

Jan BIAŁEK

ALGORYTM WYZNACZANIA WSKAZNIKÓW DEFORMACJI
PRZESTRZENNEJ DYNAMICZNEJ NIECKI OSIADANIA

Streszczenie. W artykule podano sposób obliczania wskaźników deformacji przestrzennej dynamicznej niecki osiadania. Przyjęto wzór St. Knothego na obliczanie końcowych wartości osiadania punktu spowodowanego wybraniem prostokątnej parceli.

W oparciu o prawo wzrostu Mitscherlicha oraz zasadę superpozycji wpływów, podano wzory na obliczanie wartości wskaźników deformacji dla przypadku eksploatacji w postaci prostokątnej parceli, w trakcie jej wybierania i po zatrzymaniu frontu ścianowego.

Następnie podano sposób obliczania tych wskaźników dla wybrania o kształcie dowolnego wieloboku, w postaci dogodnej do zaprogramowania obliczeń na EMC.

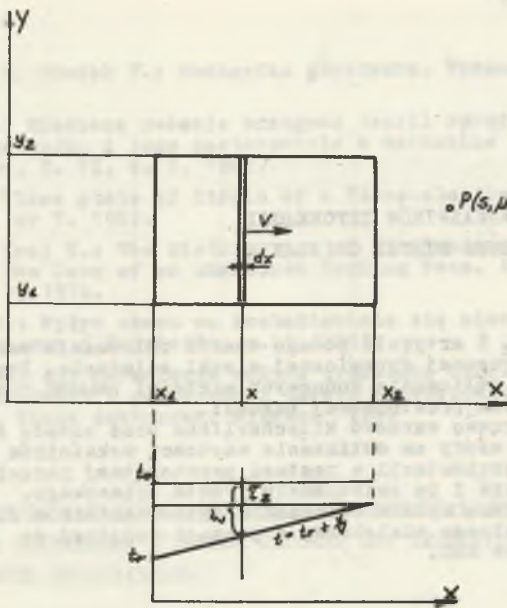
1. Wstęp

Występujące w praktyce przypadki niecek osiadania bardzo rzadko spełniają założenie płaskiego stanu odkształceń, a ponadto szczególnie w środkowej partii niecki istotne są wartości dynamicznych wskaźników deformacji. Poniżej podano propozycję zaadoptowania przestrzennego wariantu teorii St. Knothego do obliczania wskaźników deformacji przestrzennej dynamicznej niecki osiadania. Obliczenie tych wskaźników jest praktycznie możliwe na EMC po uprzednim sporządzeniu odpowiedniego programu. Podobnie można zaadoptować wzory teorii np.: T. Kochmańskiego lub B. Drzęźli.

2. Eksploatacja w kształcie prostokąta

Przyjmując układ jak na rys. 1, wzór teorii St. Knothego ma postać następującą:

$$W(S, \mu) = \frac{w_0}{r^2} \int_{y_1}^{y_2} e^{-\lambda \left(\frac{y-\mu}{r}\right)^2} dy \int_{x_1}^{x_2} e^{-\lambda \left(\frac{x-s}{r}\right)^2} dx \quad (2.1)$$



Rys. 1

Zakładając, że front eksploatacji prostokątnej parceli jest prostopadły do osi x , oraz przesuwają się jednostajnie z prędkością V , czas jaki upływie od wyeksploatowania elementu $dS = (y_2 - y_1) \cdot dx$ wyraża się zależnością:

$$\tau = t_0 - \left(t_r + \frac{x - x_1}{V} \right), \quad (2.2)$$

gdzie:

τ - czas, jaki upływał od chwili wyeksploatowania elementu powierzchni dS do chwili t_0 ,

t_0 - data, dla której dokonujemy obliczenia,

t_r - data rozpoczęcia eksploatacji parceli.

Dla frontu zatrzymanego

$$\tau = \tau_{\max} > 0, \quad \text{gdy } x = x_2$$

Dla frontu czynnego

$$\tau = 0, \quad \text{gdy } x = x_1$$

gdzie:

τ_x - czas, jaki upłynie od chwili zakończenia eksploatacji parceli do chwili to.

