ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: AUTOMATYKA z. 74 Nr kol. 810

Adam Janiak
Politechnika Wrocławska

NIEPERMUTACYJNY PROBLEM KOLEJNOŚCIOWY TAŚMOWY Z ROZDZIAŁEM OGRANICZONYCH ZASOBÓW

Streszczenie. W artykule rozpatruje się ogólny dyskretny taśmowy proces przemysłowy z rozdziałem ograniczonych podzielnych w sposób ciągły nieodnawialnych zasobów różnych rodzajów. Algorytm rozwiązania oparto na metodzie podziału i ograniczeń, wykorzystując technikę segmentową. Podano numeryczne wyniki obliczeniowe.

1. Wstęp

Ogólny dyskretny taśmowy proces przemysłowy charakteryzuje się przepływem materiałów w postaci pojedynczych elementów lub ich partii przez kolejne maszyny; przy czym kolejność obróbki tych elementów na kolejnych maszynach może być różna. Czasy trwania poszczególnych operacji na pewnych maszynach mogą być ustalone,na innych mogą zależeć od ilości zasobów przydzielanych tym operacjom. Przy czym globalne ilości zasobów przydzielane do poszczególnych maszyn są ograniczone. Problem zatem polega na określeniu takiej kolejności wykonywania elementów na poszczególnych maszynach, przy założeniu, że każdy z elementów wykonywany jest kolejno na wszystkich maszynach. oraz takiego rozdziału ograniczonych zasobów pomiędzy operacje wykonywane na maszynach, na których czasy trwania tychże operacji zależą od ilości przydzielonych im zasobów, aby zminimalizować czas wykonania całego zadania produkcyjnego.

Ogólny niepermutacyjny problem kolejnościowy taśmowy z rozdziałem podzielnych w sposób ciągły ograniczonych nieodnawialnych zasobów /oznaczany $n|m|F, Res \geqslant 0|C_{max}$/ można precyzyjnie sformułować następująco. Każde z zadań $J_1, J_2, \ldots, J_i, \ldots, J_n$ ma być wykonywane na m maszynach począwszy od maszyny M_1, a skończywszy na maszynie M_m. Zadanie J_i zatem składa się z ciągu m operacji $O_{i1}, O_{i2}, \ldots, O_{iv}, \ldots, O_{in}$, operacja O_{iv} odpowiada wykonaniu zadania J_i w sposób ciągły na maszynie M_v w czasie p_{iv}. Zakłada się, że dla maszyn ze zbioru V_1 $p_{iv} = const$, $v \in V_1$; a dla pozostałych maszyn /należących do zbioru V_2, przy czym $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = \{1,2,\ldots,m\}$/ $p_{iv} \triangleq f_{iv}(u_{iv})$, gdzie $f_{iv}(u_{iv})$ jest wypukłą funkcją, a u_{iv} jest ilością zasobów przydzielonych operacji O_{iv} /na maszynie $v \in V_2$/. Zbiór dopuszczalnych rozdziałów zasobów zdefiniowany jest następująco:

$$U \triangleq \Big\{ \bar{u} \in R^{m' \times n} : \bar{u} = [\bar{u}_{v_1}, \bar{u}_{v_2}, \ldots, \bar{u}_{v_w}, \ldots, \bar{u}_{v_{m'}}]' \wedge$$

$$\wedge\ m' \triangleq \bar{\bar{V}}_2 \wedge \forall(w = 1,2,\ldots,m')(v_w \in V_2) \wedge \forall(v_w \in V_2)$$

$$\left[\left(\bar{u}_{v_w} = [u_{1v_w}, u_{2v_w}, \ldots, u_{iv_w}, \ldots, u_{nv_w}]\right) \wedge \sum_{i=1}^{n} u_{iv_w} \le \hat{U}_{v_w} \wedge \right.$$
$$\left. \wedge\ \hat{U}_{v_w} \geq 0 \wedge \forall (i=1,2,\ldots,n)\left(\alpha_{iv_w} \le u_{iv_w} \le \beta_{iv_w}\right)\right]\Big\},$$

gdzie $\hat{U}_{v_w}$ jest globalnie dysponowaną ilością zasobów przeznaczoną do realizacji operacji na maszynie $v_w \in V_2$, a $0 \le \alpha_{iv_w} \le \beta_{iv_w} \le \infty$ są znanymi parametrami.

