ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1982

Seria: AUTOMATYKA z. 63 Nr kol. 735

Stanisław PAWLIK

Politechnika Śląska

MAKSYMALNO-WYDAJNOŚCIOWA OPTYMALIZACJA PRZYDZIAŁU W OBIEKCIE O ZŁOŻONEJ STRUKTURZE

Streszczenie. W referacie przedstawiono problem przydziału pracowników na stanowiska o złożonej strukturze połączeń. Zaprezentowano metodę wyznaczania przydziału maksymalizującego wydajność zespołu stanowisk pracy. Wskazano niektóre możliwości zastosowania opisanego modelu optymalizacji.

1. WPROWADZENIE

W klasycznym zagadnieniu przydziału dane jest n pracowników oraz n stanowisk. Przydzielenie pracownika i do stanowiska j związane jest ze współczynnikiem oceny pracy a_{ij}. Każdego pracownika można zatrudnić tylko na jednym stanowisku, a każde stanowisko winno być obsługiwane przez dokładnie jednego pracownika. Należy przydzielić pracowników na stanowiska w sposób optymalny z uwagi na postawione kryterium F, zależnego od występujących w przydziale współczynników a_{ij}. Rozwiązaniem tego problemu jest pewna permutacja $(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ liczb $(1,2,\ldots,n)$, w której każdej p_i przyporządkowana jest jedna z wartości j $(j = 1,2,\ldots,n)$. Permutacja ta ekstremalizuje funkcję celu $F = F(a_{1p_1},a_{2p_2},\ldots,a_{np_n})$.

W zależności od interpretacji współczynników oceny i postawionego kryterium spotyka się w literaturze trzy typy zadań.

I tak, w przypadku gdy współczynniki a_{ij} oceniają kwalifikacje pracownika w sposób binarny

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 - \text{gdy pracownik i-ty może pracować na stanowisku } j \\ 0 - \text{w przypadku przeciwnym,} \end{cases} \tag{1}$$

to zadanie rozmieszczenia polega na znalezieniu rozwiązania dopuszczalnego. Efektywną metodę opartą na twierdzeniu Königa-Egerwary'ego podaje [1]. W tym problemie struktura obiektu jest nieistotna.

Z nieco innym zadaniem można się spotkać, gdy współczynniki oceny pracy a_{ij} oznaczają koszt związany z pracą pracownika i-tego na stanowisku j, a poszukuje się przydziału dającego minimalną wartość łącznego kosztu pracy. Jest to zadanie programowania liniowego [2], w którym występują zmienne x_{ij} $(i = 1,2,\ldots,n)$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ interpretowane następująco:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 - \text{jeżeli pracownik i-ty jest przydzielony na stanowisko j;} \\ 0 - \text{w przypadku przeciwnym.} \end{cases} \tag{2}$$

Należy minimalizować funkcję celu reprezentującą koszty

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{3}$$

przy spełnieniu warunków

- na każdym stanowisku pracuje jeden pracownik

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,\ldots,n; \tag{4}$$

- każdy pracownik przydzielony jest do jednego stanowiska

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n; \tag{5}$$

- na podstawie (2)

$$0 \leqslant x_{ij}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{6}$$

Również w tym zadaniu struktura powiązań stanowisk jest nieistotna.

Na uwagę zasługuje zagadnienie przydziału, w którym współczynniki a_{ij} oznaczają wydajność pracy. Wtedy kryterium optymalizacji jest wydajność całego obiektu, będącego zbiorem stanowisk. W tym przypadku struktura powiązań stanowisk odgrywa podstawową rolę. W literaturze spotyka się metody optymalizacji dla dwóch struktur połączeń stanowisk: równoległej i szeregowej. W problemie ze struktura równoległą wydajność obiektu jest równa sumie wydajności stanowisk. Jest to zadanie identyczne z zadaniem minimalno-kosztowym przydziału. Zadanie dotyczące obiektu o szeregowym połączeniu stanowisk nosi nazwę problemu "wąskiego gardła". Tu maksymalizacja wydajności całego obiektu polega na maksymalizacji wydajności najsłabszego ogniwa w szeregu stanowisk, a więc

