset{*}{T}{}'$ jest macierzą transponowaną macierzy T'.

Zachodzi

$$G = \left[\begin{array}{c|c} P^K_K & 0 \\ \hline 0 & R^D_D \end{array}\right],$$

gdzie:

$|K| = n-1$, $|D| = m-n+1$, $R^D_D = C^D_M \; C^M_D$, $P^K_K = S^K_M \; S^M_K$ na mocy wzoru Trenta

$$\det G = \det P^K_K \det R^D_D = t^2,$$

gdzie:

t jest liczbą drzew w grafie.

Z drugiej strony

$$\det G = \det \overset{*}{T}' \det T' = [\det T]^2$$

a więc

$$\det T' = t.$$

W dotychczasowych rozważaniach nie uwzględniono zależności funkcyjnych między przestrzenią napięciową i prądową. W realnych układach zależności takie prawie zawsze istnieją. Oznacza to, że nie każdy stan napięciowy i prądowy jest równocześnie możliwy.
Mając na uwadze definicję przewodności jednej gałęzi zdefiniujemy przewodność sieci.

Definicja

Przewodnością systemową nazywamy każde przekształcenie (n-1) wymiarowej przestrzeni napięciowej w przestrzeń prądową.

$$f(\hat{\mathcal{V}}) = \hat{\mathcal{I}}', \tag{20}$$

gdzie:
$\hat{\mathcal{I}}'$ - dowolna podprzestrzeń przestrzeni prądowej,
f - przewodność systemowa.

Dla łatwiejszej analizy własności przewodności systemowej weźmy pod rozwagę jej postać liniową. Niech $f = \hat{Y}$ będzie przewodnością systemową liniową, określoną w przestrzeni unitarnej $\hat{U}^m$. Tak więc

$$\hat{Y}\,\hat{\mathcal{V}} = \hat{\mathcal{I}}. \tag{21}$$

Z definicji wynika, że warunkiem koniecznym istnienia przewodności systemowej jest istnienie (m-n+1) zależności funkcyjnych.

$$i_g = Y_g^k\ v_k. \tag{22}$$

Z drugiej strony wiadomo, że stan prądowy w sieci określony przez wektor prądowy i_g jest wyznaczony jednocześnie jeżeli jest dany wektor prądów dopełnienia $\underset{d}{i}k$:

$$i_g = t_g^k\ \underset{d}{i}k.$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia przewodności systemowej jest istnienie (m-n+1) liniowo niezależnych form liniowych

$$\overset{i}{d}g = Y^k_{dg} \; \overset{v}{d}k \tag{23}$$

czyli istnienie m^2 przewodności gałęziowych Y^k_{dg} (wzajemnych i własnych) przyporządkowanych gałęziom dopełnienia.
Wiadomo, że stan napięciowy w sieci v_{g} jest wyznaczony jednoznacznie, jeżeli jest dany wektor napięć drzewa $\overset{v}{t}g$.

$$v_g = t^k_g \; \overset{v}{t}k .$$

Zachodzi

$$v_g = \overset{v}{d}g + \overset{v}{t}g$$

a więc

$$\overset{v}{d}g = (t^k_g - \delta^k_g)\; \overset{v}{t}k . \tag{24}$$

Nasuwając lewostronnie na wzór (23) wielkość t^g_λ i podstawiając wzór (24) otrzymamy

$$t^g_\lambda \; \overset{i}{d}g = t^g_\lambda \; Y^k_{dg} \; (t^\mu_k - \delta^\mu_k) \; \overset{v}{t}\mu . \tag{25}$$

Oznaczając macierz odwrotną macierzy sieciowej $\left[t^\mu_k\right]$ przez

$$\left[t^\mu_k\right]^{-1} = \left[\tilde{t}^\mu_k\right]$$

możemy napisać

$$\overset{v}{t}\mu = \tilde{t}^\nu_\mu \; v_\nu .$$

Równanie (25) będzie miało następującą postać

$$i_\lambda = t^g_\lambda \; \overset{i}{d}g = t^g_\lambda \; Y^k_{dg} \; (t^\mu_k - \delta^\mu_k) \; \tilde{t}^\nu_\mu \; v_\nu . \tag{26}$$

Ponieważ

$$t^\mu_k \; \tilde{t}^\nu_\mu = \delta^\nu_k$$

wzór (26) będzie miał postać

$$i_\lambda = t^g_\lambda \; Y^k_{dg} \; (\delta^\nu_k - \tilde{t}^\nu_k) \; v_\nu . \tag{27}$$

Z wywodów przeprowadzonych powyżej wynika, że istnienie przewodności systemowej Y_{λ}^{ν} uwarunkowane jest istnieniem przewodności $Y_{d\varepsilon}^{k}$, przy czym

$$Y_{\lambda}^{\nu} = t_{\lambda}^{\varepsilon} \; Y_{d\varepsilon}^{k} \; (\delta_{k}^{\nu} - \tilde{t}_{k}^{\nu}). \tag{28}$$

Należy zwrócić uwagę na fakt, że macierz $\left[Y_{d\varepsilon}^{k} \right]$ może być rzędu (m-n+1) lub mniejszego. Jeżeli macierz $\left[Y_{d\varepsilon}^{k} \right]$ jest rzędu (m-n+1) to istnieje jej macierz odwrotna $\left[Y_{d\varepsilon}^{k} \right]^{-1}$. Nie oznacza to jednak, że istnieje macierz odwrotna $\left[Y_{\lambda}^{\nu} \right]^{-1}$. Może to zachodzić tylko wtedy gdy m-n+1 = n-1 [3].

LITERATURA

1. Berge Cl.: Theorie des graphes et ses applications. Dunod. Paryż 1958.
2. Cholewicki T.: Macierzowa analizy obwodów liniowych. PWN, Warszawa 1958.
3. Kłos A.: Algebraiczny model systemu elektrycznego. Instytut Energetyki Warszawa 1967.
4. Opial Z.: Algebra wyższa. Wydanie III, 1967.

Przyjęto do druku w lutym 1975 r.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МАТРИЦЫ СЕТИ

Р е з ю м е

Особое внимание обпащается на факт, что матрица сети Т является алгебраической записью топологии графика, который, в свою очередь, есть копией сети.

Установлено, что все возможные матрицы для данной сети обладают одним общим свойством их определитель равен числу ветов графика. Этому главному положению предшествует иное - о некотором свойстве циклометрической матрицы. Рассуждения эти проведены путем использования модели пространства напряжения и тока с применением тенсорной записи в случаях, упрощающих расчеты.

ABOUT CERTAIN PROPERTIES OF THE NET MATRIX

S u m m a r y

Special attention is given to the fact that the T-net matrix is the algebraic notation of the graph topology, the latter being the representation of the net. It is proved that all net matrices available for the given net possess a common property namely, their determinant being equal to the number of the graph tress.

This main statement is preceded by another statement concerning the certain property of the cyclometric matrix. The considerations are made using the current and voltage space models and applying tensorial notations in situations simplifying calculations.