Należy znaleźć taką kolejność wykonywania operacji na każdej z maszyn oraz taki rozdział zasobów $\hat{U}_v$ pomiędzy operacje wykonywane na każdej z maszyn v ze zbioru V_2, aby zminimalizować czas wykonania wszystkich operacji, oznaczany C_{max}. Problem ten dla ustalonego rozdziału zasobów /lub dla $\hat{U}_v = 0$ dla każdego $v \in V_2$/ sprowadza się do klasycznego niepermutacyjnego problemu taśmowego $n|m|F|C_{max}$ [1], który jest problemem NP-zupełnym. Zatem oczywistym jest, że rozpatrywany w pracy problem jest NP-zupełny.

Problemy rozdziału zasobów dla ustalonego uszeregowania operacji były rozpatrywane w wielu pracach, np. dla różniczkowych modeli operacji zależnych od odnawialnych podzielnych w sposób ciągły zasobów był rozpatrywany w [3]. Problem ten został uogólniony w [6] na problem szeregowania operacji na identycznych równoległych maszynach.

Problemy, w których żądania zasobowe operacji są dyskretne, dla odnawialnych, nieodnawialnych i podwójnie ograniczonych zasobów, dla podzielnych i niepodzielnych operacji przy wielokryterialnym podejściu były rozpatrywane w [5].

2. Model matematyczny

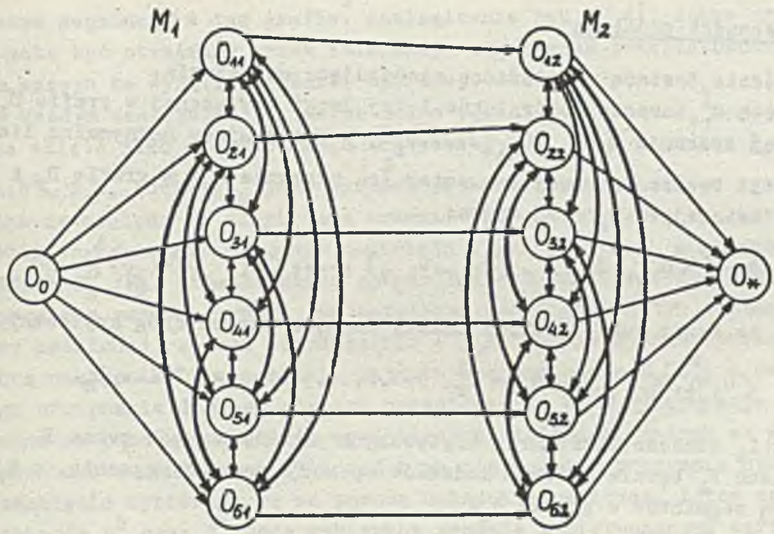
Problem $n|m|F, Res \geq 0|C_{max}$, analogicznie jak problem gniazdowy $n|m|G, Res \geq |C_{max}$ [2,4], można zamodelować za pomocą grafu dysjunktywnego $D = \langle A, V^0 \cup V \rangle$, gdzie:

- A jest zbiorem wierzchołków reprezentujących operacje łącznie z fikcyjną operacją początkową O_o oraz końcową O_*:
$$A = \{O_o, O_{11}, \ldots, O_{1m}, \ldots, O_{n1}, \ldots, O_{nm}, O_*\};$$
- V^0 jest zbiorem skierowanych łuków konjunktywnych reprezentujących wymagania przechodzenia każdej pracy przez każdą z maszyn począwszy od M_1 a skończywszy na M_m:
$$V^0 = \{\langle O_{iv}, O_{iv+1}\rangle \mid i=1,\ldots,n;\ v=1,\ldots,m-1\} \cup$$
$$\cup \{\langle O_o, O_{i1}\rangle \mid i=1,\ldots,n\} \cup \{\langle O_{im}, O_*\rangle \mid i=1,\ldots,n\};$$
- V jest zbiorem skierowanych łuków dysjunktywnych reprezentujących możliwą kolejność wykonywania operacji na poszczególnych maszynach:

$$V = \left\{ \langle O_{iv}, O_{i'v} \rangle \mid i=1,\dots,n;\ i'=1,\dots,n;\ i \neq i';\ v=1,\dots,m \right\}.$$

