ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: AUTOMATYKA z. 74 Nr kol. 810

Jan Węglarz
Politechnika Poznańska

STEROWANIE ROZDZIAŁEM ZASOBÓW CIĄGŁYCH W CELU WYKONANIA OPERACJI PRZED LINIAMI KRYTYCZNYMI.

Streszczenie. W pracy rozpatruje się problem rozdziału zasobu ciągłego, odnawialnego pomiędzy niezależne operacje opisane równaniami różniczkowymi, wiążącymi prędkość ich wykonywania z chwilowym przydziałem zasobu, w celu wykonania każdej operacji z danego zbioru przed zadanym terminem. Podano algorytmy wyznaczania sterowania dopuszczalnego gdy ono istnieje, oraz metody wyznaczania minimalnej ilości zasobu, zapewniającej istnienie sterowania dopuszczalnego dla danego zbioru operacji.

1. Wstęp

Zainteresowanie problemami sterowania rozdziałem zasobów ciągłych /tj. podzielnych w sposób ciągły/ pomiędzy operacje o modelach w postaci funkcji ciągłych: chwilowa prędkość wykonywania - ilości zasobów przydzielonych w danej chwili, datuje się od pracy Burkowa [3]. W ujęciu deterministycznym, oprócz Burkowa i jego współpracowników, badania nad tymi problemami prowadził Bubnicki i in. [1,2] oraz autor [8]. Nie wymieniamy tu licznych prac, głównie Bubnickiego, poświęconych sformułowaniu probabilistycznemu.

W ostatnich latach obserwuje się koncentrację badań w dwóch powiązanych ze sobą kierunkach. Pierwszy dotyczy tak zwanych mieszanych problemów rozdziału zasobów [9], w których rozpatruje się łącznie zasoby różnych kategorii, np. dyskretne i ciągłe [10], czy też zasoby podwójnie ograniczone, łączące w sobie cechy zasobów odnawialnych i nieodnawialnych [11]. Drugi kierunek, rozwinięty dotychczas w sposób ogólny dla dyskretnych zapotrzebowań zasobowych operacji, to wielokryterialna optymalizacja rozdziału zasobów [5,6,7].
Jeśli chodzi o kryteria optymalności, to w odniesieniu do problemów jednokryterialnych zdecydowaną większość wyników uzyskano dla czasu wykonania zbioru operacji, w [4] rozważano też kryterium kosztowe.

W tej pracy rozpatrzymy problem szeregowania operacji przed liniami krytycznymi, który ma ścisły związek z problemem minimalizacji maksymalnego opóźnienia operacji z danego zbioru. Znaczenie praktyczne tych problemów jest dobrze znane ; dotychczas nie były one jednak rozpatrywane dla zasobów ciągłych. W tej pracy pokażemy, że również dla tych problemów zachowuje wartość główna zaleta rozważanych modeli operacji, polegająca na możliwości wykazania dla poszczególnych przypadków właściwości sterowań optymalnych /tu: dopuszczalnych/ i wykorzystywania tych właściwości do konstrukcji maksymalnie efektywnych algorytmów sterowania.

2. Sformułowanie problemu

Rozpatrzmy n niezależnych operacji, o modelach

$$dx_i(t)/dt = \begin{cases} f_i\left[u_i(t)\right] & \text{dla } t\in\langle r_i, C_i\rangle \\ 0 & \text{dla } t\notin\langle r_i, C_i\rangle \end{cases} \qquad /1/$$

$$x_i(r_i) = 0,\ x_i(C_i) = w_i\ ,\ i = 1,2,\ldots,n,$$

gdzie: $x_i(t)$ jest stanem i-tej operacji w chwili t, $u_i(t)$ jest ilością zasobu przydzielonego do tej operacji w chwili t, f_i - funkcja ciągła, niemalejąca $f_i(0) = 0$, r_i - znany moment gotowości i-tej operacji, C_i - nie znany /a priori/ moment zakończenia wykonywania i-tej operacji, w_i - znany stan końcowy i-tej operacji.
Wartość $x_i(t)$ jest obiektywną miarą pracy związanej z realizacją i-tej operacji do chwili t ; stan końcowy w_i, który spełnia równanie