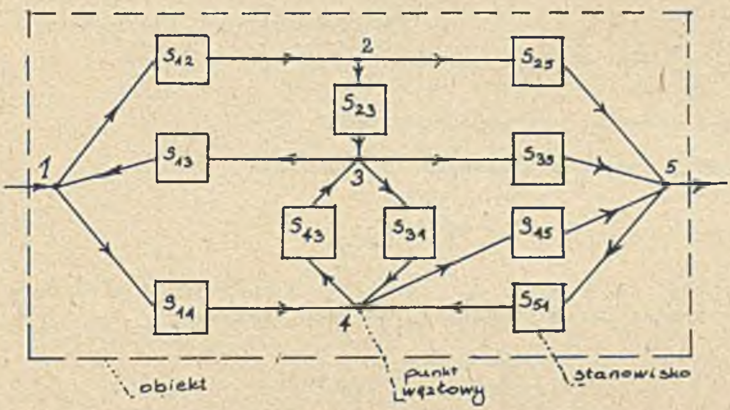
$$F = \min_{i} \left\{ a_{ip_i} \right\} \longrightarrow \max \tag{7}$$

Rozwiązanie tego zadania można uzyskać, posługując się algorytmem Grossa [1], będącym uogólnieniem wspomnianego algorytmu Königa lub też innymi algorytmami bazującymi na algorytmie Grossa [3] ... [5].

Opracowanie metody rozwiązania ogólnego problemu przydziału - dla obiektu o złożonej strukturze, z maksymalizacją wydajności jako kryterium - jest celem tej pracy.

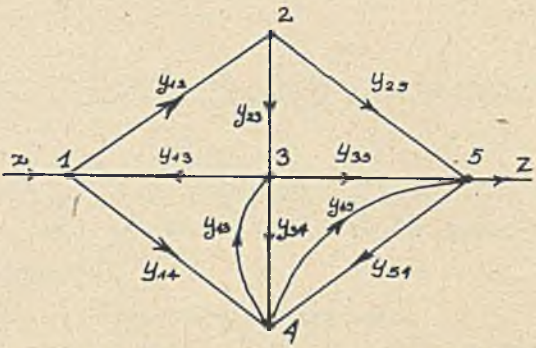
2. PROBLEM PODSTAWOWY ZAGADNIENIA PRZYDZIAŁU Z KRYTERIUM MAKSYMALNO-WYDAJNOŚCIOWYM

Rozważmy problem rozmieszczenia z maksymalizacją wydajności, posługując się przykładem obiektu pokazanego na rysunku 1. Obiekt zawiera 10 sta-



Rys. 1. Przykład obiektu o złożonej strukturze

nowisk. Punkty 1, 2, 3, 4, 5 wskazują miejsca przekazywania materiału poddawanego obróbce - do stanowiska pracy lub ze stanowiska pracy. Można je interpretować jako magazyny, środki transportu lub stanowiska kontroli jakości. Strzałki oznaczają kierunek przepływu materiału. Należy zauważyć, że istnieje tu jeden dopływ materiału do obiektu (odpowiadający liczbie przedmiotów przed obróbką dostarczonych w jednostce czasu) oraz jeden odpływ wyrobów (po obróbce). Obiekt można przedstawić w postaci grafu skierowanego, w którym krawędzie odpowiadają stanowiskom pracy, jak na rysunku 2. Można tu zauważyć analogię wydajności z przepływem w sieci transportowej. Niech y_{ij} oznacza rzeczywistą wydajność pracy na stanowisku s_{ij}, wynikającą z przepustowości stanowiska ograniczonej wydajnością pracy na tym stanowisku oraz ze struktury połączeń stanowisk (możliwości dopływu materiału). (Z powodu dwuindeksowej numeracji stanowisk w tablicach $A = a_{ij}$, $X = x_{ij}$ indeks j elementów tych tablic odpowiadający numerowi stanowisk trzeba zastąpić dwuindeksowym wskaźnikiem J_{ij}, zaś indeks i - dla odróżnienia - indeksem k).