Do każdego wierzchołka O_{iv} jest przyporządkowana wartość p_{iv} /a dokładniej $p_{iv}(u_{iv})$ dla $v \in V_2$/ z $p_o = p_{*} = 0$.

Graf dysjunktywny dla przykładu /6|2|F, Res$\geqslant$0|C_{max}/ z rozdz. 5 przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Graf dysjunktywny $D = \langle A, V^o \cup V \rangle$ dla przykładu z rozdziału 5.

Niech $S_r \subset V$ zawiera dokładnie po jednym łuku dysjunktywnym z każdej pary łuków dysjunktywnych

$$\left\{ \langle O_{iv}, O_{i'v} \rangle, \langle O_{i'v}, O_{iv} \rangle \right\},\ \text{a graf}\ D_r(S_r) = \langle A, V^o \cup S_r \rangle$$

będzie grafem acyklicznym. Wybór łuku $\langle O_{iv}, O_{i'v} \rangle$ oznacza, że operacja O_{iv} jest wykonywana przed operacją $O_{i'v}$ na maszynie M_v. Niech $R_s = \{ S_1, S_2, \dots, S_r, \dots, S_s \}$ będzie rodziną wszystkich takich podzbiorów, a $R_D = \{ D_r = \langle A, V^o \cup S_r \rangle \}$ będzie rodziną wszystkich grafów odpowiadających tym podzbiorom.

Zatem R_D jest rodziną grafów odpowiadających wszystkim dopuszczalnym uszeregowaniom operacji w problemie n|m|F, Res$\geqslant$0|C_{max}. Problem ten jest równoważny problemowi znalezienia minimaxymalnej drogi:

$$L^{*} = L_{S_r^{*}}(\bar{u}^{*}) = \min_{D_r \in R_D,\, \bar{u}_r \in U} L_r(\bar{u}_r)$$

przy optymalnym wyborze łuków dysjunktywnych S_r^* oraz optymalnym rozdziale zasobów $\bar{u}_r^* \in U$. /$L_r(\bar{u}_r)$ jest długością drogi krytycznej w grafie D_r przy rozdziale zasobów $\bar{u}_r \in U$/.

Łatwo zauważyć, że w rozpatrywanym problemie może wystąpić wiele dróg krytycznych w grafie $D_r \in R_D$ przy optymalnym rozdziale zasobów $\bar{u}_r^* \in U$.

3. Własności problemu

Obecnie zostaną wprowadzone następujące oznaczenia.

Niech C_r^l oznacza zbiór łuków l-tej drogi krytycznej w grafie $D_r \in R_D$.

Ciąg operacji $\langle O_{i_1v}, O_{i_2v}, \ldots, O_{i_gv} \rangle$ zawierający maksymalną liczbę operacji będzie nazywany segmentem /na maszynie M_v/ w grafie $D_r \in R_D$, jeśli istnieje w $D_r \in R_D$ droga:

$$B = \langle \langle O_{i_1v}, O_{i_2v} \rangle, \langle O_{i_2v}, O_{i_3v} \rangle, \ldots, \langle O_{i_{g-1}v}, O_{i_gv} \rangle \rangle$$

taka, że każdy łuk tej drogi należy do tych samych dróg krytycznych, tzn.

$$\langle O_{i_jv}, O_{i_{j+1}v} \rangle \in S_r \cap C_r^l, \; j=1,2,\ldots,g-1; \; l=1,2,\ldots,l_s,$$

gdzie: l_s oznacza ilość dróg krytycznych przechodzących przez B.

