ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981
Seria: AUTOMATYKA z. 61 Nr kol. 701

Jerzy KLAMKA

BADANIE STEROWALNOŚCI DLA NIEKTÓRYCH UKŁADÓW OPISANYCH RÓWNANIAMI RÓŻNICZKOWYMI CZĄSTKOWYMI TYPU PARABOLICZNEGO

Streszczenie. W pracy podano definicje aproksymacyjnej sterowalności, aproksymacyjnej brzegowej sterowalności oraz aproksymacyjnej całkowitej sterowalności dla układów dynamicznych opisanych równaniami różniczkowymi, cząstkowymi liniowymi typu parabolicznego z warunkami brzegowymi typu mieszanego. Sformułowano kryteria badania różnych rodzajów sterowalności omawianych układów dynamicznych. Kryteria te, mające postać warunków koniecznych i wystarczających, zostały wyprowadzone przy użyciu wartości własnych i wektorów własnych. Rozpatrzono również szereg szczególnych przypadków oraz podano kilka przykładów.

Zagadnienia sterowalności układów dynamicznych opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi były w ostatnich latach wielokrotnie rozpatrywane w literaturze [1-10]. W niniejszej pracy podano definicje aproksymacyjnej brzegowej sterowalności oraz aproksymacyjnej całkowitej sterowalności dla układów dynamicznych opisanych liniowymi równaniami różniczkowymi typu parabolicznego z mieszanymi warunkami brzegowymi. Sformułowano warunki konieczne i wystarczające różnych rodzajów sterowalności dla rozpatrywanych układów dynamicznych. Rozpatrzono także szereg przypadków szczególnych, dotyczących układów z warunkami brzegowymi typu Dirichleta oraz z warunkami brzegowymi typu Neumanna. Korzystając z ogólnych kryteriów sterowalności dla przypadku mieszanych warunków brzegowych, otrzymano warunki konieczne i wystarczające sterowalności tych układów. W końcowej części pracy zamieszczono kilka przykładów ilustrujących zastosowanie podanych warunków sterowalności. Przykłady te dotyczą przypadku układu o stałych współczynnikach i warunkach brzegowych typu Dirichleta.

Niech będzie dany układ dynamiczny S o rozłożonych parametrach opisany liniowym równaniem różniczkowym cząstkowym typu parabolicznego z mieszanymi warunkami brzegowymi, następującej postaci:

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x}\right) + q(x)w(t,x) + b(x)u(t) \tag{1}$$

określonym dla $(t,x) \in [0,T] \times [0,1]$, spełniającym warunki brzegowe

$$(Fw)(t,x) = Bv(t) \tag{2}$$

oraz warunki początkowe

$$\lim_{t\to 0^+} \|w(t,x) - w_0(x)\|_{L^2[0,1]} \qquad w_0(x) \in L^2[0,1] \tag{3}$$

gdzie

$$p(x) \in C^2[0,1],\ p(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x \in [0,1],\ q(x) \in C^0[0,1],\ b(x) \in L^2[0,1]$$

B jest stałą macierzą 2 x 2 - wymiarową postaci następującej

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Operator brzegowy F: $H^2[0,1] \to R^2$, ($H^2[0,1]$ jest przestrzenią Sobolewa) jest określony następującą równością

$$(Fw)(t,x) = \begin{bmatrix} a_{00}w(t,0) + a_{10}\frac{\partial w}{\partial x}(t,0) \\ a_{01}w(t,1) + a_{11}\frac{\partial w}{\partial x}(t,1) \end{bmatrix} \tag{5}$$

gdzie

$$a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11} \in R, \quad a_{00}^2 + a_{10}^2 \neq 0, \quad a_{01}^2 + a_{11}^2 \neq 0 \tag{6}$$

W przypadku warunków brzegowych typu Dirichleta ($a_{10} = a_{11} = 0$, $a_{00} = a_{01} = 1$), operator brzegowy $F = F_D$ jest postaci

$$(F_Dw)(t,x) = \begin{bmatrix} w(t,0) \\ w(t,1) \end{bmatrix} \tag{7}$$

a odpowiedni układ dynamiczny oznacza się symbolem S_D.
W przypadku warunków brzegowych typu Neumanna ($a_{00} = a_{01} = 0$, $a_{10} = a_{11} = 1$), operator brzegowy $F = F_N$ jest postaci

$$(F_Nw)(t,x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x}(t,0) \\ \frac{\partial w}{\partial x}(t,1) \end{bmatrix} \tag{8}$$

a odpowiedni układ dynamiczny oznacza się symbolem S_N.

