ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: AUTOMATYKA z. 74 Nr kol. 810

Tadeusz Sawik
Akademia Górniczo-Hutnicza

ALGORYTMY HEURYSTYCZNE SZEREGOWANIA OPERACJI W PROCESACH PRODUKCJI NIEJEDNOSTKOWEJ

Streszczenie. Przedstawiono przybliżone algorytmy dla pewnych uogólnień NP-trudnych problemów szeregowania $R|prec|C_{max}$ oraz $P|prec,p_i=1|C_{max}$, w przypadku niejednostkowych zleceń produkcyjnych, w których żąda się wielokrotnego wykonywania poszczególnych operacji. W algorytmach przydział operacji do maszyn dokonywany jest w oparciu o dynamiczny priorytet uwzględniający poziom operacji w grafie ograniczeń kolejnościowych oraz stan wykonania zlecenia.

1. Wstęp

Rozważmy proces produkcyjny, w którym na m niejednakowych maszynach j /j=1,...,m/ pracujących równolegle wykonywanych jest n operacji /wyrobów/ przy czym każdą operację i /i=1,...,n/ należy wykonać z_i razy /należy wyprodukować z_i sztuk każdego wyrobu i - przypadek produkcji niejednostkowej/. Wyroby zdefiniowano tak, że każdej operacji i odpowiada w sposób jednoznaczny wyrób i /półwyrób lub wyrób finalny/ otrzymywany w wyniku jej zastosowania. Znane są jednostkowe czasy p_{ij} wykonywania operacji i na maszynach $j \in J_i \subseteq J$, $J = \{1,\dots,m\}$ należących do podzbioru J_i zbioru wszystkich maszyn J, który zawiera wyłącznie maszyny nadające się do wykonywania operacji i. Zakłada się, że podzbiory J_i nie muszą być rozłączne. Przyjmuje się, że każda maszyna może wykonywać jednocześnie co najwyżej jedną operację oraz, że operacja jednego rodzaju może być jednocześnie wykonywana na kilku maszynach. Jednakże przerywanie wykonywania operacji jednostkowej jest niedopuszczalne. Na zbiorze operacji $I = \{1,\dots,n\}$ zdefiniowana jest relacja częściowego porządku określająca ograniczenia kolejnościowe pomiędzy operacjami, reprezentowana za pomocą acyklicznego digrafu $G = (I,A)$, którego wierzchołki odpowiadają operacjom. Z każdym łukiem $(i,l) \in A$ grafu G związana jest liczba całkowita $c_{il} \geq 1$ zdefiniowana jako liczba sztuk półwyrobu i zużywanych bezpośrednio przy produkcji jednej sztuki wyrobu l /innego półwyrobu lub wyrobu finalnego/. Należy wyznaczyć zmienny z czasem rozdział maszyn pomiędzy operacje oraz zmienne z czasem długości serii produkowanych wyrobów tak, aby całe zlecenie produkcyjne $/z_1,\dots,z_n/$ wykonać w najkrótszym czasie. Zauważmy, że liczby z_i są zadane a priori tylko dla operacji /wyrobów/ finalnych $i \in L_1 = \{1,\dots,n_1\} \subset I$, gdzie L_1 oraz n_1 oznaczają odpowiednio zbiór oraz liczbę operacji finalnych. Dla wszystkich pozostałych operacji /półwyrobów/ liczby z_i wyznaczamy jako $z_i = \sum_{l \in S_i} c_{il} z_l$, gdzie S_i jest zbiorem bezpośrednich następników operacji i.

Przedstawiony problem można sklasyfikować jako uogólnienie NP-trudnego zagadnienia $R|prec|C_{max}$ [1], w którym dodatkowo wymagane jest wielokrotne wykonywanie każdej operacji /przypadek produkcji niejednostkowej/ i niekoniecznie wszystkie maszyny nadają się do wykonywania danej operacji /dopuszcza się nieskończenie duże czasy p_{ij} wykonywania operacji i na maszynach $j\in J\setminus J_i$/.

