ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984

Seria: AUTOMATYKA z. 73 Nr kol. 798

Jan KAŁUSKI

WSPÓŁCZESNE PROBLEMY AKSJOMATYCZNEGO UZASADNIENIA PODSTAWOWYCH POJĘĆ TEORII PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Streszczenie. W pracy rozpatrzono problemy współczesnego aksjomatycznego uzasadnienia podstawowych pojęć teorii prawdopodobieństwa na bazie aksjomatów Kołmogorowa i Misesa. Wskazano na różnice i podobieństwa obu aksjomatyk z punktu widzenia ich zastosowania dla algorytmicznego obliczania prawdopodobieństw i współczesnego przedstawiania pojęć losowości i prawdopodobieństwa. Wskazano również na nowe ujęcie teorii prawdopodobieństwa rozwijane przez Skalmierskiego i jego współpracowników.

1. WSTĘP

Analiza tradycyjnej fizycznej interpretacji twierdzeń teorii prawdopodobieństwa w ostatnim dziesięcioleciu doprowadziła do gruntownej zmiany poglądów na tę teorię w całości. Inicjatorem tych zmian był niemiecki matematyk R. Mises. Jego poglądy spotkały się z krytyką, w szczególności ze strony "czystych" matematyków.

Obecnie większość matematycznych prac z teorii prawdopodobieństwa zgodna jest z powszechnie przyjętą aksjomatyką A.N. Kołmogorowa, którą trudno jest porównać z misesowskim podejściem. Tym niemniej w 1963 r. A.N. Kołmogorow w swej nowej aksjomatycznej teorii prawdopodobieństwa, zasadniczo różnej od pierwszej, znacznie rozwinął również i misesowskie podejście [7], [8], [9].

Liczba opracowań wykorzystujących koncepcje R. Misesa ostatnio znowu wzrosła. W 1977 roku w Wilnie miała miejsce II Międzynarodowa Konferencja na temat teorii prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Konferencja przeanalizowała i podsumowała rozwój teorii prawdopodobieństwa za ostatnie lata [5], [14].

W niniejszej pracy omówiono współczesne problemy, dotyczące podstawowych pojęć teorii prawdopodobieństwa według aksjomatyk A.N. Kołmogorowa i R. Misesa. Zwrócono również uwagę na dystrybucyjne ujęcie teorii prawdopodobieństwa według D. Brücknera, M. Podhorodyńskiego i B. Skalmierskiego.

2. FIZYCZNO-HISTORYCZNY ASPEKT AKSJOMATYK A.N. KOŁMOGOROWA I R. MISESA

W 1933 roku opublikowano pracę A.N. Kołmogorowa [9] na temat aksjomatycznej teorii prawdopodobieństwa. Aksjomaty zawarte w tej pracy, które zostały powszechnie przyjęte, po raz pierwszy sformułował S.N. Bernstein [3], [4].

Uzbroiwszy się w ten sposób aksjomatyczna teoria prawdopodobieństwa zdecydowanie odrzuciła do tej pory utrzymujące się poglądy i praktykę według Laplace'a i R. Misesa, a misesowskie prawdopodobnościowo-częstotliwościowe podejście uznała za niedoskonałe.

I oto w okresie ostatnich kilkudziesięciu lat interpretacja podstawowych pojęć teorii prawdopodobieństwa według R. Misesa zaczyna wywoływać coraz większe zainteresowanie [1], [10], [13]. W czym rzecz? Wszak uznanie aksjomatyki A.N. Kołmogorowa spowodowało prawie zupełne odejście matematyków od koncepcji R. Misesa i jemu podobnych, chociaż należy podkreślić, że w zastosowaniach praktycznych reprezentowane przez niego podejście było i jest stosowane nadal. Aby odpowiedzieć na to pytanie, należałoby zagłębić się nieco w historię matematyki w ogóle, a w historię teorii prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej w szczególności. Powstanie bowiem kołmogorowskiej aksjomatyki nie było przypadkowe, a wywołane zostało potrzebami innych powstających dopiero nauk w latach dwudziestych naszego stulecia. Jedną z takich nauk była cybernetyka. "Żądała" ona nowej teorii prawdopodobieństwa i nauk pokrewnych z nią związanych takich, jakie w konsekwencji później powstały, a mianowicie: teorii procesów stochastycznych, teorii masowej obsługi, teorii informacji, teorii niezawodności i innych.

