ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984

Seria: AUTOMATYKA z. 73 Nr kol. 798

Zygmunt FRANKIEWICZ

NOWA WERSJA REGULATORA PROBABILISTYCZNO-ROZMYTEGO

Streszczenie. W pracy przedstawiono nową wersję regulatora probabilistyczno-rozmytego opartego na operacji maksimum-iloczyn. Rozważania są zilustrowane prostym przykładem.

WSTĘP

Od roku 1975 znany jest regulator rozmyty przedstawiony przez Mamdaniego [6]. W roku 1981 E. Czogała i W. Pedrycz podali koncepcję regulatora probabilistyczno-rozmytego bazującego na złożeniu maxmin [3]. Dwa lata później E. Czogała uogólnił koncepcję regulatora probabilistyczno-rozmytego dla dowolnych operacji składania [1].

W poniższej pracy przedstawiony został algorytm sterowania w oparciu o zbiory probabilistyczno-rozmyte nazywane również zbiorami probabilistycznymi i operację maksimum-iloczyn. Operacja ta daje w ogólności mniejsze wartości funkcji przynależności niż operacja składania maxmin.

Występuje zależność funkcji przynależności wyniku operacji składania od większej ilości elementów zbiorów czy relacji występujących w równaniu relacyjnym.

OPIS REGULATORA

Rozważania będę dotyczyły sterowania procesem o jednym wejściu i jednym wyjściu. Przyjęto heurystyczne, lingwistyczne reguły sterowania dające się zapisać w postaci:

$$\left\{\text{jeżeli } A_i \text{ to } B_i\right\} = \left\{A_i \Rightarrow B_i\right\}, \tag{1}$$

gdzie:

A_i - oznacza wartość wielkości wyjściowej procesu podaną jako zbiór probabilistyczny określony na przestrzeni wielkości wyjściowej $\mathfrak{X}$; $A_i \in M_1(\mathfrak{X})$,

B_i - oznacza wartość wielkości wejściowej (sterowania) podaną jako zbiór probabilistyczny utworzony na przestrzeni sterowań $\mathfrak{Y}$; $B_i \in M_2(\mathfrak{Y})$.

M_1, M_2 - rodziny zbiorów probabilistycznych utworzonych odpowiednio na przestrzeniach X i Y [7].

Przyjmuje się, że przestrzenie, na których określa się zbiory są zdyskretyzowane i składają się ze skończonej ilości elementów, tzn. $X = \{x_1, x_2, \ldots \ldots x_p\}$ oraz $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_q\}$.

W pracy [3] wykazano, że dla zbiorów probabilistycznych można wykorzystywać pojęcie relacji, podobnie jak dla zbiorów rozmytych. Przyjęto definicję przestrzeni charakterystycznej i parametrycznej oraz definicję zbioru probabilistycznego za H. Hirotą [5] i E. Czogałą [2]. Tak więc:

$$\{A_i \Rightarrow B_i\} = \{R_i \in M(X \times Y)\},$$

gdzie $M(X \times Y)$ jest rodziną wszystkich zbiorów utworzonych na iloczynie kartezjańskim $X \times Y$. Wyrażając to samo za pomocą funkcji definiujących:

$$R_i(x_j, y_k, \omega) = \mathrm{prod}(X_i(x_j, \omega), Y_i(y_k, \omega)), \tag{3}$$

gdzie $x_j \in X$, $y_k \in Y$.

Zbiór relacji R_i (reguł sterowania) można przekształcić w jedną rozmyto-probabilistyczną relację taką, że:

$$R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i,$$

gdzie n jest ilością reguł, co można inaczej zapisać

$$R(x_j, y_k, \omega) = \max_{1 \le i \le n} R_i(x_j, y_k, \omega) = \max_{1 \le i \le n} \mathrm{prod}(X_i(x_j, \omega), Y_i(y_k, \omega)) \tag{4}$$