Z kolei rozpatrzona zostanie relaksacja powyższego problemu, w której zakładać będzie się, że wszystkie czasy p_{ij} wykonywania każdej operacji i na dopuszczalnych maszynach J_i są jednakowe i równe jednostce czasu, to znaczy $p_{ij} = 1\ \forall\ i\in I,\ j\in J_i$. Otrzymany problem stanowi uogólnienie NP-trudnego zagadnienia $P|prec,p_i=1|C_{max}$ [1], w którym dodatkowo wymagane jest z_i-krotne wykonanie każdej operacji i oraz dopuszcza się nieskończenie duże czasy p_{ij} dla maszyn $j\in J\setminus J_i$. W takim przypadku dla każdej operacji $i\in I$, zamiast podzbioru maszyn J_i, wystarczy uwzględnić jedynie liczbę $m_i = |J_i|$ maszyn, na których można wykonywać operację i /$|.|$ oznacza moc zbioru/. Ponieważ podzbiory maszyn J_i /i=1,...,n/ nie muszą być rozłączne, dodatkowo wyróżnimy pewną liczbę podzbiorów operacji $I_s \subseteq I$ /s=1,...,S/ i dla każdego z nich wprowadzimy liczbę $M_s = |\bigcup_{i\in I_s} J_i|$ maszyn, które można łącznie przydzielać do jednoczesnego wykonywania operacji z podzbioru I_s. S jest najmniejszą liczbą takich podzbiorów operacji I_s, które należy wyróżnić, aby uwzględnić strukturę podzbiorów maszyn J_i /i=1,...,n/.

Dla obu powyższych problemów szeregowania operacji w przypadku niejednostkowych zleceń przedstawimy przybliżone algorytmy szeregowania. W algorytmach tych przydział operacji do maszyn dokonywany jest w oparciu o dynamiczny priorytet uwzględniający poziom operacji w grafie ograniczeń kolejnościowych oraz stan procesu produkcji określający stopień wykonania zlecenia. Algorytmy charakteryzują się niską złożonością obliczeniową przy jednoczesnej wysokiej średniej dokładności [2,3,4].

2. Szeregowanie operacji o różnych czasach wykonywania na dowolnych maszynach

2.1. Definicje zmiennych problemu szeregowania

Przyjmiemy, że horyzont szeregowania zbudowany jest z K /K-niewiadoma liczba całkowita/ okresów produkcyjnych, z których w każdym rozdział maszyn pomiędzy operacje jest stały. Wprowadzimy dwa rodzaje zmiennych sterujących:

1° zmienne binarne $u^k_{ij}\in\{0,1\}$, $i\in I$, $j\in J_i$, k=1,...,K określające rozdział maszyn w każdym okresie k, przy czym $u^k_{ij} = 1$ oznacza, że w okresie k maszyna j wykonuje operację i, w pozostałych przypadkach $u^k_{ij} = 0$;

2° zmienne ciągłe $h_k > 0$, k=1,...,K, gdzie h_k oznacza długość okresu k.

Rozdział maszyn w okresie k określony będzie przez wektor u^k o $N = \sum_{i\in I} |J_i|$ współrzędnych u^k_{ij}. W ten sposób harmonogram można przedstawić jako ciąg $((u^1,h_1),\ldots,(u^K,h_K))$ K par (u^k,h_k), k=1,...,K. Zgodnie z powyższymi definicjami rozdział maszyn ulega zmianie w chwilach $t_k = \sum_{r=1}^{k} h_r$, k=1,...,K.

W dalszym ciągu każdą dopuszczalną parę (i,j), $j \in J_i$ nazywać będziemy sposobem wykonywania operacji i.