Widzimy zatem, że dla sytuacji z rys. 1

$$\tau_x = \tau(t_0, t_r, x, x_1, V),$$

a więc nie zależy od zmiennej y . Zakładając między innymi za autorami [8], [10] zależność:

$$dw(s, \mu, t_0) = ds(s, \mu) \cdot f(\tau), \quad (2.3)$$

gdzie:

$f(\tau)$ - funkcja opisująca przebieg osiadania w czasie,

$dw(s, \mu)$ - końcowe osiadanie punktu $P(s, \mu)$ wywołane wybraniem elementu ds .

Przyjmując $f(\tau)$ jako prawo wzrostu Mitscherlicha i nieco je rozszerzając, otrzymamy:

$$f(\tau) = 1 - e^{-c\tau^p}, \quad (2.4)$$

gdzie:

τ - dane wsorem 2.2,

c - współczynnik charakteryzujący prędkość osiadania w czasie,

p - wykładnik potęgi charakteryzujący przebieg osiadania w czasie.

Wstawiając 2.3 i 2.4 do 2.1 oraz uwzględniając fakt niezależności τ od y otrzymamy:

$$w(s, \mu, t_0) = \frac{w_0}{r^2} \int_{y_1}^{y_2} e^{-\pi \left(\frac{y-\mu}{r}\right)^2} dy \int_{x_1}^{x_2} e^{-\pi \left(\frac{x-s}{r}\right)^2} (1 - e^{-c\tau^p}) dx. \quad (2.5)$$

Obliczając kolejne pochodne względem s i μ , otrzymamy:

nachylenia terenu w punkcie $P(s, \mu)$ w chwili to

$$\tau_x = \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{w_0}{r^2} \int_{y_1}^{y_2} e^{-\pi \left(\frac{y-\mu}{r}\right)^2} dy \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{2\pi}{r} \cdot \frac{(x-s)}{r} e^{-\pi \left(\frac{x-s}{r}\right)^2} (1 - e^{-c\tau^p}) dx \quad (2.6.1)$$

$$T_y = \frac{\partial W}{\partial \mu} = \frac{-W_0}{r^2} \left(e^{-\pi \left(\frac{y_2 - \mu}{r} \right)^2} - e^{-\pi \left(\frac{y_1 - \mu}{r} \right)^2} \right) \cdot \int_{x_1}^{x_2} e^{-\pi \left(\frac{x-s}{r} \right)^2} (1 - e^{-c\tau^p}) dx \quad (2.6.2)$$

krzywizny przekroju pionowego w punkcie P(s, μ) w chwili to

$$K_x = \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} = \frac{-2\pi W_0}{r^4} \int_{y_1}^{y_2} e^{-\pi \left(\frac{y-\mu}{r} \right)^2} dy \cdot \int_{x_1}^{x_2} \left[1 - 2\pi \left(\frac{x-s}{r} \right)^2 \right] e^{-\pi \left(\frac{x-s}{r} \right)^2} (1 - e^{-c\tau^p}) dx \quad (2.7.1)$$

$$K_y = \frac{\partial^2 W}{\partial \mu^2} = \frac{-2\pi W_0}{r^2} \left(\frac{y_2 - \mu}{r} e^{-\pi \left(\frac{y_2 - \mu}{r} \right)^2} - \frac{y_1 - \mu}{r} e^{-\pi \left(\frac{y_1 - \mu}{r} \right)^2} \right) \cdot \int_{x_1}^{x_2} e^{-\pi \left(\frac{x-s}{r} \right)^2} (1 - e^{-c\tau^p}) dx \quad (2.7.2)$$

$$K_{xy} = \frac{\partial^2 W}{\partial s \partial \mu} = \frac{-W_0}{r^2} \left(e^{-\pi \left(\frac{y_2 - \mu}{r} \right)^2} - e^{-\pi \left(\frac{y_1 - \mu}{r} \right)^2} \right) \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{2\pi}{r} \cdot \frac{x-s}{r} \cdot e^{-\pi \left(\frac{x-s}{r} \right)^2} (1 - e^{-c\tau^p}) dx \quad (2.7.3)$$

Prędkość osiadania punktu P w chwili to

$$v_w = \frac{\partial W}{\partial t_0} = \frac{W_0}{r^2} \cdot c \cdot p \cdot \int_{y_1}^{y_2} e^{-\pi \left(\frac{y-\mu}{r} \right)^2} dy \int_{x_1}^{x_2} e^{-\pi \left(\frac{x-s}{r} \right)^2} \tau^{p-1} e^{-c\tau^p} dx \quad (2.8)$$