Relacja ta stanowi układ przekształcający zbiory probabilistyczne dzięki zastosowaniu złożeniowej reguły wnioskowania. Można zatem wyznaczyć wartość sterowania B dla dowolnej wartości wyjściowej procesu A' (A', B' wyrażonych w postaci zbiorów probabilistycznych) [3] jako:

$$B' = A' \circ R \tag{5}$$

Równanie to można wyrazić za pomocą funkcji definiujących:

$$Y'(y_k, \omega) = \max_{1 \le j \le m} \mathrm{prod}(X'(x_j, \omega), R(x_j, y_k, \omega)), \tag{6}$$

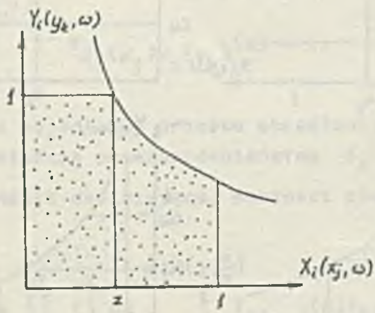
gdzie $m = \# \operatorname{supp} \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ (użytych w regułach sterowania).

Funkcje definiujące są zmiennymi losowymi, a więc przy operowaniu nimi ze względów praktycznych istotne jest wyznaczanie ich dystrybuant. Dystrybuantę funkcji definiującej rozmyto-probabilistycznej relacji R można wyznaczyć w następujący sposób:

$$F_{R(x_j,y_k)}(z) = P((\max_{1\le i\le n} \mathrm{prod}(X_i(x_j,\omega),\ Y_i(y_k,\omega))) < z), \tag{7}$$

zgodnie z [2] można zapisać:

$$F_{R(x_j,y_k)}(z) = \prod_{i=1}^{n} F_{R_i(x_j,y_k)}(z) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i(x_j).Y_i(y_k)}(z) \tag{8}$$



Rys. 1. Obszar całkowania z równania (9)

Jak widać, aby znaleźć dystrybuantę funkcji definiującej relacji R, należy wyprowadzić wzór na dystrybuantę iloczynu funkcji definiujących $X_i(x_j,\omega)\ .\ Y_i(y_k,\omega)$ (rys. 1).

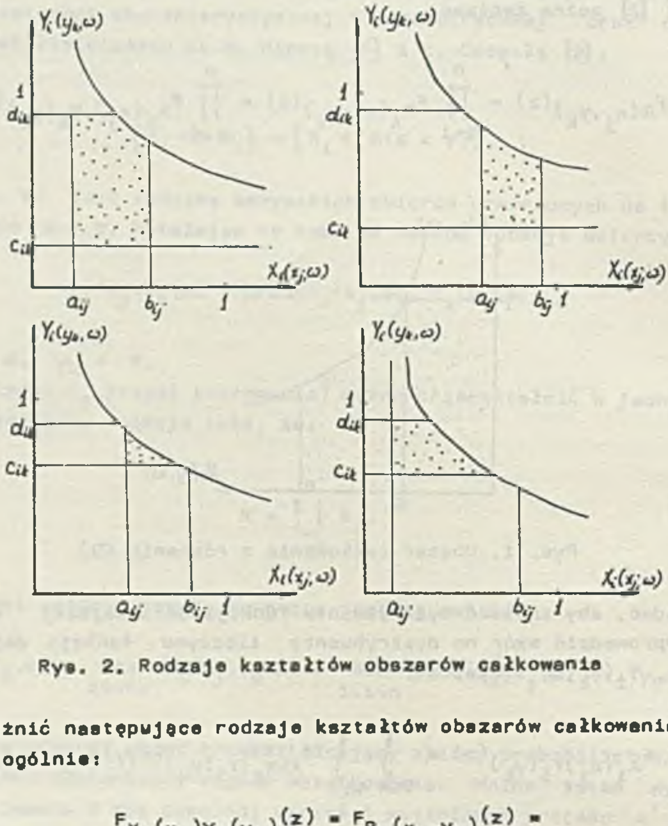
$$F_{X_i(x_j)Y_i(y_k)}(z) = \int\limits_{0\le x}\int\limits_{y\le z} f_{X(x_j)Y_i(y_k)}(x,y)dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{\min(1,\frac{z}{x})} f_{X_i(x_j)Y_i(y_k)}(x,y)dy =$$

$$= \int_0^z dx \int_0^1 f_{X_i(x_j)Y_i(y_k)}(x,y)dy + \int_z^1 dx \int_0^{\frac{z}{x}} f_{X_i(x_j)Y_i(y_k)}(x,y)dy \tag{9}$$