Układy dynamiczne o zerowych warunkach brzegowych (B = 0), oznacza się odpowiednio symbolami S_0, S_{0D}, S_{0N}, natomiast układy dynamiczne, dla których $b(x) = 0$, dla $x \in [0,1]$, oznacza się odpowiednio symbolami S^0, S^0_D, S^0_N. Dla przypadku szczególnego, gdy $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, dla $x \in [0,1]$

wprowadza się oznaczenia $\bar{S}$, $\bar{S}_o$, $\bar{S}^o$, $\bar{S}_{oD}$, $\bar{S}_{oN}$, $\bar{S}^o_D$, $\bar{S}^o_N$. Zakłada się, że sterowania dopuszczalne $u(t) \in L^2[0,T] = U$ oraz $v(t) \in L^2[0,T;\, R^2] = V$. Przy powyższych założeniach równanie (1) posiada jednoznaczne rozwiązanie $w(t,x)$, spełniające warunki brzegowe (2) i warunki początkowe (3) oraz określone w obszarze $[0,T]\times[0,1]$.

Definicja. Układ dynamiczny S,(S^o) nazywa się aproksymacyjnie (brzegowo, całkowicie), sterowalnym w przedziale $[0,T]$, jeżeli dla dowolnego stanu w chwili $t = 0$, $w_o(x) \in L^2[0,1]$, dowolnej funkcji $w_T(x) \in L^2[0,1]$ oraz dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieje sterowanie dopuszczalne $(u(t),v(t)) \in U\times V$, $(v(t)\in V)$, $(u(t)\in U)$ takie, że odpowiadająca temu sterowaniu trajektoria $w(t,x)$ układu dynamicznego S,(S^o),(S_o), spełnia następujący warunek

$$\| w(T,x) - w_T(x)\|_{L^2[0,1]} \leqslant \varepsilon. \tag{9}$$

Celem uzyskania efektywnych kryteriów aproksymacyjnej sterowalności zastępuje się układ dynamiczny S, przeliczalnym układem liniowych, stacjonarnych równań różniczkowych zwyczajnych.

Niech $A: D(A) \to L^2[0,1]$, będzie liniowym nieograniczonym operatorem, zdefiniowanym następującą równością

$$(Aw)(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x}\right) + q(x)w(t,x) \tag{10}$$

o dziedzinie

$$D(A) = \left\{ w(t,x) \in L^2[0,1] :\ (Aw)(t,x) \in L^2[0,1],\ (Fw)(t,x) = 0 \right\} \tag{11}$$

Wiadomo [1], [4], [6], [7], [8], że operator A jest samosprzężony, a jego wartości własne λ_i,$(i=1,2,3,\ldots)$ są rzeczywiste i pojedyncze, a odpowiadające im funkcje własne $g_i(x)$, $x \in [0,1]$,$(i=1,2,3,\ldots)$, tworzą przeliczalną bazę ortogonalną w przestrzeni $L^2[0,1]$. Zatem rozwiązanie $w(t,x)$ równania (1) można przedstawić w postaci

$$w(t,x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} w_i(t)g_i(x) \qquad (t,x) \in [0,T]\times[0,1], \tag{12}$$

gdzie współczynniki $w_i(t)$,$(i=1,2,3,\ldots)$, są rozwiązaniami następującego przeliczalnego układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{dw_i(t)}{dt} = \lambda_i w_i(t) + b_i u(t) + B_i v(t) \qquad i=1,2,3,\ldots \tag{13}$$