Odkształcenia pionowe w chwili to

$$\epsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{r}{2\pi} \cdot \frac{dr}{dz} \cdot (K_x(s, \mu, z, t_0) + K_y(s, \mu, z, t_0)) + \quad (2.9)$$

$$-\frac{W_0}{r^2} \cdot \frac{dc}{dz} = \int_{y_1}^{y_2} e^{-\mathcal{K} \left(\frac{y-\mu}{r}\right)^2} dy \int_{x_1}^{x_2} e^{-\mathcal{K} \left(\frac{x-s}{r}\right)^2} e^{-cT^p} dx, \quad (2.9)$$

gdzie:

$$r(z) = r_p \left(\frac{z}{H}\right)^k$$

$$\frac{dr}{dz} = \frac{k}{H} \cdot r_p \cdot \left(\frac{z}{H}\right)^{k-1} \quad (2.10)$$

wg W. Budryka $k = \sqrt{2\mathcal{K}} \cdot \operatorname{tg} \beta$,

wg B. Drzęźli $k = 0,665$,

$c = c(c_p, H, Z)$ - wartość tę dla przypadku $p = 1$ określił empirycznie J.S. Pielok w pracy [9].

Zauważmy, że dla tak określonego ε_z

$$\varepsilon_z + \varepsilon_x + \varepsilon_y \neq 0 \quad \text{dla } t_0 < \infty, \quad \text{gdy } \frac{dc}{dz} \neq 0$$

Przemieszczenia poziome

$$U_x(s, \mu, t_0) = -B \cdot T_x(s, \mu, t_0) \quad U_y(s, \mu, t_0) = -B \cdot T_y(s, \mu, t_0) \quad (2.11)$$

Odkształcenia poziome

$$\varepsilon_x(s, \mu, t_0) = -B \cdot T_x(s, \mu, t_0) \quad \varepsilon_y(s, \mu, t_0) = -B \cdot T_y(s, \mu, t_0) \quad (2.12)$$

Odkształcenia postaciowe

$$\tilde{T}_{xy}(s, \mu, t_0) = -B \cdot K_{xy}(s, \mu, t_0) \quad (2.13)$$

W powyższych wzorach wartość B określona może być następująco:

$$B(z) = \frac{r}{2\mathcal{K}} \cdot \frac{dr}{dz} \quad - \text{wg W. Budryka}$$

$$B(z) \Big|_{z=H} = \frac{0,665r}{2\mathcal{K} \operatorname{tg} \beta} \cdot \frac{1-\nu}{\nu}, \quad - \text{wg B. Drzęźli}$$

gdzie:

ν - liczba Poissona.

Przedstawione powyżej wzory dla punktu P (0,0), w chwili to oraz współrzędnych bezwymiarowych o postaci $x' = \frac{x}{l}$, $y' = \frac{y}{l}$, $x_1' = \frac{x_1}{l}$, ... po formalnym zastąpieniu oznaczeń przimowanych nieprzimowanymi przysiębora następującą postać:

$$W(0,0,t_0) = W_0 \int_{y_1}^{y_2} e^{-\pi y^2} dy \int_{x_1}^{x_2} e^{-\pi x^2} (1 - e^{-c\tau^p}) dx \quad (2.14)$$

$$T_x(0,0,t_0) = \frac{W_0}{l} \int_{y_1}^{y_2} e^{-\pi y^2} dy \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x e^{-\pi x^2} (1 - e^{-c\tau^p}) dx \quad (2.15)$$

$$T_y(0,0,t_0) = \frac{-W_0}{x} (e^{-\pi y_2^2} - e^{-\pi y_1^2}) \int_{x_1}^{x_2} e^{-\pi x^2} (1 - e^{-c\tau^p}) dx \quad (2.16)$$

$$K_x(0,0,t_0) = -\frac{2\pi W_0}{x^2} \int_{y_1}^{y_2} e^{-\pi y^2} dy \int_{x_1}^{x_2} (1 - 2\pi x^2) e^{-\pi x^2} (1 - e^{-c\tau^p}) dx \quad (2.17)$$

$$K_y(0,0,t_0) = -\frac{2\pi W_0}{x^2} (y_2 e^{-\pi y_2^2} - y_1 e^{-\pi y_1^2}) \int_{x_1}^{x_2} e^{-\pi x^2} (1 - e^{-c\tau^p}) dx \quad (2.18)$$