Rys. 2. Graf obiektu pokazanego na rys. 1

Muszą spełnione być następujące warunki:

a) Dla każdej krawędzi skierowanej (stanowiska)

$$y_{ij} \leq a_{kp_{ij}} \tag{8}$$

b) Dla wierzchołka początkowego s, zwanego źródłem

$$\sum_i y_{si} - \sum_i y_{is} = z \tag{9}$$

Sumowanie odbywa się względem wszystkich wierzchołków w grafie. Jeżeli z wierzchołka p nie ma żadnej krawędzi do wierzchołka q oczywiste jest, że $y_{pq} = 0$. Wielkość z jest szukaną wydajnością obiektu.

c) Dla wierzchołka końcowego t, zwanego ujściem

$$\sum_i y_{ti} - \sum_i y_{it} = -z \tag{10}$$

d) Wszystkie pozostałe wierzchołki j, zwane pośrednimi, spełniają równość:

$$\sum_i y_{ji} - \sum_i y_{ij} = 0 \tag{11}$$

Warunek (10) można wyprowadzić z warunków (9) i (11), a więc nie jest on niezależny.

Napiszmy te warunki dla omawianego przykładu. Zmiennymi są wydajności rzeczywiste odpowiadające każdej z dziesięciu krawędzi. Mimo, że $z = y_{12} - y_{13} + y_{14}$, to jednak możemy uważać z jako jeszcze jedną zmienną. Wa-nki (9) i (11) przyjmą następującą postać

$$
\begin{aligned}
&-z + y_{12} - y_{13} + y_{14} = 0\\
&-y_{12} + y_{23} + y_{25} = 0\\
&y_{13} - y_{23} - y_{34} + y_{35} - y_{43} = 0\\
&-y_{14} - y_{34} + y_{43} + y_{45} - y_{54} = 0\\
&z - y_{25} - y_{35} - y_{45} + y_{54} = 0
\end{aligned}
\tag{12}
$$

W warunkach (8) dodatkowymi nięznanymi wielkościami są $a_{kp_{J_{ij}}}$. Aby je wyznaczyć wprowadza się dodatkowe zmienne decyzyjne $x_{kJ_{ij}}$ zgodnie z definicją (1) a spełniające równocześnie warunki (2) i (3) dla n=10. Ostatecznie warunki (8) przyjmują postać

$$
y_{ij} - \sum_{k=1}^{10} a_{kJ_{ij}}\, x_{kJ_{ij}} \leqslant 0 \tag{13}
$$

$$
i=1,2,\ldots 5 \qquad j=1,2,\ldots 5
$$

Otrzymane zadanie maksymalizacji wydajności z przy spełnieniu warunków (1), (2), (3), (12), (13) oraz oczywistego warunku:

$$
0 \leqslant y_{ij}, \quad i=1,2,\ldots,5; \quad j=1,2,\ldots,5 \tag{14}
$$

jest zadaniem programowania liniowego całkowitoliczbowego mieszanego. Zapiszemy warunki (12) w nieco inny sposób wprowadzając macierz B oraz wektor kolumnowy Y:

$$
Y^T = \left[y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{23}, y_{25}, y_{34}, y_{35}, y_{43}, y_{45}, y_{54}, z\right] \tag{15}
$$

$$
B = \begin{bmatrix}
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\
-1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1
\end{bmatrix} \tag{16}
$$