Prezentację algorytmu ułatwi wprowadzenie pojęcia stanu i wyjść procesu produkcji. Jako zmienne stanu procesu produkcji zdefiniujemy kumulowane czasy produkcyjne $x_{ij}^k = \sum_{r=1}^{k} h_r u_{ij}^r$, $i \in I$, $j \in J_i$ stosowania w przedziale $[0,t_k]$ każdego dopuszczalnego sposobu wykonywania operacji (i,j). Stan procesu w chwili t_k określony będzie przez wektor x^k o N współrzędnych x_{ij}^k. Podobnie jako zmienne wyjściowe y_i^k, $i=n_1+1,\ldots,n$ zdefiniujemy zapasy każdego półwyrobu i w chwili t_k.

2.2. Algorytm szeregowania

Zastosowanie przedstawionego poniżej algorytmu szeregowania operacji o różnych czasach wykonywania na dowolnych maszynach wymaga ustalenia stanu końcowego procesu produkcji x^K tak, aby $x^K=x^f$, gdzie x^f oznacza zadany stan końcowy. Ustalenie stanu końcowego sprowadza się do rozwiązania problemu rozdziału zlecenia produkcyjnego pomiędzy maszyny, czyli tzw. problemu obciążenia maszyn [2]. Niech $x_{ij}^f = z_{ij}$, $i \in I$, $j \in J_i$, gdzie z_{ij}/p_{ij} oznacza liczbę sztuk wyrobu i, którą należy wykonać na maszynie $j \in J_i$. Stanowi końcowemu x^f odpowiada następujące oszacowanie od dołu czasu wykonania zlecenia t_f $/C_{max}/$

$$LB = \max_{j \in J} \Big(\sum_{i \in K_j} z_{ij} \Big), \qquad /1/$$

gdzie K_j jest podzbiorem operacji wykonywalnych na maszynie j.

W algorytmie przydział operacji do maszyn w każdym okresie k dokonywany jest w oparciu o priorytet uwzględniający poziom operacji w grafie G, a dla operacji o tym samym poziomie w oparciu o średnie prędkości produkowania

$$\bar{u}_{ij}^k = (z_{ij} - x_{ij}^{k-1})/(t_f - t_{k-1}), \; i \in I, \; j \in J_i \qquad /2/$$

konieczne do wykonania zlecenia w ciągu t_f jednostek czasu. Czas t_f jest systematycznie aktualizowany w trakcie obliczeń, przy czym na początku przyjmuje się $t_f = LB$. Im wyższy poziom operacji tym wyższy posiada ona priorytet, a dla operacji na tym samym poziomie, tym wyższy priorytet im większa prędkość $\bar{u}_{ij}^k$. W algorytmie poziom operacji i definiuje się jako długość /liczba operacji łącznie z operacją i/ najdłuższej spośród ścieżek w grafie G prowadzących z wierzchołka i do operacji finalnych osiągalnych z i.

A l g o r y t m A1

Krok 0. Podstaw $t_0 = 0$, $t_f = LB$, $x_{ij}^0 = 0 \; \forall \, i \in I$, $j \in J_i$,
$k = 1$

Krok 1. Aktualizacja czasu końcowego
Jeżeli $t_f = t_{k-1}$, to podstaw $t_f = t_f + \max_j \Big(\sum_{i \in K_j} (z_{ij} - x_{ij}^{k-1}) \Big)$.

Krok 2. Czy wykonanie zlecenia w ciągu czasu t_f jest niemożliwe ?

Jeżeli $\bar{u}_{ij}^{k} \leq 1 \ \forall \ i \in I, \ j \in J_i$ oraz $\sum_{i \in K_j} \bar{u}_{ij}^{k} \leq 1 \ \forall \ j \in J$, to idź do kroku 4.