Należy w tym miejscu również zauważyć, że do czasu „narodzin" aksjomatyki A.N. Kołmogorowa badania Lebesgue'a z teorii miary i rachunku całkowego zostały zakończone. A gdy z kolei Freshes uwolnił teorię całkowania od elementów geometrycznych, można było już uzasadnić teorię prawdopodobieństwa, biorąc pod uwagę analogie między miarą zbioru i prawdopodobieństwem zdarzenia, a także między całką z funkcji i wartością oczekiwaną zmiennej losowej.

Kołmogorow pierwszy skorzystał z nadarzającej się okazji i zaproponował szeroko dziś znany i powszechnie przyjęty zespół aksjomatów do teorii prawdpodobieństwa [11].

Z kolei cybernetyka zapoczątkowała burzliwy rozwój techniki obliczeniowej i teorii algorytmów. I właśnie potrzeby i rozwój tych nauk zwróciły uwagę probabilistów na fakt, że aksjomatyczna teoria prawdopodobieństwa według A.N. Kołmogorowa niedostatecznie tłumaczy algorytmiczne podejście przy obliczaniu prawdopodobieństwa, które z natury jest algorytmiczne (np. wszystkie metody Monte-Carlo). Nie sposób było również na podstawie aksjomatycznej teorii prawdopodobieństwa objaśnić stabilność częstotliwości zajścia jakiegoś zdarzenia w doświadczeniach praktycznych.

R. Mises w swoim czasie zaproponował odmienną interpretację pojęcia prawdopodobieństwa, bazującego na granicznym przejściu [1], [2], [3], [4], [12]. W procedurze obliczeniowej prawdopodobieństw zbudowanej według R. Misesa zmienna losowa ze stabilnymi empirycznymi wartościami średnimi przedstawiona została bardzo prostym matematycznym obiektem w postaci nieskończonego ciągu liczbowego, dla którego istnieje granica przy wspomnianym już przejściu granicznym. Ciąg ten jest niezwykle prosty i ma w pełni określone matematyczne właściwości. Według interpretacji R. Misesa losowość, tj. to czego nie można przewidzieć, nie wchodzi do "bloku" matematycznego teorii prawdopodobieństwa, niezależnie od tego w jaki sposób został on zbudowany, lecz staje się przedmiotem rozpatrywania dopiero przy praktycznym wykorzystywaniu teorii prawdopodobieństwa. Innymi słowy, aparat matematyczny teorii prawdopodobieństwa zasadniczego niczym się nie różni od aparatu matematycznego takich stosowanych nauk, które w ogóle nie mają do czynienia ze zmiennymi losowymi.

Dlaczego wobec tego misesowskie podejście jest lepsze przy algorytmicznym obliczeniu prawdopodobieństw? Chodzi o to, że przy algorytmicznym obliczaniu prawdopodobieństw znika czynnik losowości, gdyż obliczenia te (dla przykładu na EMC) są to określone ciągi operacji wykonywane nie na liczbach losowych a na konkretnych ich realizacjach. W związku z powyższym okazało się, że interpretacja prawdopodobieństwa, bazująca na algorytmicznym granicznym przejściu według R. Misesa jest jakby pomostem między teorio-mnogościową aksjomatyką A.N. Kołmogorowa a teorią algorytmów.

Interesujące, że sam Kołmogorow pisał, iż aksjomatyka oparta na pojęciu prawdopodobieństwa, jako pojęciu podstawowym, niekoniecznie winna odpowiadać wszystkim wymaganiom wynikającym z zastosowań praktycznych. Kołmogorow pisał: "... Wszelka aksjomatyczna (abstrakcyjna) teoria dopuszcza jak wiadomo niezliczoną liczbę konkretnych interpretacji. W ten sposób również i matematyczna teoria prawdopodobieństwa dopuszcza wiele różnych interpretacji wraz z tymi, z którymi powstała. Stąd dochodzimy do zastosowań tej teorii w takich dziedzinach nauki, które nie mają nic wspólnego z pojęciami losowości i prawdopodobieństwa...