Teraz (12) można zapisać macierzowo

$$
B \cdot Y = 0 \tag{17}
$$

Widać, że B jest macierzą incydencji grafu skierowanego otrzymanego przez dodanie krawędzi z wierzchołka 5 do 1 w grafie z rys. 2. Zmienna y_{51} odpowiadająca nowej krawędzi dodatkowej jest tożsamościowo równa zmiennej z reprezentującej wydajność obiektu. Liczba wiersza macierzy incydencji jest równa liczbie wierzchołków a liczba kolumn jest równa liczbie krawędzi. W celu uproszczenia niewygodnej dwuindeksowej numeracji zmiennych y_{ij}, w dalszych rozważaniach zastępuje się zmienne y_{ij} zmiennymi w_l $(l = 1,2,\ldots,L)$, tzn. $y_{12} = w_1$ itd., a L jest liczbą wszystkich krawędzi grafu oprócz krawędzi dodatkowej, którą oznacza się przez w_{L+1}.

Można teraz przedstawić ogólną postać zadania przydziału:

Dany jest obiekt o L stanowiskach pracy. Strukturę obiektu przedstawia graf opisany macierzą incydencji B

$$B = \left[b_{kl}\right]; \quad k = 1,2,\ldots,K, \quad l = 1,2,\ldots,L+1, \tag{18}$$

gdzie: K liczba wierzchołków grafu;

oraz macierz wydajności A:

$$A = \left[a_{ij}\right]; \quad i = 1,2,\ldots,L \quad j = 1,2,\ldots,L \tag{19}$$

Aby znaleźć przydział pracowników maksymalizujący wielkość produkcji całego obiektu, należy rozwiązać zadanie programowania liniowego z funkcją celu:

$$F = w_{L+1} \longrightarrow \max \tag{20}$$

i ograniczeniami:

$$\sum_{l=1}^{L+1} b_{kl} w_l = 0, \quad k = 1,2,\ldots,K; \tag{21}$$

$$w_l - \sum_{i=1}^{L} a_{il} x_{il} \leq 0, \quad l = 1,2,\ldots,L; \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{L} x_{il} = 1, \quad l = 1,2,\ldots,L; \tag{23}$$

$$\sum_{l=1}^{L} x_{il} = 1, \quad i = 1,2,\ldots,L; \tag{24}$$

$$0 \leqslant w_l, \quad l = 1,2,\dots,L+1,$$

$$0 \leqslant x_{il} \quad \text{i całkowite}, \quad i = 1,2,\dots,L; \quad l = 1,2,\dots,L$$

3. ROZSZERZENIE ZAKRESU ZASTOSOWAŃ

Dotychczas zakładano, że graf reprezentujący strukturę połączeń posiada jedno źródło i jedno ujście. Opisane podejście można zastosować również dla obiektu o wielu źródłach $s_1,s_2,\dots,s_p$ i wielu ujściach $t_1,t_2,\dots,t_q$ oraz jeżeli materiał może być przekazywany z każdego źródła do każdego ujścia. Należy wtedy wprowadzić źródło zastępcze s o pomocniczych krawędziach skierowanych do $s_1,s_2,\dots,s_p$ oraz zastępcze ujście t z pomocniczymi krawędziami skierowanymi od $t_1,t_2,\dots,t_q$ do t. Zakłada się przy tym, że krawędzie pomocnicze reprezentują stanowiska o dowolnie dużej wydajności, nie wymagające obsługiwanie przez pracowników.

Zakładano także, że dolne ograniczenie na wydajność stanowiska reprezentowanego przez krawędź jest równe zeru, a górna wynika z wydajności przydzielonego pracownika. W praktyce można spotkać się z sytuacją, w której dla wybranego stanowiska s_i (lub grupy stanowisk) narzuca się graniczne wydajności: maksymalną d_i oraz niewiększą od niej wydajność minimalną c_i (liczby rzeczywiste dodatnie). Wtedy zadanie optymalizacji należy uzupełnić warunkiem (warunkami):

$$c_i \leqslant w_i \leqslant d_i \tag{26}$$

Poprzednio przyjmowano także, że ograniczenia wydajnościowe dotyczą wyłącznie stanowisk pracy reprezentowanych przez krawędzie grafu. Podobnie można nałożyć ograniczenia na punkt węzłowy (jeden lub więcej), przedstawiający sobą możliwości transportowe, przepustowość stanowiska kontroli itp. Odpowiadający mu wierzchołek n o dopuszczalnych przepustowościach granicznych c(n) i d(n) można zastąpić przez dwa wierzchołki n' i n" oraz krawędź między nimi o żądanych przepustowościach granicznych.

