

*Adam Turowski*

## **Rozwiązywanie prostokątnych ram przestrzennych metodą kolejnych przybliżeń**

### **1. Wstęp**

Na łamach krajowej i zagranicznej prasy technicznej spotyka się coraz częściej rozważania na temat przestrzennych układów ramowych, występujących przeważnie w budownictwie przemysłowym, których rozwiązanie statyczne sprawia zazwyczaj pewne kłopoty, zwłaszcza natury rachunkowej. Ułożenie i rozwiązanie układu stosunkowo znacznej ilości równań jest pracą czasochłonną, na co żadne z biur projektowych nie może sobie w chwili obecnej pozwolić. Z tego względu projektanci rozkładają rozpatrywany schemat przestrzenny na kilka schematów płaskich, rezygnując z właściwego obrazu pracy statycznej układu.

Celem niniejszego artykułu jest podanie rozwiązywania ram przestrzennych metodą kolejnych przybliżeń, która, według mego zdania, jest metodą o tyle przystępną, że wprowadzając jedynie kilka pojęć nowych, bazuje na znanej powszechnie iteracji technicznej. W artykule tym omówione zostały jedynie ramy prostokątne, aczkolwiek rozszerzenie wprowadzonych zasad na układy przestrzenne nieprostokątne jest możliwe, jednak wykracza poza ramy niniejszego artykułu.

### **2. Pojęcia zasadnicze**

#### **2.1. Momenty utwierdzające (wyjściowe)**

Momentem utwierdzającym (lub wyjściowym) nazywać będziemy moment węzłowy (oddziaływający)  $M_0$ , jaki powstaje na końcach pręta od danych obciążeń przęsłowych przy uniemożliwieniu powstania obrotów przekrojów węzłowych.

#### **2.2. Sztywności bezwzględne prętów**

Przez sztywność bezwzględną pręta rozumiemy odwrotność kąta ugięcia lub skreślenia nad podporą (lub węzłem), wywołanego obciążającym momentem jednostkowym, działającym na rozpatrywanej podporze. Mo-

ment jednostkowy może być momentem zginającym lub skręcającym, wobec czego będziemy mieli do czynienia ze sztywnością zginania i skręcania.

Przy omawianiu zginania sztywności bezwzględne wynoszą:

$$\text{dla pręta przegubowo-przegubowego} \quad s = \frac{3EJ}{l},$$

$$\text{dla pręta przegubowo-sztywnego} \quad s = \frac{4EJ}{l},$$

natomiast przy skręcaniu:

$$\text{dla pręta przegubowo-sztywnego} \quad s = \frac{GJ_0}{l},$$

gdzie  $J_0$  jest wyrażeniem w  $\text{cm}^4$ , odpowiadającym biegunowemu momentowi bezwładności w wypadku przekroju kołowego. Przy przekrojach prostokątnych

$$J_0 = \mu \cdot b^3 h,$$

gdzie współczynnik  $\mu$  zależy od stosunku  $h:b$ , a wartości jego odczytujemy z tablicy I<sup>1</sup>.

Tablica I

Wartości współczynnika  $\mu$

$h:b$	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10
$\mu$	0,140	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313

Biorąc pod uwagę fakt, że

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

sztywność bezwzględna skręcania wyraża się wzorem:

$$s = \frac{EJ_0}{2(1+\nu)l},$$

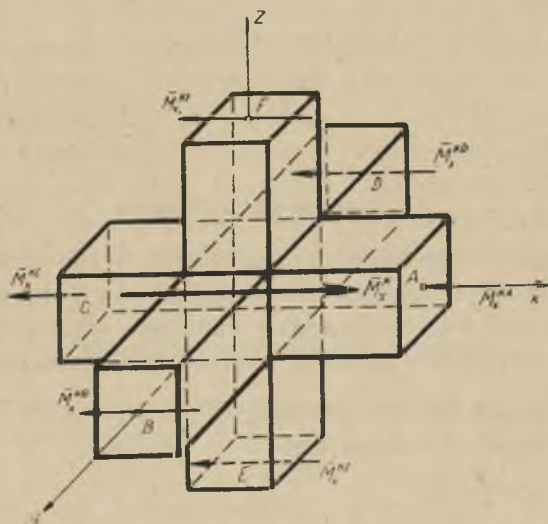
gdzie  $\nu$  jest współczynnikiem przewężenia poprzecznego (ułamek Poissona).

### 2.3. Współczynniki rozdziału

Współczynnik rozdziału określa część momentu (zginającego lub skręcającego), jaką przenosi każdy z prętów zbiegających się w rozpatrywanym węźle, obciążonym pewnym momentem  $M$ .

<sup>1</sup> Zaczepnięto z podręcznika St. Błażewskiego, *Wytrzymałość materiałów*, Warszawa 1951, PWT, str. 178.