Przyjmując niezależność zmiennych losowych $X_i(x_j,\omega)$ i $Y_i(y_k,\omega)$ oraz

$$
\begin{aligned}
f_{X_i(x_j)}(x) &= 0 \quad \text{dla} \quad x \notin [a_{ij}, b_{ij}] \\
f_{Y_i(y_k)}(y) &= 0 \quad \text{dla} \quad y \notin [c_{ik}, d_{ik}]
\end{aligned}
\tag{10}
$$



Rys. 2. Rodzaje kształtów obszarów całkowania

można wyróżnić następujące rodzaje kształtów obszarów całkowania (rys. 2) i zapisać ogólnie:

$$F_{X_i(x_j)Y_i(y_k)}(z) = F_{R_i(x_j,y_k)}(z) =$$

$$= [\mathbb{1}(w-a_{ij}) - \mathbb{1}(w-b_{ij})] \int_{a_{ij}}^{w} dx \int_{c}^{d} L\, dy +$$

$$+ [\mathbb{1}(w-a_{ij}) - \mathbb{1}(w-b_{ij})] \int_{w}^{\min(b_{ij}, \frac{z}{c_{ik}})} dx \int_{c_{ik}}^{\frac{z}{x}} L\, dy +$$

$$+\left[1\left(w-\frac{a_{ij}c_{ik}}{d_{ik}}\right)-1(w-a_{ij})\right]\int_{a_{ij}}^{\min\left(b_{ij},\frac{z}{c_{ik}}\right)}dx\int_{c_{ik}}^{\frac{z}{x}}L\,dy+1(w-b_{ij}), \tag{11}$$

gdzie:

$$L=\frac{f_{X_i(x_j)}(x)f_{Y_i(y_k)}(y)}{\left(F_{X_i(x_j)}(b_{ij})-F_{X_i(x_j)}(a_{ij})\right)\left(F_{Y_i(y_k)}(d_{ik})-F_{Y_i(y_k)}(c_{ik})\right)}$$

$w=\frac{z}{d_{ik}}$; dla $d_{ik}\neq 0$.

Wykorzystano tu wzór na gęstość prawdopodobieństwa rozkładu uciętego [4]. Dla $d_{ik}=0$ lub $b_{ij}=0$ łatwo można wykazać, że dla każdego $0<z<1$

$$F_{X_i(x_j)Y_i(y_k)}(z)=1.$$

Dla dowolnej wartości wyjściowej procesu określonej funkcję definiującą $X'(x_j,\omega)$ ze znaną gęstością prawdopodobieństwa $f_{X'(x_j)}(x)$ można wyznaczyć dystrybuantę funkcji definiującej wartości sterowania ze wzoru:

$$F_{Y'(y_k)}(z)=\prod_{j=1}^{m}\left(\int_0^1 dx\int_0^{\min(1,\frac{z}{x})}f_{X(x_j)}(x)f_{R(x_j,y_k)}(r)dr\right) \tag{12}$$

Na podstawie znajomości $F_{Y'(y_k)}(z)$ dla każdego $y_k\in Y$ można wyznaczyć konkretną wartość wielkości sterującej y_0 w oparciu o różne kryteria. Jedną z możliwości jest znalezienie y_0 spełniającego zależność:

$$E(Y'(y_0))=\max, \tag{13}$$

gdzie:

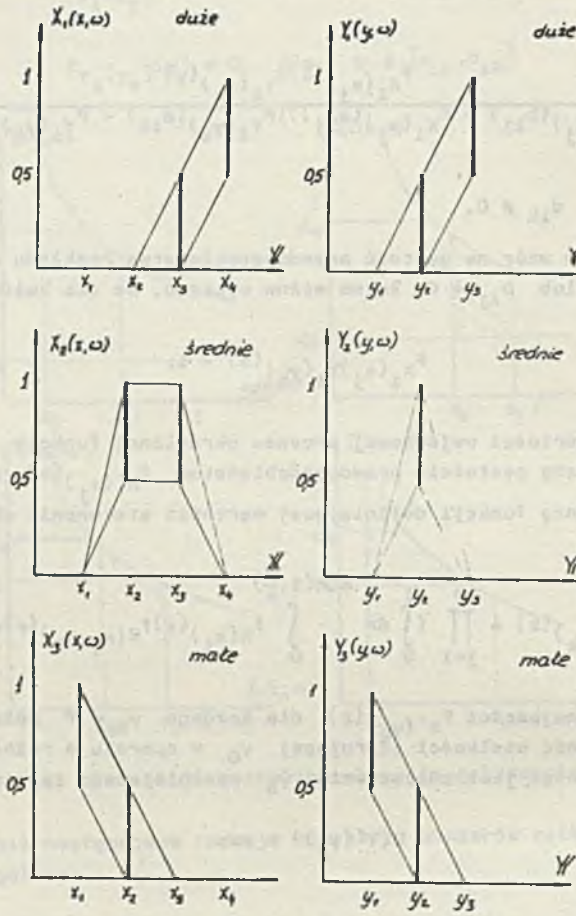
$$E(Y'(y_0))=\int_0^1 Y'(y_0)dF_{Y'(y_0)}(z) \tag{14}$$

PRZYKŁAD

Dla ilustracji omówionych zagadnień zostanie przedstawiony następujący prosty przykład.

Założmy, że sterowanie procesem opisane jest trzema lingwistycznymi regułami sterowania:

1 jeżeli X duże, to Y duże,
2 jeżeli X średnie, to Y średnie,
3 jeżeli X małe, to Y małe.

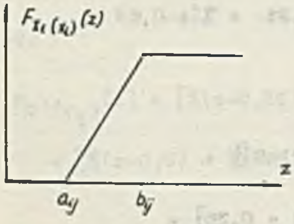


Rys. 3. Funkcje definiujące zbiorów probabilistycznych tworzących reguły sterowania

Wartościom X duże, Y duże itd. odpowiadają zbiory probabilistyczne, których funkcje definiujące przedstawione są graficznie na rys. 3. Niech w przedziałach zmienności pokazanych na powyższym rysunku funkcja definiująca ma rozkład równomierny. Wobec tego przy założeniu niezależności funkcji definiujących można zapisać:

$$f_{X_i(x_j)Y_i(y_k)}(x,y) = f_{X_i(x_j)}(x) f_{Y_i(y_k)}(y) = \frac{1}{b_{ij}-a_{ij}} \frac{1}{d_{ik}-c_{ik}}$$

Przykładowo: obliczmy $F_{R_3(x_1,y_1)}(z)$. Obszar całkowania ma kształt jak na rys. 2a



Rys. 4. Dystrybuanta funkcji definiującej o rozkładzie równomiernym

$a_{31} = 0,1$

$b_{31} = 1$

$c_{31} = 0,5$

$d_{31} = 1$

$$w = \frac{z}{d_{31}} = z$$

zatem

$$F_{X_3(x_1)Y_3(y_1)}(z) = \left[\mathbb{1}(z-0,5) - \mathbb{1}(z-1)\right]\frac{z-0,5}{0,5} +$$

$$+ \left[\mathbb{1}(z-0,5) - \mathbb{1}(z-1)\right] 4\left[z(0+0-\ln z+0,5) - 0,5\right] +$$

$$+ \left[\mathbb{1}(z-0,25) - \mathbb{1}(z-0,5)\right] 4\left[z(\ln z + \ln 2 + \ln 2 - 1) + 0,25\right] +$$

$$+ \left[\mathbb{1}(z-1) = \left[\mathbb{1}(z-0,25) - \mathbb{1}(z-0,5)\right] 4\left[z(\ln z + 2\ln 2 - 1) + 0,25\right] +\right.$$

$$+ \left[\mathbb{1}(z-0,5) - \mathbb{1}(z-1)\right] 4\left[z(1 - \ln z - 0,75)\right] + \mathbb{1}(z-1)$$