Proponowana metoda pozwala również uwzględnić istotne w procesach z nawrotami technologicznymi - zależności ilościowe wydajności pomiędzy wybranymi stanowiskami opisane równaniami liniowymi - poprzez dołączenie ich jako warunków uzupełniających do zadania optymalizacji.

4. UWAGI

Istotną własnością prezentowanej metody jest liczba zmiennych zadania optymalizacji z L stanowiskami równa $L^2 + L + 1$. Jednak postać macierzy współczynników ograniczeń liniowych pozwala w sposób programowy na znaczne zredukowanie tablicy sympleksów. Niemniej celowe jest dalsze poszukiwanie bardziej efektywnych metod. Bowiem wyznaczanie optymalnego przydziału pracowników nie jest jedyną możliwością zastosowania tego zagadnienia. Uzasadnione są również zastosowania do prac projektowania złożonych obiektów przemysłu maszynowego, takich jak:

- zespoły linii montażowych, w których można wyróżnić linie montażu podzespołów, montażu głównego itp.;
- zakład wytłaczania blach karoseryjnych obejmujący zespoły nożyc do cięcia blach, linie pras, oddziały pomocnicze, np. regeneracji tłoczników i inne;
- zakład kuźniczy zawierający zbiór młotów hydraulicznych związanych ze sobą złożoną strukturą procesu z nawrotami technologicznymi;
- i inne.

W takich przypadkach problemem jest dobór urządzeń o właściwych parametrach eksploatacyjnych i ilości pozwalającej na rytmiczną produkcję na żądanym poziomie wydajności. Wtedy w zadaniu przydziału zmienne x_{ij} są zmiennymi decyzyjnymi, określającymi optymalny dobór urządzeń.

LITERATURA

[1] Ford L.R., Fulkerson D.R.: Przepływy w sieciach. PWN, Warszawa 1969.

[2] Korbut A.A., Finkelsztejn J.J.: Programowanie dyskretne. PWN, Warszawa 1974.

[3] Garfinkel R.S., Nemhauser G.L.: Programowanie całkowitoliczbowe. PWN, Warszawa 1978.

[4] Garfinkel R.S.: An improved algorithm for the bottleneck assignement problem. Operations Research, 19, 1971.

[5] Słomiński L.: Bottleneck assignement problem. An efficient algorithm. IX Inst. Symp. on Mathem. Programm Budapest 1976.

[6] Pawlik S.: Algorytm rozdziału i obsługi zadań na linii montażowej. I Krajowa Konferencja ADPP, Porąbka-Kozubnik 1978.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Jerzy KLAMKA

Wpłynęło do Redakcji 15.05.82 r.

МАКСИМАЛЬНО-ПРОИЗВОДИТЕЛЬСТВЕННАЯ ОПТИМАЛИЗАЦИЯ НАЗНАЧЕНИЯ
В ОБЪЕКТЕ СО СЛОЖНОЙ СТРУКТУРОЙ

Р е з ю м е

В работе представлена проблема назначения рабочих по рабочим местам, имеющих сложную структуру общения. Предложен метод определения назначений, максимизирующий производительность группы рабочих мест. Указаны некоторые возможности применения описанной модели оптимализации.

MAXIMUM EFFICIENCY OPTIMIZATION OF ASSIGNEMENT
IN A COMPLEX STRUCTURE PLANT

S u m m a r y

We present a problem of worker assignement to stations with a complex structure of connections. We show a method of assignement maximizing the efficiency of the whole structure. We indicate some possibilities of application of the optimization model presented.