gdzie

$$b_i = \int_0^1 b(x)g_i(x)dx \qquad i=1,2,3,\ldots \tag{14}$$

$$B_i = \left[f_{oi}, f_{1i}\right]B \qquad i=1,2,3,\ldots \tag{15}$$

$$f_{oi} = p(0)\,\frac{a_{oo}\frac{dg_i}{dx}(0) - a_{1o}g_i(0)}{a_{oo}^2 + a_{1o}^2} \qquad i=1,2,3,\ldots \tag{16}$$

$$f_{1i} = p(1)\,\frac{-a_{o1}\frac{dg_i}{dx}(1) + a_{11}g_i(1)}{a_{o1}^2 + a_{11}^2} \qquad i=1,2,3,\ldots \tag{17}$$

Korzystając z wprowadzonych powyżej oznaczeń, można sformułować warunki konieczne i wystarczające aproksymacyjnej (brzegowej, całkowitej), sterowalności układu dynamicznego S ,(S^o) , (S_o).

Twierdzenie 1. Układ dynamiczny S jest aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd}\ \left[b_i, B_i\right] = 1 \quad \text{dla} \quad i=1,2,3,\ldots \tag{18}$$

Dowód. Warunek (9) w definicji aproksymacyjnej sterowalności jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje możliwość dowolnej zmiany współczynników $w_i(T)$, dla $i=1,2,3,\ldots$, co jest równoważne sterowalności wszystkich układów dynamicznych opisanych zależnościami (13). Stąd, wykorzystując znane [8], [9] warunki konieczne i wystarczające sterowalności liniowych stacjonarnych układów dynamicznych o parametrach skupionych, otrzymuje się bezpośrednio tezę twierdzenia 1.

Twierdzenie 2. Układ dynamiczny S_D jest aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd}\ \left[b_i, b_{11}p(0)\frac{dg_i}{dx}(0) - b_{21}p(1)\frac{dg_i}{dx}(1),\right.$$

$$\left., b_{12}p(0)\frac{dg_i}{dx}(0) - b_{22}p(1)\frac{dg_i}{dx}(1)\right] = 1 \qquad \text{dla } i=1,2,3,\ldots \tag{19}$$

Dowód. Ponieważ dla układu dynamicznego S_D, $a_{1o} = a_{11} = 0$ oraz $a_{oo} = a_{o1} = 1$, więc na mocy zależności (14), (15), (16), (17) oraz twierdzenia 1 uzyskuje się tezę twierdzenia 2.

Twierdzenie 3. Układ dynamiczny S_N jest aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd}\left[b_i, b_{21}p(1)g_i(1) - b_{11}p(0)g_i(0),\right.$$

$$\left. b_{22}p(1)g_i(1) - b_{12}p(0)g_i(0)\right] = 1 \qquad \text{dla } i=1,2,3,\ldots \tag{20}$$

Dowód. Ponieważ dla układu dynamicznego S_n, $a_{oo} = a_{o1} = 0$ oraz $a_{1o} = a_{11} = 1$, więc na mocy zależności (14), (15), (16), (17) oraz twierdzenia 1 uzyskuje się tezę twierdzenia 3.

Wniosek 1. Układ dynamiczny S^o jest aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd}\left[B_i\right] = 1 \qquad \text{dla } i=1,2,3,\ldots \tag{21}$$

Dowód. Ponieważ dla układu dynamicznego S^o, $b(x) = 0$ dla $x \in [0,1]$, więc także $b_i = 0$ dla $i=1,2,2,\ldots$ Stąd, na mocy twierdzenia 1 uzyskuje się tezę wniosku 1.

Wniosek 2. Układ dynamiczny S_o jest aproksymacyjnie całkowicie sterowalny w przedziale $[0,T]$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$b_i \neq 0 \qquad \text{dla } i=1,2,3,\ldots \tag{22}$$

Dowód. Ponieważ dla układu dynamicznego S_o, $B = 0$, więc także $B_i = 0$ dla $i=1,2,3,\ldots$ Stąd, na mocy twierdzenia 1 uzyskuje się tezę wniosku 2.