Krok 3. Aktualizacja czasu końcowego i średnich prędkości wykonywania zlecenia

Podstaw $t_f = t_f + \Delta t_f$ oraz $\bar{u}_{ij}^{k} = (z_{ij} - x_{ij}^{k-1})/(t_f - t_{k-1}), i \in I, \ j \in J_i$

gdzie

$$\Delta t_f = (t_f - t_{k-1}) \max\left\{ \max_{\{(i,j): \bar{u}_{ij}^{k} > 1\}} (\bar{u}_{ij}^{k} - 1), \ \max_{j: \sum_{i \in K_j} \bar{u}_{ij}^{k} > 1} \left(\sum_{i \in K_j} \bar{u}_{ij}^{k} - 1 \right) \right\} \qquad /3/$$

Krok 4. Wyznaczenie rozdziału maszyn

1° Za pomocą funkcji $E(\cdot,\cdot)$ ponumeruj sposoby wykonywania operacji (i,j) przydzielając im etykiety ze zbioru $\{1,\ldots,N\}$ w porządku rosnącym z poziomami, a dla operacji na tym samym poziomie w porządku rosnącym z wartością $\bar{u}_{ij}^{k}$.

2° Podstaw $u_{ij}^{k} = 1$ dla par (i,j) związanych z operacjami, których nie wykonano całkowitą liczbę razy oraz $u_{lj}^{k} = 0$ dla pozostałych par (l,j) związanych z maszyną j, dla której $u_{ij}^{k} = 1$.

$$\text{Przyjmij} \quad q_j = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } u_{ij}^{k} = 1 \\ 1, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

3° Podstaw $E(l,j) = N$, $\tilde{y}_i^{k-1} = y_i^{k-1} \ \forall \ i \in I \setminus L_1$

4° Jeżeli $u_{lj}^{k} \in \{0,1\}$, to idź do 5°. Inaczej podstaw

$$u_{lj}^{k} = \min\left\{ \lceil \bar{u}_{lj}^{k} \rceil, \ \min_{\{i: l \in S_i\}} \left(\lfloor \tilde{y}_i^{k-1}/c_{il} \rfloor \right), \ q_j \right\} \qquad /4/$$

oraz

$$\tilde{y}_i^{k-1} = \tilde{y}_i^{k-1} - c_{il} u_{lj}^{k} \quad \forall \ i: l \in S_i$$

$$q_j = q_j - u_{lj}^{k}$$

gdzie $\lfloor a \rfloor, \lceil a \rceil$ - odpowiednio największa liczba całkowita nie większa niż a, najmniejsza liczba całkowita nie mniejsza niż a.

5° Jeżeli $E(l,j) = 1$, to idź do kroku 5. Inaczej podstaw $E(l,j) = E(l,j) - 1$ i wróć do 4°.

Krok 5. Wyznaczenie długości okresu produkcyjnego

$$\text{Podstaw} \quad h_k = \max\{h_{k0}, \ \min\{h_{k1}, h_{k2}, h_{k3}\}\} \qquad /5/$$

gdzie /por. [2,3]/

h_{k0} - minimalna długość okresu k równa najkrótszemu czasowi koniecznemu dla ukończenia /lub wykonania w całości/ przynajmniej jednej spośród operacji i wykonywanych w tym okresie /dla których $u_{ij}^{k} = 1$/;

h_{k1} - najkrótszy czas konieczny dla wyczerpania zapasów /łącznie z produkcją w toku/ jednego spośród takich półwyrobów i, których prędkość zużywania w okresie k $\left(\sum_{l \in S_i} c_{il} \sum_{j \in J_l} (u_{lj}^{k}/p_{lj})\right)$ jest większa niż prędkość produkowania ich w tym okresie $\left(\sum_{j \in J_i} (u_{ij}^{k}/p_{ij})\right)$

h_{k2} - czas konieczny dla ukończenia najkrótszego spośród zadań $(z_{ij}-x_{ij}^{k-1})$ wykonywanych w k-tym okresie /dla których $u_{ij}^{k} = 1$/;

h_{k3} - najmniejszy luz czasowy dla ukończenia tych spośród pozostałych zadań $(z_{ij} - x_{ij}^{k-1})$, które nie są wykonywane w k-tym okresie /dla których $u_{ij}^{k}=0$/, wyznaczony w stosunku do czasu $(t_f - t_{k-1})$ pozostałego do chwili końcowej.