...Aksjomatyzacja teorii prawdopodobieństwa może być dokonana różnymi sposobami zarówno co do wyboru aksjomatów, jak i wyboru podstawowych pojęć i podstawowych zależności. Jeżeli celem jest możliwie prosta konstrukcja systemu aksjomatów oraz zbudowanie na ich bazie w dalszej konsekwencji odpowiedniej teorii, to należałoby aksjomatyzować pojęcie zdarzenia losowego i jego prawdopodobieństwa. Istnieją również inne systemy aksjomatycznej budowy teorii prawdopodobieństwa takie, w których pojęcie prawdopodobieństwa nie jest pojęciem podstawowym, lecz samo definiowane jest przez inne pojęcie..." [9]. W tym miejscu A.N. Kołmogorow cytuje pracę R. Misesa [12] i S.N. Bernsteina [4].

W związku z powyższym widać, że główną rolę przy formułowaniu aksjomatycznego uzasadnienia podstawowych pojęć teorii prawdopodobieństwa odgrywa fakt - co pierwotnie zostało określone - losowość czy prawdopodobieństwo i jak ten fakt został zinterpretowany.

Rozpatrzmy wobec tego pojęcia losowości i prawdopodobieństwa według współczesnej fizycznej interpretacji.

3. LOSOWOŚĆ I PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Według współczesnej fizycznej interpretacji losowość odgrywa swoją rolę w podwójnym znaczeniu, mając na uwadze zewnętrzne destabilizujące czynniki, które mogą być istotne lub nie [6]. Jeżeli są one istotne, to powinny być badane ze względu na prawidłowości występowania. Z drugiej strony zachowanie się fizycznego systemu może być w sposób istotny lub nieistotny określone strukturę jego elementów. Należy sądzić, że losowość jako wyraz obiektywnej zależności między obiektami i procesami ma swoje źródło w nieistotnych wewnętrznych zależnościach między elementami systemu. Dla naszych rozważań interesujące jest to, że elementy systemu w sposób losowy realizują określoną możliwość, odpowiadającą określonemu rozkładowi prawdopodobieństwa z całej istniejącej przestrzeni możliwości. A więc losowość jest obiektywnym czynnikiem zachowania się fizycznego systemu. Oznacza to, że losowość fizycznie można określić jako pewną nieokreśloność w określonym zachowaniu się systemu. W tym przypadku bez znaczenia jest fakt, czy pojęcie losowości jest podstawowym pojęciem i że w oparciu o nie budujemy model matematyczny, opisujący fizyczną nieokreśloność, czy też tę nieokreśloność mierzymy pewną probabilistyczną miarą pierwotnie zdefiniowaną. Losowość jako coś czego nie można przewidzieć na pewno, jest w tym przypadku widoczną właściwością zachowania się systemu.

Zupełnie inaczej wygląda sprawa, gdy chcemy formalizować obliczenia prawdopodobieństw zmiennych losowych. Wówczas aby stworzyć konkretną teorię objaśniającą te lub inne operacje wykonywane na zmiennych losowych nie jest już bez znaczenia fakt, co będzie pierwotnie okreśłonym i podstawowym pojęciem.

I tak, w aksjomatyce A.N. Kołmogorowa prawdopodobieństwo jest pojęciem podstawowym, co w konsekwencji doprowadziło do znanej już konstrukcji teorio-mnogościowej aksjomatyki. Natomiast u R. Misesa prawdopodobieństwo określa się graniczną częstotliwością zajścia zdarzenia losowego podczas granicznego przejścia. Dlatego też misesowski model i aksjomatyka Kołmogorowa z praktycznego punktu widzenia są nieporównywalne. Bowiem nie zawsze jest możliwe interpretowanie punktu przestrzeni probabilistycznej (według Kołmogorowa) jako numeru doświadczenia. Stąd też elementy tej przestrzeni zwykle są nazywane zdarzeniami elementarnymi (ma się rozumieć losowymi), tzn. elementy tej przestrzeni utożsamia się z możliwymi wynikami doświadczeń, a nie z konkretnymi ich realizacjami. Aksjomatyka zbudowana w ten sposób nie jest w stanie, rzecz jasna, objąć swym zasięgiem wszystkie możliwości praktyki z jej procedurami statycznej obróbki danych doświadczalnych, otrzymanych przy pomiarze zmiennych losowych, gdyż aksjomatyka taka dysponuje dogodnymi abstrakcyjnymi kopiami jedynie gotowych rozkładów prawdopodobieństw i wartości oczekiwanych.