$$K_{xy}(0,0,t_0) = -\frac{W_0}{x^2} (e^{-\pi y_2^2} - e^{-\pi y_1^2}) \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x e^{-\pi x^2} (1 - e^{-c\tau^p}) dx \quad (2.19)$$

$$V_w(0,0,t_0) = W_0 \cdot c \cdot p \cdot \int_{y_1}^{y_2} e^{-\pi y^2} dy \int_{x_1}^{x_2} e^{-\pi x^2} \tau^{p-1} e^{-c\tau^p} dx \quad (2.20)$$

$$\xi_z(0,0,z,t_0) = -B(z)(K_x(0,0,z,t_c) + K_y(0,0,z,t_0)) +$$

$$-W_0 \frac{dc}{dz} \int_{y_1}^{y_2} e^{-\lambda x^2} dy \int_{x_1}^{x_2} e^{-\lambda x^2} e^{-\alpha \tau} P dx \quad (2.21)$$

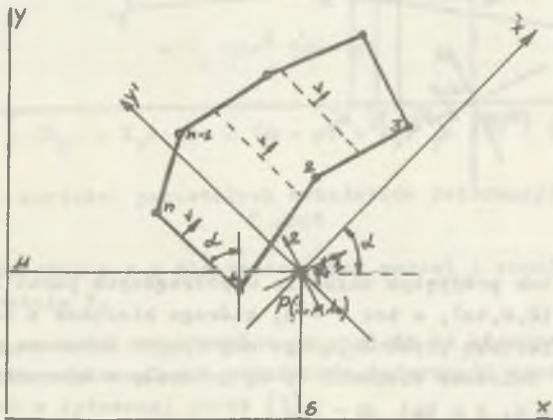
gdzie:

$$\tau = (t_0 - t_r + \frac{x-x_1}{v}) \cdot r$$

3. Algorytm wyznaczania wartości wskaźników deformacji dla dowolnego wieloboku wypukłego

Każdą parcelę eksploatacyjną można z dostateczną dla praktyki dokładnością opisać wielobokiem.

Przyjmując na mapie prawoskrętny układ współrzędnych oraz zakładając, że front ściany jest równoległy do boku 1 - n, otrzymany układ jak na rys.2.



Rys. 2

Aby obliczyć wartości wskaźników deformacji w dowolnym punkcie $P(s, \mu)$ w chwili to, w kierunkach 1 i 2, tworzących z osią x przyjętego układu współrzędnych dowolny kąt ψ , $\psi + 90^\circ$, należy wykonać następujące operacje:

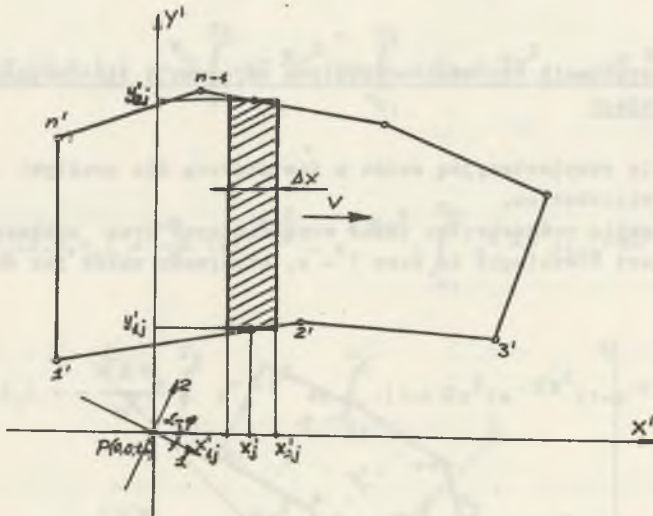
a) Wyznaczyć kąt α , jaki tworzy bok 1 - n wieloboku z osią y.