Krok 6. Wyznaczenie stanu procesu produkcji i zapasów półwyrobów

Podstaw $x_{ij}^{k} = x_{ij}^{k-1} + h_k u_{ij}^{k}, \; i \in I, \; j \in J_i$ /6/

$$t_k = t_{k-1} + h_k \qquad /7/$$

Jeżeli $x_{ij}^{k} = z_{ij} \; \forall \, i,j$, to podstaw $K = k$ i zakończ obliczenia.

Inaczej podstaw

$$y_i^k = y_i^o + \sum_{j \in J_i} \lfloor x_{ij}^{k}/p_{ij} \rfloor - \sum_{l \in S_i} c_{il} \sum_{j \in J_l} \lceil x_{lj}^{k}/p_{lj} \rceil \qquad /8/$$

$$i = n_1+1, \ldots, n$$

$k = k + 1$ i wróć do kroku 1 /y_i^o oznacza początkowe zapasy półwyrobu i/.

Jak widać w powyższym algorytmie stan x^{k-1}, $k=1,\ldots,K$ procesu produkcji na końcu każdego okresu k-1 jest wykorzystywany jako sygnał sprzężenia zwrotnego tak, że rozdział urządzeń u^k w okresie k i długość h_k tego okresu wyznaczane są jako funkcje x^{k-1}: $u^k=u(x^{k-1})$, $h_k=h(x^{k-1},u^k)$.

Złożoność obliczeniowa algorytmu A1 jest $O(N^2 \log N)$, co wynika z konieczności uporządkowania operacji według poziomów i średnich prędkości $\bar{u}_{ij}^{k}$ oraz faktu, że liczba okresów produkcyjnych K jest rzędu $O(N)$, $(N \leq nm)$.

Jeżeli przez C_{max}^{*} oznaczymy minimalny czas t_f wykonywania zlecenia, a przez $C_{max}(A1)$ czas t_f odpowiadający harmonogramowi skonstruowanemu przez algorytm A1, to zachodzi następująca nierówność

$$\frac{C_{max}^{A1}}{C_{max}^{*}} \leq \frac{\sum_{l=1}^{r} \left(\max_j \left(\sum_{i \in K_j \cap L_l} z_{ij}\right)\right)}{\max_{j \in J} \left(\sum_{i \in K_j} z_{ij} \right)}, \qquad /9/$$

gdzie: L_l jest podzbiorem operacji na poziomie l /l=1,...,r/, natomiast r oznacza liczbę poziomów w grafie ograniczeń kolejnościowych G.

Wynika stąd, że dla dużej liczby r poziomów w grafie G powyższy stosunek wzrasta. Jednakże średnia dokładność algorytmu A1 jest wysoka na co wskazują wyniki eksperymentów obliczeniowych [2,3].

3. Szeregowanie operacji o równych czasach wykonywania

3.1. Definicje zmiennych problemu szeregowania

Podobnie jak w przypadku szeregowania operacji o dowolnych czasach wykonywania w poniższym algorytmie A2 dla szeregowania operacji o równych czasach wystąpią dwa rodzaje zmiennych sterujących:

1° zmienne całkowitoliczbowe $u_i^k \in \{0,1,\ldots,m_i\}$, $i=1,\ldots,n$, $k=1,\ldots,K$, gdzie u_i^k jest liczbą maszyn przydzielonych do wykonywania operacji i w okresie k;
2° zmienne całkowitoliczbowe $h_k \geq 1$, $k=1,\ldots,K$, gdzie h_k oznacza długość k-tego okresu produkcyjnego.

Jak widać w odróżnieniu od poprzedniego przypadku, w którym występowały zmienne o charakterze mieszanym /binarne u_{ij}^k oraz ciągłe h_k/, obecnie mamy do czynienia wyłącznie ze zmiennymi całkowitoliczbowymi.

Rozdział maszyn w każdym okresie k określony będzie przez wektor $u^k = (u_1^k,\ldots,u_n^k)$ o n współrzędnych u_i^k. Oznaczmy przez $x^k = (x_1^k,\ldots,x_n^k)$ oraz $y^k = (y_1^k,\ldots,y_n^k)$ odpowiednio wektor stanu procesu produkcji oraz wektor wyjść w chwili t_k, gdzie $x_i^k = \sum_{r=1,k} h_r u_i^r$ oznacza kumulowaną produkcję i-tego wyrobu do chwili t_k, a y_i^k - zapasy i-tego wyrobu w chwili t_k.