Model misesowski, bazujący na przejściu granicznym, wykorzystuje dane otrzymane bezpośrednio z doświadczenia, czyniąc nieistotnym problemem, czy zdarzenie jest losowe, czy też nie.

W pracy zajęto się głównie porównaniem aksjomatyk A.N. Kołmogorowa i R. Misesa. Nie sposób jednak w tym miejscu nie wspomnieć o dystrybucyjnym ujęciu teorii prawdopodobieństwa, które w zasadzie datuje się od Stratanowiča [26] i zostało rozwinięte m.in. przez D. Brücknera, M. Podhorodyńskiego i B. Skalmierskiego w pracach [25], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24]. W pracach tych, wychodząc z częstościowego podejścia i stosując aparat klas abstrakcji, pokazano jak wiele wspólnego mają teorie A.N. Kołmogorowa i R. Misesa. Pojęciem wyjściowym nie jest u nich przestrzeń probabilistyczna jak u A.N. Kołmogorowa, lecz wektor losowy, zdefiniowany zgodnie z intuicją wynikającą z praktyki jako zbiór ciągów realizacji liczbowych, opisujących kolejne wyniki ciągu doświadczeń. Natomiast prawdopodobieństwo i prawdopodobieństwo warunkowe, którym klasycznie narzuca się wszystkie własności miary unormowanej, pojawia się u nich jako pojęcia wtórne, zgodne z ich (prawdopodobieństw) empirycznymi odpowiednikami; frekwencją (frakcją) i frekwencją (frakcją) warunkową [23].

W podsumowaniu należałoby stwierdzić, że w obecnej dobie teoria prawdopodobieństwa doszła już do takiego stopnia rozwoju, że z trudem mieści się (w szczególności jej zastosowania) w granicach jakiejś jednej aksjomatyki. Gdyż niezależnie od tego jak dalece sformalizowana początkowo wydawałaby się aksjomatyka, z czasem staje się ona ciasna i nie obejmuje już interpretacji dla objaśnienia takich czy innych zastosowań praktycznych. Dlatego też należy sądzić, że zarówno misesowskie jak i kołmogorowskie podejście do teorii prawdopodobieństwa będzie coraz częściej stosowane z uwzględnieniem jednak czynników związanych z określoną interpretację danego fizycznego procesu.

LITERATURA

[1] Алимов Ю.И.: Элементы теории эксперимента. Издание УПИ.Свердловск 1976.
[2] Алимов Ю.И.: О проблемах применения теории вероятностей, расмотренных в работах В.Н. Тутубалина. Автоматика, 78/1.
[3] Бернштейн С.Н.: Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей. Западно - Харьк. матем. об-ва, 1917.
[4] Бернштейн С.Н.: Теория вероятностей. 2-е изд. М, ГТТИ, 1934.
[5] Вторая Вильнюская Конференция по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюю 1977, тезисы докладов (в трёх томах). ВильнюскийИнститут Математики и Кибернетики, 1977.
[6] Гёрц Г.: Закон, развитие, случайность. Вопросы философии 1978/8.

[7] Колмогоров А.Н.: Три подхода к определению понятия "количество информации". Проблемы передачи информации, Т. I, выпуск 1, 1965.

[8] Колмогоров А.Н.: К логическим основам теории информации и теории вероятностей. Проблемы передачи информации, Т. вып. 3, 1969.

[9] Колмогоров А.Н.: Основные понятия теории вероятностей. Изд. 2-е М. Наука, 1974.

[10] Коробов Н.М.: Нормальные переодические системы и их приложение к оценке сумм дробных долей. Изв. АН СССР, серия мат., Т. 15, № 1, 1951.