Niech P_k będzie zbiorem indeksów operacji k-tego segmentu, a k_r będzie liczbą segmentów w grafie D_r.

Twierdzenie 1

Dla każdego $D_r \in R_D$, jeśli graf $D_s \in R_D$ został otrzymany z grafu D_r poprzez zmianę kolejności wykonywania operacji i jeśli $L_s(\bar{u}_s^*) \geq L_r(\bar{u}_r^*)$, to w grafie D_s co najmniej jedna operacja k-tego segmentu w grafie D_r została przesunięta przed pierwszą lub za ostatnią operację tego segmentu dla k=1 albo k=2, albo,..., albo k_r.

Dowód powyższego twierdzenia jest analogiczny do dowodu Wniosku 1 z [4], dotyczącego problemu $n|m|G, Res \geq 0|C_{max}$.

Powyższe twierdzenie implikuje zasadę podziału w metodzie podziału i ograniczeń zastosowanej do rozwiązania tego problemu. Startując z pewnego dopuszczalnego grafu początkowego $D_1 = \langle A, V^0 \cup S_1 \rangle \in R_D$, wybranego za pomocą specjalnie opracowanego w tym celu algorytmu heurystycznego, generowany jest ciąg bezkonturowych grafów $D_r = \langle A, V^0 \cup S_r \rangle \in R_D$. Dla każdego grafu z ciągu wyznaczany jest optymalny rozdział zasobów $\bar{u}_r^* \in U$; następnie identyfikowane są drogi krytyczne i wszystkie segmenty P_k, numerowane od k=1 do $k=k_r$. Każdy nowy graf $D_s \in R_D$ jest otrzymywany z poprzedniego grafu D_r, z ciągu grafów, przez przesunięcie jednej operacji w pewnym segmencie w D_r. Każda operacja O_{i_jv} k-tego segmentu jest przesuwana przed pierwszą albo za ostatnią operację tego segmentu.

Dla każdego grafu $D_r \in R_D$ generowanego przez ten algorytm, zbiór $F_r \in S_r$ pewnych łuków dysjunktywnych /reprezentujących relację poprzedzania/ jest ustalany.

Obecnie zostanie określone dolne ograniczenie $LB_k^b(O_{i_j v})$, $/LB_k^a(O_{i_j v})/$ na długość drogi krytycznej w grafie $D_s \in R_D$ otrzymanym z grafu D_r przez przesunięcie operacji $O_{i_j v}$ przed pierwszą /za ostatnią/ operację w k-tym segmencie w tym grafie. Analogicznie jak w [4], dolne ograniczenie może być otrzymane przez relaksację ograniczeń przepustowości wszystkich maszyn za wyjątkiem jednej wybranej. Ponieważ zbiór F_s jest ustalony w każdym następniku D_s, zatem dolne ograniczenie dla D_s mogłoby być także wzięte jako długość drogi krytycznej $L(F_s,\bar{u}^*_{F_s})$ w grafie $D_s(F_s) = \langle A, V^o \cup F_s \rangle$, gdzie $\bar{u}^*_{F_s}$ jest optymalnym rozdziałem zasobów w tym grafie. Jednak ze względu na długi czas trwania obliczeń dotyczących rozdziału zasobów to dolne ograniczenie pominięto w implementacji programowej.

Niech E_k^b $/E_k^a/$ oznacza zbiór operacji /kandydatów/, które mają być przesunięte przed pierwszą /za ostatnią/ operację w k-tym segmencie /przy ustalonej relacji poprzedzania - F_r/. Należy wybrać operację generującą następnik D_s z możliwie najmniejszą wartością $L_s(\bar{u}^*_s)$ w celu szybkiego otrzymania dobrego górnego ograniczenia. W [2,4] operacje te wybierano za pomocą specjalnie wyznaczanych wielkości, jednak ze względu na stosunkowo długi czas obliczeń tych wielkości,w programie operacje do przesunięcia wybierane są za pomocą dolnych ograniczeń. Zatem operacje ze zbiorów E_k^b oraz E_k^a będą wybierane zgodnie z nierosnącymi wartościami dolnych ograniczeń.