Przyjęcie założenia o równych czasach wykonywania operacji umożliwiło zmniejszenie rozmiarów problemu szeregowania i przejście z N- do n-wymiarowej przestrzeni stanów /$N \leq mn$/. Jednocześnie odpada konieczność dokonania rozdziału zlecenia produkcyjnego pomiędzy maszyny, gdyż pożądany stan końcowy procesu produkcji x^f jest ustalony przez zlecenie i równy $x^f=(z_1,\ldots,z_n)$.

3.2. Algorytm szeregowania

Zasada działania algorytmu A2 szeregowania operacji o równych czasach wykonywania jest analogiczna jak w przypadku algorytmu A1. Obecnie średnie prędkości $\bar{u}_i^k$ wyznacza się z zależności

$$\bar{u}_i^k = (z_i - x_i^{k-1})/(t_f - t_{k-1}),\quad i=1,\ldots,n,\quad k=1,\ldots,K \qquad /10/$$

Natmiast jako oszacowanie od dołu czasu wykonywania zlecenia wygodnie jest przyjąć

$$LB = \max\left\{\max_{i\in I} \lceil z_i/m_i \rceil,\ \max_{1\leq s\leq S} \left\lceil \sum_{i\in I_s} z_i/M_s \right\rceil\right\} \qquad /11/$$

A l g o r y t m A2

Krok 0. Podstaw $t_o = 0$, $t_f = LB$, $x_i^o = 0\ \forall\ i\in I$,
$k = 1$

Krok 1. Aktualizacja czasu końcowego

Jeżeli $t_f = t_{k-1}$, to podstaw $t_f = t_f + \left\lceil \max\left\{\max_i ((z_i - x_i^{k-1})/m_i),\ \max_s\left(\sum_{i\in I_s} (z_i - x_i^{k-1})/M_s\right)\right\}\right\rceil$

Krok 2. Czy wykonanie zlecenia w ciągu czasu t_f jest niemożliwe?

Jeżeli $\bar{u}_i^k \leq m_i\ \forall\ i\in I$ oraz $\sum_{i\in I_s} \bar{u}_i^k \leq M_s\ \forall\ s$, to idź do kroku 4.

Krok 3. Aktualizacja czasu końcowego i średnich prędkości produkowania

Podstaw $t_f = t_f + \Delta t_f$ oraz $\bar{u}_i^k = (z_i - x_i^{k-1})/(t_f - t_{k-1})$, $i=1,\ldots,n$, gdzie:

$$\Delta t_f = \left\lceil (t_f - t_{k-1}) \max \left\{ \max_{\{i:\bar{u}_i^k > m_i\}} (\bar{u}_i^k/m_i - 1), \max_{\{s: \sum_{i \in I_s} \bar{u}_i^k > M_s\}} \left(\sum_{i \in I_s} \bar{u}_i^k / M_s - 1 \right) \right\} \right\rceil \qquad /12/$$

Krok 4. Wyznaczenie rozdziału maszyn

1° Za pomocą funkcji $E(\cdot)$ ponumeruj operacje przydzielając im etykiety ze zbioru $\{1,\dots,n\}$ w porządku rosnącym z poziomami, a dla operacji na tym samym poziomie w porządku niemalejącym z wartością $\bar{u}_i^k$.