$$\alpha = \text{arctg} \frac{x_1 - x_n}{y_1 - y_n} \quad (3.1)$$

b) Dokonać transformacji układu x, y na układ x', y' polegającej na umieszczeniu środka układu współrzędnych x, y w punkcie $P(s, \mu, t_0)$ oraz obróceniu go o kąt α względem układu x, y . Po dokonaniu tej transformacji, otrzymamy układ jak na rys. 3. Współrzędne wierzchołków wieloboku w nowym układzie współrzędnych obliczymy ze wzorów:

$$x_1 = (x_1 - s) \cdot \cos \alpha + (y_1 - \mu) \cdot \sin \alpha \quad (3.2)$$

$$y_1 = (x_1 - s) \cdot \sin \alpha + (y_1 - \mu) \cdot \cos \alpha$$



Rys. 3

Zauważmy, że w tak przyjętym układzie współrzędnych punkt $P(s, \mu, t_0)$ przeszedł w punkt $P(0, 0, t_0)$, a bok 1 - n, którego kierunek z założenia x jest równoległy do kierunku przesuwanego się frontu ścianowego jest prostopadły do osi x . Założone kierunki 1, 2, przeszły w kierunki 1', 2' i są odczytane od osi x, y o kąt $\alpha - \varphi$.

c) Dzielimy wielobok na M prostokątów takich, że ich wymiar $\Delta x = \text{constans}$. Podział ten musi być dostatecznie gęsty, by prostokąty te jak

^{x)} Można przyjąć inny sposób podawania kierunku frontu eksploatacji, lecz ten sposób nie wymaga wprowadzenia dodatkowych danych. W przypadku, gdy na mapie pokładowej kierunek ten nie pokrywałby się z kierunkiem frontu ścianowego, wówczas można założyć mały bok 1-n o kierunku równoległym do kierunku frontu ścianowego.

najlepiej opisywały brzegi wieloboku. Z prostych zależności liniowych dla każdego prostokąta obliczamy y'_{1j} , y'_{2j} oraz x'_{1j} , x'_{2j} .

d) Dla tak zwymiarowanych prostokątów obliczamy odpowiednie czasy τ_j .

e) Obliczamy i sumujemy wartości wskaźników deformacji dla każdego prostokąta, zgodnie ze wzorami 2.14 ÷ 2.21.

f) Transformujemy otrzymane wartości wskaźników z kierunków równoległych do x' , y' na kierunki zadane 1, 2, wg wzorów podanych przez B. Drzęźlę w pracy [3], słusznych dla dowolnych regularnych niecek osiadania.

$$T_1 = T_x \cos(\alpha - \varphi) + T_y \sin(\alpha - \varphi)$$

$$T_2 = T_x \sin(\alpha - \varphi) + T_y \cos(\alpha - \varphi) \quad (3.3)$$

$$K_1 = K_x \cos^2(\alpha - \varphi) + 2 K_x y' \sin(\alpha - \varphi) \cos(\alpha - \varphi) + K_y \sin^2(\alpha - \varphi)$$

$$K_2 = K_x \sin^2(\alpha - \varphi) - 2 K_x y' \sin(\alpha - \varphi) \cos(\alpha - \varphi) + K_y \cos^2(\alpha - \varphi)$$

$$K_{1,2} = \frac{1}{2} (K_y - K_x) \sin 2(\alpha - \varphi) + K_x y' \cos 2(\alpha - \varphi)$$

g) Obliczamy wartości pozostałych wskaźników deformacji wg wzorów: 2.11 ÷ 2.13.

h) Powtarzamy cykl a ÷ g dla pozostałych parcel i sumujemy wartości wskaźników w punkcie P.

i) Obliczamy wartości ekstremalne ze względu na kierunek oraz kierunki występowania tych ekstremalnych wskaźników deformacji zgodnie ze wzorami podanymi również w cytowanej pracy [3].

4. Dokładność obliczeń

Dokładność obliczeń zależy od dwóch grup przyczyn:

- a) wierności opisu procesu deformacji górotworu i powierzchni wzorami wyjściowymi,
- b) dokładności przyjętego sposobu numerycznego.

Problem wierności opisu procesu deformacji górotworu i powierzchni przedstawionymi wzorami przekracza ramy niniejszego opracowania. Zwiększenie dokładności obliczeń numerycznych każdorazowo można uzyskać poprzez zagęszczenie podziału na prostokąty obliczeniowe S_j . Uzyskujemy przez to zwiększenie dokładności odwzorowania powierzchni wiałoboku.

Ponieważ żadna z występujących we wzorach 2.14 - 2.21 całek w ogólnym przypadku $p \neq 0,1$ nie jest rozwiązywalna przez kwadratury, wynika stąd konieczność dokładnego i ekonomicznego zaprogramowania procesu numerycznego.