Wniosek 3. Jeżeli układ dynamiczny S, (S^o), (S_o) jest aproksymacyjnie (brzegowo, całkowicie) sterowalny w przedziale $[0,T]$, to jest on także aproksymacyjnie (brzegowo, całkowicie) sterowalny w dowolnym przedziale $[0,\tilde{T}]$, $(0<\tilde{T})$.

Wniosek 4. Jeżeli $b_{12} = b_{21} = 0$, to układ dynamiczny S_N^o jest aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w przedziale $[0,T]$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\left(p(0)\left(a_{oo}\frac{dg_i}{dx}(0) - a_{1o}g_i(0)\right)\right)^2 b_{11}^2 +$$

$$+ \left(p(1)\left(a_{11}g_i(1) - a_{o1}\frac{dg_i}{dx}(1)\right)\right)^2 b_{22}^2 \neq 0 \quad i=1,2,3,\ldots \tag{23}$$

Wniosek 5. Jeżeli $b_{12} = b_{22} = 0$, to układ dynamiczny S^o jest aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w przedziale $[0,T]$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\left(b_{11}p(0)\,\frac{a_{oo}\frac{dg_i}{dx}(0) - a_{1o}g_i(0)}{a_{oo}^2 + a_{1o}^2} + b_{21}p(1)\,\frac{a_{11}g_i(1) - a_{o1}\frac{dg_i}{dx}(1)}{a_{o1}^2 + a_{11}^2}\right)^2 \neq 0 \quad i=1,2,3,\ldots \tag{24}$$

Wniosek 6. Jeżeli $b_{12} = b_{21} = 0$, to układ dynamiczny S_D^0 jest aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w przedziale $[0,T]$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(b_{11}p(0)\frac{dg_i}{dx}(0))^2 + (b_{22}p(1)\frac{dg_i}{dx}(1))^2 \neq 0 \qquad i=1,2,3,\ldots \qquad (25)$$

Wniosek 7. Jeżeli $b_{12} = b_{22} = 0$, to układ dynamiczny S_N^0 jest aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[0,T]$ brzegowo, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(b_{21}p(1)g_i(1) - b_{11}p(0)g_i(0))^2 \neq 0 \qquad i=1,2,3,\ldots \qquad (26)$$

Wniosek 8. Jeżeli $b_{12}=b_{21} = 0$, to układ dynamiczny S_N^0 jest aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w przedziale $[0,T]$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(b_{11}p(0)g_i(0))^2 + (b_{22}p(1)g_i(1))^2 \neq 0 \qquad i=1,2,3,\ldots \qquad (27)$$

Wniosek 9. Jeżeli $b_{12} = b_{22} = 0$, to układ dynamiczny S_D^0 jest aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w przedziale $[0,T]$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(b_{11}p(0)\frac{dg_i}{dx}(0) - b_{21}p(1)\frac{dg_i}{dx}(1))^2 \neq 0 \qquad i=1,2,3,\ldots \qquad (28)$$

Powyższe wnioski wynikają bezpośrednio z twierdzeń 1, 2, 3 oraz zależności (7) i (8).

Przykład 1. Niech będzie dany układ dynamiczny $\bar{S}_D^0$, dla którego $b_{12} = b_{22} = 0$. Wiadomo, [3], [7], [8], że dla układu dynamicznego $\bar{S}_D$ wartości własne i funkcje własne wyrażają się następującymi wzorami

$$\lambda_i = -(i\pi)^2 \qquad i=1,2,3,\ldots \qquad (29)$$

$$g_i(x) = \sqrt{2}\sin(i\pi x) \qquad x \in [0,1] \qquad i=1,2,3,\ldots \qquad (30)$$

Funkcje własne $g_i(x)$, $i=1,2,3,\ldots$ tworzą ortonormalny układ zupełny w przestrzeni $L^2[0,1]$.