2° Podstaw $E(j) = n$, $\tilde{y}_i^{k-1} = y_i^{k-1} \; \forall\, i \in I \setminus L_1$, $\tilde{M}_s = M_s \; \forall\, s=1,\dots,S$

3° Wyznacz

$$u_j^k = \min\left\{ m_j, z_j - x_j^{k-1}, \min_{\{s: j \in I_s\}} (\tilde{M}_s), \min_{\{i: j \in S_i\}} \left(\lfloor y_i^{k-1}/c_{ij} \rfloor \right) \right\} \qquad /13/$$

i podstaw

$$\tilde{y}_i^{k-1} = \tilde{y}_i^{k-1} - c_{ij} u_j^k \quad \forall\, i: j \in S_i$$

$$\tilde{M}_s = \tilde{M}_s - u_j^k \quad \forall\, s: j \in I_s$$

4° Jeżeli $E(j) = 1$, to idź do kroku 5. Inaczej podstaw $E(j) = E(j) - 1$ i wróć do 3°.

Krok 5. Wyznaczenie długości okresu produkcyjnego

Podstaw $h_k = \max\{1, \min\{h_{k1}, h_{k2}, h_{k3}\}\}$, /14/

gdzie

$$h_{k1} = \min_{i \in I_{k1}} \left\lfloor (y_i^{k-1} - u_i^k) / \left(\sum_{j \in S_i} c_{ij} u_j^k - u_i^k \right) \right\rfloor, \quad I_{k1} = \left\{ i: \sum_{j \in S_i} c_{ij} u_j^k - u_i^k > 0 \right\}$$

$$h_{k2} = \min_{i \in I_{k2}} \left\lfloor (z_i - x_i^{k-1}) / u_i^k \right\rfloor, \quad I_{k2} = \{ i: u_i^k > 0 \}$$

$$h_{k3} = \left\lfloor (t_f - t_{k-1}) \min\left\{ \min_{i \in I_{k3}} ((m_i - \bar{u}_i^k)/(m_i - u_i^k)), \min_{s \in R_k} \left(\left(M_s - \sum_{i \in I_s} \bar{u}_i^k\right) \Big/ \left(M_s - \sum_{i \in I_s} u_i^k\right) \right) \right\} \right\rfloor$$

$$I_{k3} = \{ i: \bar{u}_i^k - u_i^k > 0 \}, \quad R_k = \left\{ s: \sum_{i \in I_s} (\bar{u}_i^k - u_i^k) > 0 \right\}$$

Krok 6. Wyznaczenie stanu procesu produkcji i zapasów półwyrobów

Podstaw $x_i^k = x_i^{k-1} + h_k u_i^k \; \forall\, i \in I$ /15/

$t_k = t_{k-1} + h_k$ /16/

Jeżeli $x_i^k = z_i \; \forall\, i$, to podstaw $K = k$ i zakończ obliczenia.

Inaczej podstaw

$$y_i^k = y_i^0 + x_i^k - \sum_{j \in S_i} c_{ij} x_j^k, \quad i = n_1 + 1, \dots, n \qquad /17/$$

$$k = k + 1$$

i wróć do kroku 1.

Wielkości h_{k1}, h_{k2} i h_{k3} występujące w kroku 5 powyższego algorytmu posiadają interpretacje analogiczne do odpowiednich wielkości występujących w algorytmie A1.

Złożoność obliczeniowa algorytmu A2 jest $O(n^2 \log n)$, co wynika z konieczności uporządkowania operacji według poziomów i średnich prędkości $\bar{u}_i^k$ oraz faktu, że K jest rzędu $O(n)$.

Dla algorytmu A2 stosunek $C_{max}(A2)/C_{max}$ jest ograniczony następująco

$$\frac{C_{max}\, A2}{C^*_{max}} \leq \frac{\sum\limits_{l=1}^{r} \max\left\{\left\lceil \sum\limits_{i\in L_l} z_i/M(l)\right\rceil, \max\limits_{i\in L_l} \lceil z_i/m_i\rceil\right\}}{\max\left\{\max\limits_{i\in I}\lceil z_i/m_i\rceil, \max\limits_{1\leq s\leq S}\left\lceil \sum\limits_{i\in I_s} z_i/M_s\right\rceil\right\}}, \qquad /18/$$

gdzie $M(l) = \left|\bigcup\limits_{i\in L_l} J_i\right|$ oznacza liczbę maszyn, które można łącznie przydzielić do jednoczesnego wykonywania operacji na poziomie l.