Podobnie należy obliczyć wszystkie dystrybuanty elementów macierzy R_1, R_2, R_3. Dystrybuanty macierzy R otrzymujemy w następujący sposób:

$$F_{R(x_j,y_k)}(z) = \prod_{i=1}^{3} F_{R_i(x_j,y_k)}(z)$$

Są one równe odpowiednio

$$F_{R(x_1,y_1)}(z) = \left[\mathbb{1}(z-0,25) - \mathbb{1}(z-0,5)\right] 4\left[z(\ln z + 2\ln 2 - 1) + 0,25\right] +$$

$$+ \left[\mathbb{1}(z-0,5) - \mathbb{1}(z-1)\right] 4\left[z(1-\ln z) - 0,75\right] + \mathbb{1}(z-1)$$

$$F_{R(x_2,y_1)}(z) = \left[\mathbb{1}(z) - \mathbb{1}(z-0,25)\right] 4\left[z\ln 2\right] +$$

$$+ \left[\mathbb{1}(z-0,25) - \mathbb{1}(z-0,5)\right] 4\left[z(1-\ln 2-\ln z) - 0,25\right] + \mathbb{1}(z-0,5)$$

$$F_{R(x_3,y_1)}(z) = F_{R(x_4,y_1)}(z) = 1$$

$$F_{R(x_1,x_2)}(z) = \left[\mathbb{1}(z) - \mathbb{1}(z-0{,}25)\right] 4\left[z\ln 2\right] +$$

$$+ \left[\mathbb{1}(z-0{,}25) - \mathbb{1}(z-0{,}5)\right] 4\left[z(1-\ln z-\ln 2) - 0{,}25\right. + \mathbb{1}(z-0{,}5) =$$

$$= F_{R(x_4,y_2)}(z)$$

$$F_{R(x_2,y_2)}(z) = \left[\mathbb{1}(z) - \mathbb{1}(z-0{,}25)\right] 4\left[z(1-\ln z - 2\ln 2)\right] +$$

$$+ \left[\mathbb{1}(z-0{,}25) - \mathbb{1}(z-0{,}5)\right] 4\left[z(\ln z + 2\ln 2 - 1) + 0{,}25\right] +$$

$$+ \left[\mathbb{1}(z-0{,}5) - \mathbb{1}(z-1)\right] 4\left[z(1 - \ln z) - 0{,}75\right] + \mathbb{1}(z-1) = F_{R(x_3,y_2)}(z)$$

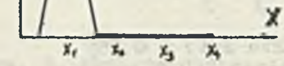
$$F_{R(x_1,y_3)}(z) = F_{R(x_2,y_3)}(z) = 1$$

$$F_{R(x_3,y_3)}(z) = \left[\mathbb{1}(z) - \mathbb{1}(z-0{,}25)\right] 4\left[z\ln 2\right] +$$

$$+ \left[\mathbb{1}(z-0{,}25) - \mathbb{1}(z-0{,}5)\right] 4\left[z(1-\ln 2-\ln z) - 0{,}25\right] + \mathbb{1}(z-0{,}5)$$

$$F_{R(x_4,y_3)}(z) = \left[\mathbb{1}(z-0{,}25) - \mathbb{1}(z-0{,}5)\right] 4\left[z(\ln z + 2\ln 2 - 1) + 0{,}25\right] +$$

$$+ \left[\mathbb{1}(z-0{,}5) - \mathbb{1}(z-1)\right] 4\left[z(1 - \ln z) - 0{,}75\right] + \mathbb{1}(z-1).$$



Rys. 5. Funkcja definiująca zbioru probabilistycznego wielkości wyjściowej procesu

Przyjmiemy, że wartość wielkości wyjściowej procesu jest opisana zbiorem probabilistycznym, takim jak na rys. 5.