4. Algorytm

Krok 1. Wyznacz $\bar{u}^*_r \in U$ oraz $L_r(\bar{u}^*_r)$ w grafie D_r. Jeśli $L_r(\bar{u}^*_r) < L_*(*)$ $/L_*(*)$ jest aktualnym górnym ograniczeniem/, to podstaw $L_*(*) := L_r(\bar{u}^*_r)$. Wyznacz zbiory kandydatów E_k^a oraz E_k^b w D_r. Jeśli $E_k^a = \emptyset$ oraz $E_k^b = \emptyset$, $k = 1,2,\ldots,k_r$, to przejdź do kroku 3. W przeciwnym wypadku dla każdej operacji $O_{i_j v}$ z tych zbiorów wyznacz $LB_k^a(O_{i_j v})$ oraz $LB_k^b(O_{i_j v})$ i przejdź do kroku 2.

Krok 2. Zmodyfikuj zbiory $E_k^a \neq \emptyset$ oraz $E_k^b \neq \emptyset$ w następujący sposób:
$E_k^a := \{O_{i_j v} \in E_k^a \,|\, LB_k^a(O_{i_j v}) < L_*(*)\}$, $E_k^b := \{O_{i_j v} \in E_k^b \,|\, LB_k^b(O_{i_j v}) < L_*(*)\}$.
Jeśli $E_k^a = \emptyset$ oraz $E_k^b = \emptyset$ dla $k = 1,2,\ldots,k_r$, to przejdź do kroku 3. W przeciwnym wypadku spośród kandydatów w D_r, wybierz operację $O_{i_j v}$ z najmniejszą wartością $LB_k^\lambda(O_{i_j v})$, $\lambda \in \{a,b\}$. Jeśli $LB_k^b(O_{i_j v})$ /albo $LB_k^a(O_{i_j v})$ / jest wybrane, to wygeneruj nowy graf D_s przez przesunięcie tej operacji przed pierwszą /albo za ostatnią/ operac k-tym segmen-

cie w D_r, ustalając relację poprzedzania F_s. Następnie podstaw $D_r := D_s$ i przejdź do kroku 1.

Krok 3. Powróć do poprzednika D_p grafu D_r. Jeśli graf D_r nie ma poprzednika, tzn. jeśli należy cofnąć się z grafu D_1, to algorytm kończy się: graf D_r związany z aktualną wartością $L_*(*)$ jest optymalny. W przeciwnym wypadku, wyeliminuj aktualny graf ze wszystkimi jego danymi, podstaw $D_r := D_p$ i przejdź do kroku 2.

5. Przykład obliczeniowy

Rozpatrzmy następujący problem $6|2|F, Res \geq 0|C_{max}$

$$J_1 = \{o_{11}, o_{12}\},\ J_2 = \{o_{21}, o_{22}\},\ \ldots,\ J_6 = \{o_{61}, o_{62}\},$$

przy następujących modelach operacji:

$p_{11} = 7 - 3u_{11}$, $0 \leq u_{11} \leq 2$; $p_{21} = 7 - 2u_{21}$, $0 \leq u_{21} \leq 3$; $p_{31} = 15 - 5u_{31}$, $0 \leq u_{31} \leq 2$; $p_{41} = 14 - 4u_{41}$, $0 \leq u_{41} \leq 3$; $p_{51} = 8 - u_{51}$, $0 \leq u_{51} \leq 6$; $p_{61} = 20 - 6u_{61}$, $0 \leq u_{61} \leq 3$; $p_{12} = 16$; $p_{22} = 11$; $p_{32} = 13$; $p_{42} = 8$; $p_{52} = 10$; $p_{62} = 5$.

Graf dysjunktywny dla tego przykładu przedstawiono na rys. 1. Powyższy przykład policzono dla czterech różnych wartości globalnej ilości zasobów $\hat{U}_1$ na pierwszej maszynie. Wyniki obliczeń zrealizowane na m.c. ODRA 1325 zamieszczono w tabl.1.