$$\int_{r_i}^{C_i} f_i\left[u_i(t)\right]dt = w_i \qquad /2/$$

jest więc obiektywną miarą pracy związanej z realizacją i-tej operacji. Miarą tą może być liczba standardowych instrukcji, które trzeba wykonać w celu realizacji programu w danym systemie komputerowym, objętość stawianego budynku lub usuwanego gruntu, a dla liniowych funkcji f_i - liczba roboczogodzin lub innych jednostek wykorzystania zasobu.
Załóżmy, że mamy do dyspozycji zasób ciągły,odnawialny w liczbie jednostek N, czyli dla każdego $t \geqslant 0$ musi być spełniona nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(t) \leqslant N \qquad /3/$$

krytyczna

Załóżmy także, że dla i-tej operacji, i = 1,2,...,n zadana jest linia d_i, czyli termin do którego wykonanie tej operacji musi się zakończyć, to znaczy musi zajść $x_i(C_i) = w_i$, $C_i \leqslant d_i$.
Sterowanie $\underline{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t))$, $u_i(t) \geqslant 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, spełniające /3/, dla którego $x_i(C_i) = w_i$, $C_i \leqslant d_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, będziemy nazywać <u>sterowaniem dopuszczalnym</u>.
Przyjmiemy, że wykonywanie każdej operacji może być dowolnie przerwane. Należy jednak podkreślić, że w przypadku zasobów ciągłych nie każda zmiana przydziału zasobu wiąże się z przerwaniem /tylko zerowy przydział pomiędzy przydziałami niezerowymi/, a ponadto w wielu ważnych przypadkach można wykazać, że w sterowaniu dopuszczalnym każda operacja wykonywana jest bez przerwań.

Przy powyższych założeniach rozpatrzmy dwa problemy.

Problem I

Podać algorytmy wyznaczające sterowanie dopuszczalne w każdym przypadku, w którym ono istnieje.

Problem II

Wyznaczyć minimalną liczbę jednostek zasobu N_{min}, zapewniającą istnienie sterowania dopuszczalnego dla danego zbioru operacji.

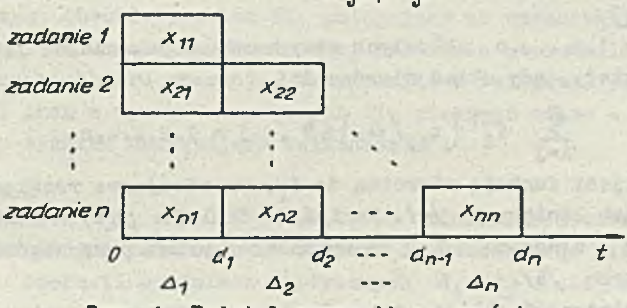
Rozwiązując powyższe problemy będziemy dążyli do wykorzystania pewnych właściwości sterowań dopuszczalnych w celu maksymalnego uproszczenia algorytmów sterowania dla określonych klas funkcji f_i.

3. Algorytmy sterowania

Przechodząc do rozwiązania problemu I, załóżmy najpierw, że momenty gotowości operacji są równe; dla prostoty $r_i = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$. Uporządkujmy linie krytyczne : $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_{n-1} \leq d_n$. Wprowadźmy pojęcie dopuszczalnego podziału operacji na części / w sensie części w_i/ wykonywane w przedziałach $\langle 0,d_1)$, $\langle d_1,d_2)$,..., $\langle d_{n-1},d_n\rangle$, jako ciągu nieujemnych liczb rzeczywistych $\{x_{ij}\}_{i=j,\ j=1}^{n\quad n}$ spełniającego równania

$$\sum_{j=1}^{i} x_{ij} = w_i, \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad /4/$$

gdzie: j jest indeksem przedziału $\langle d_{j-1},d_j)$, o długości Δ_j /rys.1./



Rys. 1. Podział operacji na części.