Jak widać stosunek ten wzrasta ze wzrostem liczby r poziomów w grafie G. Jednak podobnie jak w przypadku algorytmu A1 średnia dokładność algorytmu A2 jest również wysoka [2,4].

Można wykazać [5], że w przypadku jednakowych maszyn /$m_i = m \;\forall\, i \in I$/ powyższy problem szeregowania należy do klasy P /ograniczenia kolejnościowe są redukowane do grafu typu las/, a optymalny algortym szeregowania o złożoności $O(n^2)$ jest uproszczoną wersją algorytmu A2.

4. Wnioski

Wyznaczenie harmonogramu produkcji dla niejednostkowego zlecenia produkcyjnego jest zadaniem bardziej złożonym niż szeregowanie niepodzielnych operacji w przypadku, gdy żąda się jednokrotnego wykonania każdej operacji. Z pierwszym zadaniem wiąże się bowiem dodatkowy problem wyznaczenia zmiennych z czasem długości serii poszczególnych wyrobów odpowiadających niepodzielnym i zależnym operacjom. Czas wykonania niejednostkowego zlecenia produkcyjnego zależy bowiem od długości serii, na które zostaje podzielone zlecenie /długości h_k okresów produkcyjnych/ i ich rozkładu w czasie. Przedstawione podejście i algorytmy szeregowania umożliwiają wyznaczenie takich harmonogramów przy niewielkich nakładach obliczeniowych i niewielkich odchyłkach od optimum w przeciętnym przypadku /podane oszacowania dokładności algorytmów mają charakter przybliżony/ [3,4]. Odchyłki te są tym mniejsze im mniej poziomów można wyróżnić w grafie ograniczeń kolejnościowych i im większe jest zlecenie produkcyjne.

LITERATURA

[1] Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G.: Recent Developments in Deterministic Sequencing and Scheduling: A Survey. Report BW 146/81, Mathematisch Centrum, Amsterdam 1981.

[2] Sawik T.: Teoria stanu w harmonogramowaniu czasowo-optymalnym dyskretnych

procesów produkcyjnych. Zeszyty Naukowe AGH, Nr 134/805, Kraków 1980.

[3] Sawik T.: An Algorithm for Scheduling Lots of Dependent Operations on Nonidentical Machines. Zeszyty Naukowe AGH, Nr 34/973, Kraków 1983, ss.185 - 193.

[4] Sawik T.: Scheduling Multi-Operational Tasks on Nonidentical Machines as a Time-Optimal Control Problem. European Research, 10, 1982, ss. 173 -181.

[5] Sawik T.: Scheduling Lots of Dependent Unit-Time operations on Identical Machines to Minimize Schedule Length. European J. of Operational Research, 1984 /w druku/.

Recenzent: Doc.dr hab.inż.Jacek Błażewicz

Wpłynęło do Redakcji do 30.03.1984r.

ЭВРИСТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ УПОРЯДОЧЕНИЯ ОПЕРАЦИЙ В ПРОЦЕССАХ СЕРИЙНОГО ПРОИЗВОДСТВА

Р е з ю м е

Представлены эвристические алгоритмы для проблем теории расписаний $R|prec|C_{max}$ и $P|prec,p_j=1|C_{max}$ в которых каждую операцию необходимо выполнять многократно. В алгоритмах используется динамический приоритет, зависящий от состояния процесса продукции и уровня операции в графе отношений порядка.

HEURISTIC ALGORITHMS FOR SCHEDULING LOTS OF DEPENDENT OPERATIONS ON NONIDENTICAL MACHINES

S u m m a r y

New heuristics are presented for some variations of NP-hard problems $R|prec|C_{max}$ and $P|prec,p_j=1|C_{max}$ in which multiple performing of each operation is required. In the algorithms the priority in which assignment of operations to machines is made is based on levels of operations in graph of precedence constraints and on state of completion of a production order. The worst-case performance bounds of the algorithms are presented.