Tablica 1

Wyniki obliczeń dla problemu $6|2|F, Res \geq 0|C_{max}$

Lp.	$\hat{U}_1$	Rozwiąz. początk.	Rozwiąz. optymal.	Wartość dolnego ogr. w korzeniu drzewa rozw.	Liczba węzłów wygener.	Liczba **/ węzłów odrzuconych	Liczba poprawień rozwiązania
1	0	-	76*	-	-	-	-
2	5	68	64	64	3	25	1
3	10	68	64	64	9	37	2
4	15	68	64	64	3	25	1

*/ rozwiązanie uzyskano algorytmem Johnsona,

**/ są to węzły, dla których wyznaczono tylko dolne ograniczenia, a nie wyznaczono rozdziału zasobów

Z powyższego przykładu widać, że dolne ograniczenia /zastosowano tylko jednomaszynowe dolne ograniczenia/, dość dobrze szacują następniki w drzewie rozwiązań.

Do wyznaczania rozdziału zasobów dla ustalonej struktury wykonywania operacji, tzn. dla dowolnego $D_r \in R_D$, zastosowano specjalnie opracowany algorytm oparty na znajdowaniu minimalnego przekroju w grafie.

6. Uwagi końcowe

Permutacyjny problem taśmowy wymaga oddzielnego opracowania, ponieważ do rozwiązania jego można wykorzystać specyficzne własności, które on posiada, a które nie występują w niepermutacyjnym problemie taśmowym.

Idea rozwiązania rozpatrywanego w pracy problemu może być wykorzystana do rozwiązania innych problemów szeregowania zadań na maszynach z równoczesnym rozdziałem zasobów, dla których można zastosować metodę drogi krytycznej.

LITERATURA

[1] Grabowski J., Skubalska E., Smutnicki Cz.; On flow shop scheduling with release and due dates to minimize maximum lateness, J. Opl. Res. Soc., vol 34, No. 7, 1983.

[2] Janiak A.: Job-shop scheduling with resource constraints, Proc. of the International AMSE Conference Modelling and Simulation, Paris, 1982.

[3] Janiak A., Stankiewicz A.: The equivalence of local and global time-optimal control of a complex of operations, Int. J. Control, vol. 38, No 6, 1983.

[4] Janiak A., Grabowski J.: Job-shop problem with resource constraints, Proc. of the 3-rd IFAC/IFORS Symposium Large Scale Systems: Theory and applications, Warszawa, 1983.

[5] Słowiński R.; Multiobjective network scheduling with efficient use of renewable and nonrenewable resources, Europ. J. Opl. Res., 7, 1981.

[6] Węglarz J.: Project scheduling with discrete and continuous resources, IEEE Trans. SMC-9, 1979.

Recenzent: Doc.dr hab.inż.Jerzy Klamka

Wpłynęło do Redakcji do 30.03.1984r.

ПРОБЛЕМА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОПЕРАЦИЙ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ РЕСУРСОВ

Р е з ю м е

В работе формулируется общая проблема последовательности операций с распределением ограниченных непрерывно делимых ресурсов, называемая $n/m/F, Res \geqslant 0/C_{max}$. Здесь возникает проблема определения такого порядка выполнения задач на отдельных агрегатах, при сохранении заданного технологического режима и такого распределения ограниченных ресурсов между операциями чтобы получить минимальное время выполнения всего производственного процесса (всех операций). Представлен алгоритм решения этой проблемы на базе метода ветвей и границ. В работе представлены также численные расчёты.

FLOW-SHOP PROBLEM WITH ALLOCATION OF CONSTRAINED RESOURCES

S u m m a r y

This paper is devoted to the general flow-shop problem with allocation of continuously-divisible constrained nonrenewable resources indicated by $n|m|F, Res \geqslant 0|C_{max}$. A processing order on each machine and allocation of resources to operations on some machines such that the maximum completion time is minimized is to be found. The branch and bound technique is applied to solve the problem. Numerical examples are presented.