Możemy teraz wykazać następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1

Dla danego zbioru n operacji o liniach krytycznych $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_{n-1} \leq d_n$ i dla danej liczby jednostek zasobu N, sterowanie dopuszczalne istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dopuszczalny podział operacji na części wykonywane w przedziałach $\langle 0,d_1)$,$\langle d_1,d_2)$,...,$\langle d_{n-1}, d_n\rangle$, dla którego

$$T_j^*\left(\{x_{ij}\}_{i=j}^{n}, N\right) \leq \Delta_j, \qquad j = 1,2,\ldots,n \qquad /5/$$

gdzie: $T_j^*(\cdot)$ jest minimalnym czasem wykonywania części operacji $\{x_{ij}\}_{i=j}^{n}$ dla danego N.

Dowód

Załóżmy, że sterowanie dopuszczalne istnieje. Wówczas musi istnieć przynajmniej jeden dopuszczalny podział operacji na części, w sensie podanej definicji. Minimalne czasy wykonywania części operacji w tym podziale muszą spełniać układ nierówności /5/.

Dowód dostateczności jest oczywisty. ∎

Powyższe twierdzenie pozwala na wykorzystanie właściwości sterowań czaso-optymalnych w poszczególnych przedziałach czasowych do wykazania twierdzeń, podających algorytmy wyznaczania sterowań dopuszczalnych dla poszczególnych klas funkcji f_i. Poniżej podamy odpowiednie twierdzenia dla f_i wypukłych i wklęsłych.

Twierdzenie 2

Dla f_i, $i = 1,2,\ldots,n$ wypukłych sterowanie dopuszczalne istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{j\leq i} w_j/f_j(N) \leq d_i, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

i polega na przydzielaniu pojedynczym operacjom N jednostek zasobu w niemalejącej kolejności ich linii krytycznych.

Twierdzenie 3

Dla f_i, $i = 1,2,\ldots,n$ wklęsłych sterowanie dopuszczalne istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy układ nierówności

$$\sum_{i=j}^{n} f_i^{-1}\left(x_{ij}/\Delta_j\right) \leq N, \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad /6/$$

gdzie: f_i^{-1} jest funkcją odwrotną do f_i, ma nieujemne rozwiązanie przy ograniczeniach liniowych /4/. Wartości funkcji $u(t)$ w poszczególnych przedziałach o długości Δ_j są wyznaczone przez poszczególne składniki lewych stron /6/.

Jak widać, złożoność obliczeniowa algorytmu wyznaczania sterowania dopuszczalnego dla modeli wypukłych jest określona przez złożoność algorytmu sortowania linii krytycznych, czyli $O(n \log n)$. Natomiast dla modeli wklęsłych wyznaczenie sterowania dopuszczalnego wymaga znalezienia nieujemnego rozwiązania układu n nierówności o $n(n+1)/2$ zmiennych przy n liniowych ograniczeniach równościowych albo układu $2n$ równań, w tym co najmniej n liniowych, o $n(n+1)/2 + n$ zmiennych.

Załóżmy teraz, że momenty gotowości operacji są różne. Łatwo zauważyć, że twierdzenie 1 pozostaje słuszne dla przedziałów wyznaczonych przez kolejne wyrazy w niemalejącym ciągu łącznie uporządkowanych liczb r_i i d_i, $i = 1,2,\ldots,n$. W konsekwencji, dla modeli wypukłych otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4

Dla f_i, $i = 1,2,\dots,n$ wypukłych i różnych momentów gotowości operacji sterowanie dopuszczalne istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy żadna operacja nie jest opóźniona po wykonaniu następującego algorytmu :

1° Uporządkuj operacje według niemalejących linii krytycznych.