[11] Майстров Л.Е.: Теория вероятностей. Исторический очерк. М, Наука 1967.

[12] Mises R.: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig, U. Wien, Fr Deutike, 1934.

[13] Постников А.Г.: Арифметическое моделирование случайных процессов. Тр. матем. института им. В.А. Стеклова. Т, 57, 1960.

[14] Тутубалин В.Н.: Границы применимости: (вероятно- стат. методы и их возможности). М, Знание, 1977/1. Серия: Математика и Кибернетика.

[15] Звонкин А.К., Левин Л.А.: Сложность конечных объектов и обоснование теории информации случайности с помощью теории алгоритмов. Успехи мат. наук. Т, 25, вып. 6 1970.

[16] Brückner D., Podhorodyński M., Skalmierski B.: Podstawy rachunku prawdopodobieństwa w ujęciu dystrybucyjnym. ZN Pol. Śl. seria Mat.-Fiz., Nr 29, Gliwice 1979.

[17] Brückner D., Podhorodyński M., Skalmierski B.: Charakterystyki statystyczne zmiennej losowej w ujęciu dystrybucyjnym. ZN Pol. Śl. seria Mat.-Fiz. Nr 29, Gliwice 1979.

[18] Brückner D., Podhorodyński,M., Skalmierski B.: Charakterystyki statystyczne wektora losowego w ujęciu dystrybucyjnym. ZN Pol. Śl seria Mat.-Fiz. Nr 29, Gliwice 1979.

[19] Bruckner D., Podhorodyński M., Skalmierski B.: Funkcjonał charakterystyczny i pewne charakterystyki statystyczne procesu stochastycznego (ujęcia cięgowe). ZN Pol. Śl. seria Mat,-Fiz. Nr 29 Gliwice 1979.

[20] Brückner D., Podhorodyński M., Skalmierski B.: Proces stochastyczny w ujęciu dystrybucyjnym. Prace matematyczne, t. 8, Prace naukowe U. Śl. Nr 288, Katowice 1978.

[21] Brückner D.: Wybrane zagadnienia cięgowego ujęcia teorii wielowymiarowych uogólnionych procesów stochastycznych. Praca doktorska U. Śl. Katowice 1979.

[22] Podhorodyński M., Pewne zagadnienia teorii układów punktów losowych w ujęciu ciągłym. Praca doktorska U. Śl., Katowice 1979.

[23] Brückner D., Podhorodyński M., Skalmierski B.: Cięgowe ujęcie teorii wektorów losowych i prawdopodobieństwa. Prace IPPT, Warszawa 1980.

[24] Bruckner D., Podhorodyński M., Skalmierski B.: Cięgowe ujęcie teorii procesów stochastycznych. Prace IPPT, Warszawa 1980.

[25] Skalmierski B.: Mechanika z wytrzymałością materiałów dla automatyków. PWN, Warszawa 1973.

[26] Стратанович Р.Л.: Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. Изд. Советское Радио, Москва 1961.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Andrzej Tylikowski

Wpłynęło do Redakcji: listopad 1983 r.

НЕКОТОРЫЕ СОВРЕМЕННЫЕ АСПЕКТЫ АКСИОМАТИЧЕСКОГО ОБОСНОВАНИЯ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Р е з ю м е

В работе рассмотрены вопросы современного аксиоматического обоснования основных понятий теории вероятностей следуя аксиомам А.Н. Колмогорова и Р. Мизеса. Проанализированы различия и сходные черты между обеими аксиоматиками на базе их применения к алгоритмическому расчёту вероятностей и современного представления понятий случайности и вероятности.

Указано также на новое течение в теории вероятностей, развиваемое в работах Б. Скальмерского и его сотрудников.

ON MODERN PROBLEMS OF THE AXIOMATIC PROVING OF THE BASIC NOTIONS OF THE PROBABILITY THEORY

S u m m a r y

Some present problems of the probability theory basic notions that are proved od the base of the Kolmogorov axioms and the Mises axioms are discussed. There are shown some similarities between the two axiom systems from the point of view of their application for the algorithmic probability calculation and for the modern presentation of the random and probability notions. A new approach developped by Skalmierski and his coworkers has been mentioned.