Dla każdego prostokąta o wymiarach $y_2 - y_1$ oraz Δx zachodzi konieczność obliczenia całki o postaci:

$$\int_{y_1}^{y_2} e^{-\pi y^2} dy$$

Obliczanie tej całki jest najczęściej powtarzaną i najdłuższą, ze względu na długość przedziału, operacją cyklu obliczeniowego. Najlepsze wyniki w sensie dokładności i czasu trwania obliczeń można osiągnąć, przedstawiając wartość tej funkcji przy pomocy wielomianów Czebyszewa. Całkowanie po przedziale Δx w przypadku $\Delta x < 0,03$ można zastąpić obliczeniem iloczynu Δx i wartości funkcji podcałkowej, obliczonej w środku podziału. Na podstawie przeprowadzonych testów stwierdzono, że błąd względny obliczonych wskaźników jest wówczas $< 0,001$ dla osiadań i $< 0,005$ dla pozostałych wskaźników. Jest to dokładność wystarczająca dla celów praktycznych.

Wnioski i uwagi

Przedstawiony powyżej sposób pozwala na obliczanie wskaźników deformacji przestrzennej dynamicznej niecki osiadania, po uprzednim zaprogramowaniu cyklu obliczeniowego na EMC.

LITERATURA

- [1] Budryk W.: Wyznaczanie wielkości poziomych odkształceń terenu Arch. Gór. i Hutn. T. 1, z. 1, 1953.
- [2] Gil H.: Plane state of Strain of a Visco-elastic Body. Biuletyn PAN, Vol. XI, nr 7, 1963.
- [3] Drzęźła B.: Pionowe deformacje górotworu przy eksploatacji górniczej. Zeszyt Nauk. Pol. Śl. Seria Górniczo z. 37, 1969.
- [4] Drzęźła B.: Przybliżone rozwiązanie równań teorii sprężystości w zastosowaniu do mechaniki górotworu. Archiwum Górniczo T. XX, z. 2, 1975.

- [5] Drzeźła B.: Informacje o programach dla maszyny cyfrowej do obliczania deformacji górotworu nad eksploatacją. Przegląd Górniczy nr 3, 1974.
- [6] Drzeźła B., Białek J.: Zależność i dane tabelaryczne dotyczące przypadku płaskiego dynamicznej niecki osiadania. Prz. Gór., w druku.
- [7] Knothe S.: Równanie profilu ostatecznie wykształconej niecki osiadania. Arch. Gór. i Hutn. T. 1, Z. 1, 1953.
- [8] Knothe S.: Wpływ czasu na kształtowanie się niecki osiadania. Arch. Gór. i Hutn. T. 1, z. 1, 1953.
- [9] Pielok J.S.: Określenie zmienności współczynnika czasu dla opisu kształtowania się niecek obniżeniowych w górotworze nad eksploataowanym pokładem. Kraków 1974. - pr. dokt. nieopublikowana.
- [10] Trojanowski K.: Dynamiczne wartości deformacji powierzchni wywołane wpływem eksploatacji górniczej. Przegląd Górniczy nr 1, 1967.

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УКАЗАТЕЛЕЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДЕФОРМАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ МУЛДЫ ОСЕДАНИЯ

Р е з ю м е

В статье рассматривается способ вычисления указателей пространственной деформации динамической мулды оседания. Принято формулу С. Кнотого для вычисления конечных величин оседаний точки вызванной разработкой прямоугольного участка. Опираясь на правило возрастания Митасхерлиха, а также принципов суперпозиции влияний, даются формулы для вычисления величин указателей деформации для случая эксплуатации в виде прямоугольного участка во время его разработки и после прекращения фронта лавы. Дан способ вычисления этих указателей для вырезания многоугольника любой формы, удобной для запрограммирования на ЭМС.

STATING AN ALGORITHM FOR DYNAMIC SPATIAL DEFORMATION INDEXES OF SUBSIDENCE BASINS

S u m m a r y

Deformation indicators have been presented with means of determination. Knothe's formula was accepted to calculate final point subsidence values caused by a worked out rectangular field. Basing of Mitscherlich's increment rule and the principle of influence superposition, formulae have been stated to calculate deformation values for working at a rectangular field and after wall works have been terminated. Consequently calculations were given for working out any given polygon in a form suitable for computer processing.