2° Spośród operacji gotowych do wykonania wybierz tę z najmniejszą linią krytyczną i przydziel jej N jednostek zasobu do momentu, aż

/a/ zostanie osiągnięty jej stan końcowy lub

/b/ stanie się gotowa operacja o mniejszej linii krytycznej

3° W przypadku /b/ przerwij wykonywanie operacji. Jeśli nie wszystkie operacje osiągnęły swe stany końcowe, wróć do punktu 2°.

Oczywiście algorytm podany w twierdzeniu 4 wyznacza jednocześnie sterowanie dopuszczalne, gdy tylko ono istnieje. Złożoność obliczeniowa tego algorytmu jest również $O(n \log n)$.

Natomiast dla modeli wklęsłych pozostaje słuszne twierdzenie 3 dla nowo zdefiniowanych przedziałów czasowych.

4. Wyznaczanie N_{min}

Rozpatrzymy obecnie problem II, polegający na wyznaczeniu minimalnej liczby jednostek zasobu, zapewniającej istnienie sterowania dopuszczalnego dla danego zbioru operacji. Korzystając z twierdzeń podanych w rozdziale 3 oraz z wyników uzyskanych dla sterowań czaso - optymalnych można łatwo wykazać następujące twierdzenia :

Twierdzenie 5

Dla f_i wypukłych i $r_i = 0$, $i = 1,2,\dots,n$ minimalna liczba jednostek zasobu zapewniająca istnienie sterowania dopuszczalnego dla danego zbioru n operacji o liniach krytycznych $d_1 \le d_2 \le \dots \le d_{n-1} \le d_n$ wyraża się wzorem

$$N_{min} = \max_i \left\{ f_i^{-1}\left(w_i / \Delta_i \right) \right\}$$

Twierdzenie 6

Dla f_i, $i = 1,2,\dots,n$ wypukłych i różnych momentów gotowości operacji, N_{min} wyznaczamy rozwiązując zadanie minimalizacji N przy ograniczeniach wynikających z żądania dopuszczalności sterowania generowanego przez algorytm z twierdzenia 4.

Twierdzenie 7

Dla f_i, $i = 1,2,\dots,n$ wklęsłych N_{min} wyznaczamy rozwiązując zadanie minimalizacji N przy ograniczeniach /4/, /5/, gdzie $T_j(\cdot)$ jest /jedynym/ dodatnim pierwiastkiem równania

$$\sum_{i=j}^{n} f_i^{-1}\left(x_{ij}/T_j\right) = N$$

a Δ_j jest długością przedziału czasowego, wyznaczonego przez $(j-1)$-wszy i j-ty wyraz niemalejącego ciągu łącznie uporządkowanych liczb r_i i d_i, $i = 1,2,\ldots,n$.

Jak widać, z wyjątkiem przypadku f_i wypukłych i $r_i = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, wyznaczenie N_{min} wymaga rozwiązania odpowiedniego zadania programowania nieliniowego, przy czym dla f_i wypukłych i dowolnych r_i jest to zadanie jednowymiarowe.

5. Uwagi końcowe

Pokazaliśmy, że modele operacji w postaci równań różniczkowych wiążących chwilową prędkość wykonywania operacji z chwilowym przydziałem zasobów mogą być z powodzeniem wykorzystane do badania odpowiednich problemów szeregowania operacji przed liniami krytycznymi. Rozszerza to dotychczasowy zakres zastosowania tych modeli.

Zauważmy, że możliwe są liczne, mniej lub bardziej bezpośrednie uogólnienia przedstawionych rozważań. Przede wszystkim, zmniejszając /zwiększając/ o przyjętą jednostkę wszystkie linie krytyczne i stosując przedstawione algorytmy możemy znaleźć sterowanie minimalizujące z daną dokładnością maksymalne opóźnienie operacji z rozpatrywanego zbioru. Po drugie, wykorzystując wyniki otrzymane dla sterowania czaso - optymalnego można rozwiązać rozpatrywane w tej pracy problemy dla zasobu podwójnie ograniczonego, dla którego oprócz chwilowej dostępności ograniczone jest również zużycie. Po trzecie, można uogólnić przedstawioną metodykę postępowania na przypadek wielu rodzajów zasobów zakładając, że uczestniczą one w wykonywaniu poszczególnych operacji w znanych proporcjach. Problem wyznaczania minimalnych ilości zasobów, zapewniających istnienie sterowania dopuszczalnego sprowadza się wówczas w ogólności do zadania programowania wielokryterialnego. Można wreszcie rozpatrywać zbiory operacji zależnych, co jednak prowadzi w ogólnym przypadku tylko do algorytmów przybliżonych. Szersze przedstawienie niektórych zasygnalizowanych tu problemów zawiera praca [12].