Korzystając z zależności (30) otrzymuje się

$$\frac{dg_i(x)}{dx} = i\pi\sqrt{2}\cos(i\pi x) \qquad x \in [0,1] \qquad i=1,2,3,\ldots$$

Stąd

$$\frac{dg_i}{dx}(0) = i\pi\sqrt{2} \qquad i=1,2,3,\ldots$$

$$\frac{dg_i}{dx}(1) = i\pi\sqrt{2}\cos(i\pi) = i\pi\sqrt{2}(-1)^i \qquad i=1,2,3,\ldots$$

Ponieważ $p(0) = p(1) = 1$, zatem na mocy wniosku 9 rozpatrywany układ dynamiczny $\bar{S}_D^o$ jest aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w przedziale $[0,T]$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(b_{11} - b_{21}(-1)^i)^2 \neq 0 \qquad i = 1,2,3,\ldots$$

co jest równoważne następującemu warunkowi

$$|b_{11}| \neq |b_{21}|$$

Przykład 2. Niech będzie dany układ dynamiczny $\bar{S}_{oD}$, dla którego funkcja $b(x)$ spełnia następujący warunek

$$b(x) = -b(1 - x) \qquad x \in [0,1]$$

Wykorzystując zależność (30) otrzymuje się

$$b_i = \int_0^1 b(x)g_i(x)dx = \int_0^1 b(x)\sqrt{2}\sin(i\pi x)dx = \begin{cases} 0, & \text{dla } i=2k-1 \\ \neq 0, & \text{dla } i=2k \end{cases}$$

gdzie $k=1,2,3,\ldots$

Zatem na mocy twierdzenia 1 oraz wniosku 2, rozpatrywany układ dynamiczny $\bar{S}_{oD}$ nie jest aproksymacyjnie całkowicie sterowalny w przedziale $[0,T]$.

Przykład 3. Niech będzie dany układ dynamiczny $\bar{S}_{oD}$, dla którego: $b_{11} = -b_{21}$, $b_{12} = b_{22} = 0$. Na podstawie przykładu 1 wiadomo, że układ ten nie jest sterowalny. Wybierzmy stan początkowy $w_o(x)$ tak, aby spełniał następujący warunek

$$w_o(x) = -w_o(1 - x) \quad \text{dla} \quad x \in [0,1] \tag{31}$$

Stąd, podobnie jak w przykładzie 2 uzyskuje się równości

$$w_{oi} = \int_0^1 w_o(x)g_i(x)dx = \int_0^1 w_o(x)2\sin(i\pi x)dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } i=2k-1 \\ \neq 0 & \text{dla } i=2k \end{cases} \tag{32}$$

$k=1,2,3,\ldots$

Ponieważ $b_{11} = -b_{21}$, więc na mocy (15), (16), (17) oraz przykładu 1 otrzymuje się zależności

$$B_i = \left[i\pi\sqrt{2}b_{11},\ -i\pi\sqrt{2}(-1)^i b_{21}\right] = \left[i\pi\sqrt{2}b_{11},\ i\pi\sqrt{2}(-1)^i b_{11}\right] \qquad i=1,2,3,\ldots$$

$$B_i v(t) = (1 + (-1)^i)i\pi\sqrt{2}b_{11}v_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i=2k-1 \\ \neq 0 & \text{dla } i=2k \end{cases} \qquad i=1,2,3,\ldots$$

Zatem, uwzględniając relacje (13) oraz (29) otrzymuje się równania różniczkowe zwyczajne dla funkcji $w_i(t)$, $i=1,2,3,\ldots$

$$\frac{dw_i(t)}{dt} = \begin{cases} -(i\pi)^2 w_i(t) & \text{dla} \quad i=2k-1 \\ -(i\pi)^2 w_i(t) + 2\sqrt{2}i\pi b_{11}v_1(t) & i=2k \end{cases} \qquad k=1,2,3,\ldots \tag{33}$$

z warunkami początkowymi $w_i(0) = w_{0i}$, $i=1,2,3,\ldots$

Stąd, biorąc pod uwagę zależności (32) uzyskuje się

$$w_i(t) = \begin{cases} \exp(-(i\pi)^2 t)w_{0i} = 0 & \text{dla} \quad i=2k-1 \\ \exp(-(i\pi)^2 t)w_{0i} + \int_0^1 2\sqrt{2}i\ \exp(-(i\pi)^2(t-\tau))b_{11}v_1(\tau)d\tau & \text{dla} \quad i=2k, \end{cases}$$
$$k=1,2,3,\ldots \tag{34}$$