Gęstość prawdopodobieństwa funkcji definiującej tego zbioru jest w postaci delty Diraca, czyli jest to wartość ściśle określona.

$$f_{X'(x_j)}(x) = \delta(x-z_j)$$

$$F_{Y'(y_k)}(z) = \prod_{j=1}^{4} \int_0^1 \delta(x-z_j)\,dx \int_0^{\min(1,\frac{z}{x})} \frac{dF_{R(x_j,y_k)}(r)}{dr}\,dr =$$

$$= \prod_{j=1}^{4} \int_0^1 F_{R(x_j,y_k)}(r)\Big|_0^{\min(1,\frac{z}{x})} \delta(x-z_j)\,dx = \prod_{j=1}^{4} F_{R(x_j,y_k)}\left(\min\left(1,\frac{z}{z_j}\right)\right);$$

$$F_{R(x_j,y_k)}(1) = 1$$

Stąd:

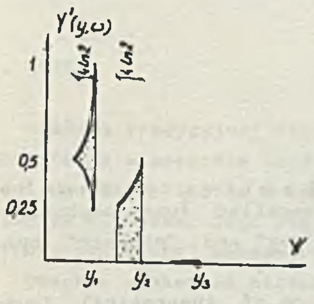
$$F_{Y'(y_1)}(z) = [\mathbb{1}(z-0{,}25) - \mathbb{1}(z-0{,}5)]\,4\,[z(\ln z + 2\ln 2 - 1) + 0{,}25] +$$

$$+ [\mathbb{1}(z-0{,}5) - \mathbb{1}(z-1)]\,4\,[z(1 - \ln z) - 0{,}75] + \mathbb{1}(z-1)$$

$$F_{Y'(y_2)}(z) = [\mathbb{1}(z) - \mathbb{1}(z-0{,}25)]\,4\,[z\ln 2] +$$

$$+ [\mathbb{1}(z-0{,}25) - \mathbb{1}(z-0{,}5)]\,4\,[z\,(1 - \ln z - \ln 2) - 0{,}25] + \mathbb{1}(z-0{,}5)$$

$$F_{Y'(y_3)}(z) = 1$$



Rys. 6. Zbiór probabilistyczny wielkości wyjściowej procesu z zaznaczoną gęstością prawdopodobieństwa funkcji definiującej

Na rys. 6 przedstawiającym funkcję definiującą zbioru probabilistycznego obliczonej wielkości sterowania zaznaczono schematycznie gęstości prawdopodobieństwa funkcji definiującej.

LITERATURA

[1] Czogała E.: A generalized Concept of a Fuzzy Probabilistic Controller - Research Report - Uniwersity of London Queen Mary College- Department of Electrical and Electronic Engineering, Fuzzy Logic Working Group 1982.

[2] Czogała E.: On distribution Function Description of Probabilistic Sets and Its Application in Decision Making Fuzzy Sets and Systems 10 (1983).

[3] Czogała E., Pedrycz W.: On the Concept of Fuzzy Probabilistic Controllers. (Ukaże się w Fuzzy Sets and Systems).

[4] Gerstenkorn T., Sródka T.: Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa, PWN, Warszawa 1972.

[5] Hirota K.: Concepts of Probabilistic Sets. Fuzzy Sets and Systems, 5(1981).

[6] Mamdani E.H., Assilian S.: An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller. Int. J. Man. Machine Studies, 8, 1975.

[7] Walichiewicz Ł.: Formalizacja heurystycznych algorytmów sterowania złożonymi procesami w oparciu o zbiory probabilistyczne i ich komputerowa realizacja. Praca doktorska, Politechnika Śląska, 1982.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Andrzej Tylikowski

Wpłynęło do Redakcji: maj 1983 r.

НОВАЯ ВЕРСИЯ ВЕРОЯТНОСТНО-РАСПЛЫВЧАТОГО РЕГУЛЯТОРА

Р е з ю м е

В работе представлена новая версия вероятностно-расплывчатого регулятора, основанная на операции максимум-произведение. Рассуждения иллюстрированы простым примером.

A NEW OF A FUZZY PROBABILISTIC CONTROLLER

S u m m a r y

The paper deals with a new approach to the so-called fuzzy probabilistic controller design. The controller applies "max" and "product" operations on probabilistic sets.

Simple numerical example forms and illustration of theoretical investigations.