LITERATURA

[1]. Bubnicki Z.: Problemy optymalnego sterowania kompleksami operacji, Prace konferencji n.t. : Problemy automatyki i informatyki, t.I, Gliwice 1973.

[2]. Bubnicki Z. i in.: Algorytmy sterowania kompleksami operacji, Raport Nr 91 Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1974.

[3]. Burkov V.N.: Raspredelenie resursov kak zadača optimal'ogo bystro-

deistvija, Avtomat. i Telemech. 27, No. 7, 1966.
[4]. Nowicki E., Zdrzałka S.: Optimal control of a complex of independent operations, Int. J. Systems Sci. 12, No. 1, 1981.
[5]. Słowiński R.: Algorytmy sterowania rozdziałem zasobów różnych kategorii w kompleksie operacji, Wyd. Uczelniane PP, Rozprawy Nr 114, Poznań 1980.
[6]. Słowiński R.: Multiobjective network scheduling with efficient use of renewable and nonrenewable resources, Europ. J. Operational Res. 7, 1981.
[7]. Słowiński R., Węglarz J.; Rozdział zasobów różnych kategorii między operacje niepodzielne jako problem wielokryterialnego programowania dyskretnego, Zeszyty Nauk. Politechniki Śląskiej ; Automatyka z.63, Gliwice 1982.
[8]. Węglarz J.: Minimalno - czasowe sterowanie rozdziałem zadań i zasobów w kompleksie operacji w warunkach deterministycznych, Wyd. Uczelniane PP, Rozprawy Nr 78, Poznań 1976.
[9]. Węglarz J.: New models and procedures for resource allocation problems, Proc. 6th INTERNET Congress, Vol.2, VDI GmbH, Düsseldorf 1979.
[10]. Węglarz J.: Project scheduling with discrete and continuous resources, IEEE Trans. Systems, Man and Cybernet. SMC-9, No.10, 1979.
[11]. Węglarz J.: Project scheduling with continuously - divisible, doubly constrained resources, Mgmt. Sci. 27, No.9, 1981.
[12]. Węglarz J.: Deadline scheduling of jobs under continuous processing speed - resource amount functions, przyjęto do druku w Operations Research.

Recenzent:Prof.dr hab.inż.Antoni Niederliński
Wpłynęło do Redakcji do 30.03.1984r.

УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НЕПРЕРЫВНЫХ РЕСУРСОВ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ОПЕРАЦИЙ ПЕРЕД ЗАДАННЫМИ ДИРЕКТИВНЫМИ СРОКАМИ

Р е з ю м е

В работе рассмотрена проблема распределения непрерывного нескладируемого ресурса между независимые операции для выполнения данного множества операций перед их директивными сроками. Математические модели операций даны в виде дифференциальных уравнений : скорость выполнения - количество ресурса. Представлены алгоритмы управления и методы определения минимального количества ресурса , обеспечивающего существование допускаемого управления для данного множества операций.

ALLOCATING CONTINUOUS RESOURCES TO PROCESS ACTIVITIES BEFORE THEIR DEADLINES

S u m m a r y

This paper deals with the problem of allocating continuous, renewable resource among independent activities to meet their deadlines. Activities are described by differential equations relating their processing speeds to the amounts of resources allotted at a given moment. We present algorithms producing feasible schedules, whenever they exist, and methods for finding the minimum resource amount ensuring the existence of a feasible schedule for a given set of activities.