Zatem na mocy (12), (30) oraz (34) trajektoria układu $w(t,x)$ wychodząca ze stanu początkowego $w_0(x)$ jest postaci następującej

$$w(t,x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} w_i(t)g_i(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} w_{2k}(t)g_{2k}(x) = -\sum_{k=1}^{k=\infty} w_{2k}(t)g_{2k}(1-x) = -w(t,1-x) \tag{35}$$

Ponadto, ponieważ $g_{2k}(0.5) = 2\sin(0.5i\pi) = 0$, dla $k=1,2,3,\ldots$, więc na mocy (35) otrzymuje się zależność następującą

$$w(t,0.5) = 0 \quad \text{dla} \quad t \geqslant 0$$

Przykład 4. Niech będzie dany układ dynamiczny $\bar{\bar{S}}_D^0$, dla którego: $b_{12} = b_{22} = 0$, $b_{11} = b_{21}$. Na podstawie przykładu 1 wiadomo, że układ ten nie jest sterowalny. Wybieramy stan początkowy $w_0(x)$ tak, aby spełniał następujący warunek

$$w_0(x) = w_0(1-x) \quad \text{dla} \quad x \in [0,1] \tag{36}$$

Stąd, korzystając z zależności (30), podobnie jak w przykładzie 2 uzyskuje się następujące równości

$$w_{oi} = \int_0^1 w_o(x)g_i(x)dx = \int_0^1 w_o(x)\ 2\sin(i\pi x)dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } i=2k \\ \neq 0 & \text{dla } i=2k-1 \end{cases} \qquad k=1,2,3,\dots \tag{37}$$

Ponieważ $b_{11} = b_{21}$, więc na mocy (15), (16), (17) oraz przykładu 1 otrzymuje się zależności

$$B_i = \left[i\pi\sqrt{2}b_{11},\ -i\pi\sqrt{2}(-1)^i b_{21}\right] = \left[i\pi\sqrt{2}b_{11},\ i\pi\sqrt{2}(-1)^{i+1}b_{11}\right] \qquad i=1,2,\dots$$

$$B_i v(t) = (1+(-1)^{i+1})i\pi\sqrt{2}\ b_{11}v_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i=2k \\ \neq 0 & \text{dla } i=2k-1 \end{cases} \qquad k=1,2,3,\dots$$

Zatem, uwzględniając relacje (13) oraz (29) otrzymuje się równania różniczkowe zwyczajne dla funkcji $w_i(t)$, $i=1,2,3,\dots$

$$\frac{dw_i(t)}{dt} = \begin{cases} -(i\pi)^2 w_i(t) & \text{dla } i=2k \\ -(i\pi)^2 w_i(t) + 2\sqrt{2}\ i\pi b_{11}v_1(t) & \text{dla } i=2k-1 \end{cases} \qquad k=1,2,3,\dots \tag{38}$$

z warunkami początkowymi $w_i(0) = w_{oi}$, $i=1,2,3,\dots$

Stąd, biorąc pod uwagę zależności (37) uzyskuje się

$$w_i(t) = \begin{cases} \exp(-(i\pi)^2 t)w_{oi} = 0 & \text{dla } i=2k \\ \exp(-(i\pi)^2 t)w_{oi} + \int_0^1 2\sqrt{2}\ i\pi\exp(-(i\pi)^2(t-\tau))b_{11}v_1(\tau)d\tau & \text{dla } i=2k-1, \end{cases}$$

$$k=1,2,3,\dots, \tag{39}$$

Zatem na mocy (12), (30) oraz (39) trajektoria układu $w(t,x)$ wychodząca ze stanu początkowego $w_o(x)$ jest postaci nastepującej

$$w(t,x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} w_i(t)g_i(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} w_{2k-1}(t)g_{2k-1}(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} w_{2k-1}g_{2k-1}(1-x) =$$

$$= w(t,1-x) \tag{40}$$

czyli jest funkcją parzystą względem środkowej odcinka $[0,1]$.

Przedstawiona w pracy metoda badania aproksymacyjnej sterowalności może być zastosowana do szerszej klasy układów dynamicznych o parametrach rozłożonych, określonych w przestrzeniach n-wymiarowych, a także do układów dynamicznych opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi eliptycznymi lub hiperbolicznymi. Ponadto, można tę metodę wykorzystać do badania różnych rodzajów sterowalności układów dynamicznych o parametrach rozłożonych z wielokrotnymi opóźnieniami, zarówno w sterowaniu brzegowym jak i w sterowaniu rozłożonym. Mankamentem przedstawionej metody jest konieczność wyznaczania wartości własnych oraz odpowiadających im funkcji własnych operatora liniowego.

Niniejszy artykuł stanowi rozszerzoną w wyniku dyskusji wersję referatu [11], wygłoszonego w dniu 29.XI.1979 r. na Seminarium Urządzeń i Układów Automatyki.

LITERATURA

[1] Glothin G.E.: A modal control model for distributed systems with application to boundary controllability. International Journal of Control, vol. 20, no 3, s. 417-432, 1974.

[2] Glothin G.E.: Controllability, observability and duality in an distributed parameter system with continouous and point spectrum. IEEE Transactions, vol. AC-23, no. 4, s. 687-690, 1978.

[3] Fattorini H.O.: Boundary control of temperature distributions in a parallelepipedeon. SIAM Journal on Control, vol. 13, no 1, s. 1-13, 1975.

[4] Fattorini H.O., Russell D.L.: Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 43, no 4, s. 272-292, 1971.

[5] Russell D.L.: A unified boundary controllability theory for hiperbolic and parabolic partial differential equations. Studies in Applied Mathematics, vok. LII, no 3, s. 189-211, 1973.

[6] Sakawa Y.: Controllability for partial differential equations of parabolic type. SIAM Journal on Control, vol. 12, no 3, 1974.

[7] Seidman T.I.: Approximate boundary controllability for the heat equation. J. Math. Analysis and App., vol. 23, no 5, s. 699-703,1968.

[8] Triggiani R.: Controllability and observability in Banach space with bounded operators. SIAM J. Control, vol. 13, no 2, 1975.

[9] Triggiani R.: Extensions of rank conditions for controllability and observability to Banach space and unbounded operators. SIAM Journal on Control, vol. 14, no 2, s. 313-338, 1976.

[10] Wang P.K.C.: Optimal control of parabolic systems with boundary conditions involving time delays. SIAM, vol. 13, no 2, 1975.

[11] Klamka J.: Problematyka sterowalności dla układów opisanych równaniami cząstkowymi. Referat nr 258, Seminarium Urządzeń i Układów Automatyki, Gliwice 1979.

Złożono w redakcji 13.12.79 r.
W formie ostatecznej 20.03.80 r.

Recenzent:
Doc. dr inż. Reginald Krzyżanowski

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Р е з ю м е

В статье дано определения приближённой управляемости, приближённой краевой управляемости и приближённой глобальной управляемости для динамических систем описываемых линейными управлениями параболического типа с смешанными краевыми условиями. Определены критерия испытания для определения разного вида управляемости динамических систем. Эти критерии имеют формы необходимых и достаточных условий управляемости сформулированы на языке собственных чисел и собственных векторов. Рассмотрено несколько особенных случаев и проведено несколько примеров.

THE PROBLEMS OF CONTROLLABILITY FOR SYSTEMS DESCRIBED BY PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

S u m m a r y

In this paper the definitions of approximate controllability, approximate boundary controllability and approximate complete controllability are given for dynamical systems described by linear partial differential equations of parabolic type with mixed boundary conditions. Criterions for investigation for different types of controllability are formulated. These criterions have the form of necessary and sufficient conditions and have been derived by using the eigenvalues and eigenvectors. Moreover several special cases are considered and some examples are given.