W wypadku gdy w rozpatrywanym węźle zbiegają się pręty wzajemnie do siebie prostopadłe (co najczęściej występuje w praktyce), przy czym moment  $M$  leży w jednej z ich płaszczyzn, to w każdym z prętów pojawi się bądź to moment zginający, bądź też skręcający, zależnie od wzajemnego położenia wektora — momentu i osi pręta. Załóżmy, że mo-



Rys. 1. Rozkład momentu obciążającego dany węzeł na momenty składowe, zginające i skręcające, poszczególnych prętów

ment obciążający leży w płaszczyźnie  $y-z$ , a wtedy z warunku momentów rozpatrywanego węzła względem osi  $x$  otrzymamy:

$$M_x^K = M_x^{KA} + M_x^{KB} + M_x^{KC} + M_x^{KD} + M_x^{KE} + \bar{M}_x^{KF},$$

lub ogólnie

$$M = \sum_i M_i, \quad (a)$$

przy czym przez  $M_i$  rozumieć należy moment zginający lub skręcający.

Sztywność rozpatrywanego węzła zapewnia powstanie kąta obrotu o wspólniej wartości dla poszczególnych prętów, tzn.

$$\varphi = \frac{M_x^{KA}}{s_{KA}} = \frac{M_x^{KB}}{s_{KB}} = \frac{M_x^{KC}}{s_{KC}} = \frac{M_x^{KD}}{s_{KD}} = \frac{M_x^{KE}}{s_{KE}} = \frac{M_x^{KF}}{s_{KF}},$$

lub ogólnie

$$\frac{M_i}{s_i} = \frac{M_k}{s_k} \quad (b)$$

a rozwiązując układ równań (a) i (b), otrzymamy:

$$M_k = \frac{s_k}{\sum_i s_i} M,$$

gdzie mianownik oznacza sumę sztywności zginania i skręcania wszystkich prętów schodzących się w rozpatrywanym węźle, a moment  $M_i$  jest bądź to momentem zginającym, bądź to skręcającym, zależnie od rodzaju sztywności występującej w liczniku.

Wyrażenie  $\frac{s_k}{\sum s_i}$  nazywamy współczynnikiem rozdziału  $r_k$  rozpatrywanego węzła, przy czym w każdym węźle

$$\sum_i r_i = 1.$$

#### 2.4. Współczynniki przeniesienia

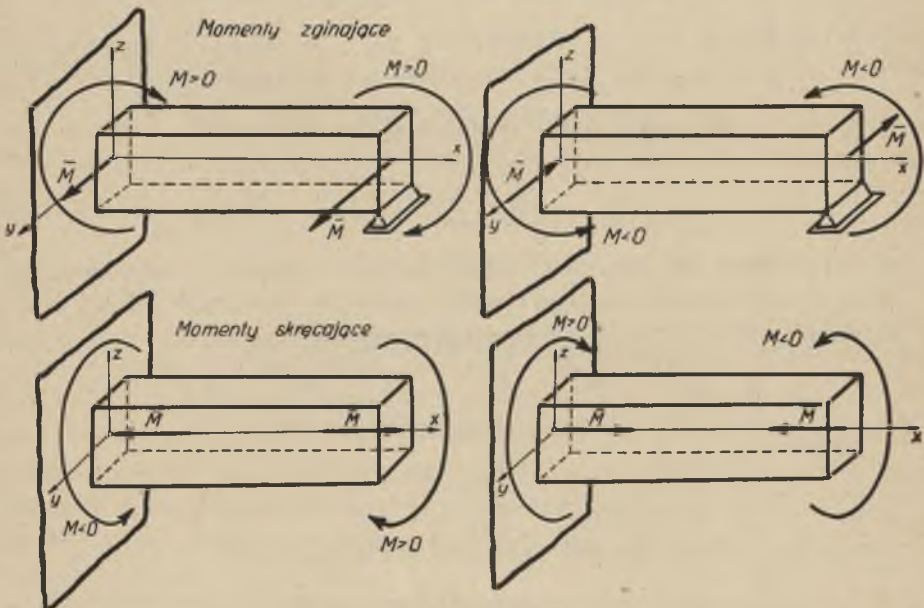
Współczynnikiem przeniesienia nazywamy liczbę algebraiczną, przez którą należy pomnożyć moment  $M_i$  działający na jednym końcu danego pręta, aby otrzymać wartość liczbową momentu występującego na końcu przeciwnym. W wypadku zginania współczynniki przeniesienia są

dla pręta przegubowo-przegubowego  $\gamma = 0$ ,

dla pręta przegubowo-sztywnego  $\gamma = \frac{1}{2}$ ;

natomiast przy skręcaniu

dla pręta przegubowo-sztywnego  $\gamma = -1$ .



Rys. 2. Sposób znakowania momentów zginających i skręcających

### 2.5. Znakowanie momentów

Znakowanie momentów zginających i skręcających przeprowadzić można na podstawie następującej umowy.

Rozpatrywany układ orientujemy w prostokątnym układzie współrzędnych np. lewoskrętnym i znaki poszczególnych momentów ustalamy na podstawie porównania zwrotów wektorów-momentów ze zwrotami osi odniesienia. Dla momentów zginających umowa ta pokrywa się z ogólnie przyjętą regułą Grintera, natomiast dla momentów skręcających należy znakowanie ustalać każdorazowo.

Szczególną uwagę należy zwrócić tu na momenty skręcające, ponieważ występowanie dodatniego momentu skręcającego powoduje na przeciwnym końcu wystąpienie momentu ujemnego i odwrotnie, jak to podają poniższe rysunki oraz jak to wynika z wartości współczynnika przeniesienia.

### 3. Rozwiązywanie ram nieprzesuwnych

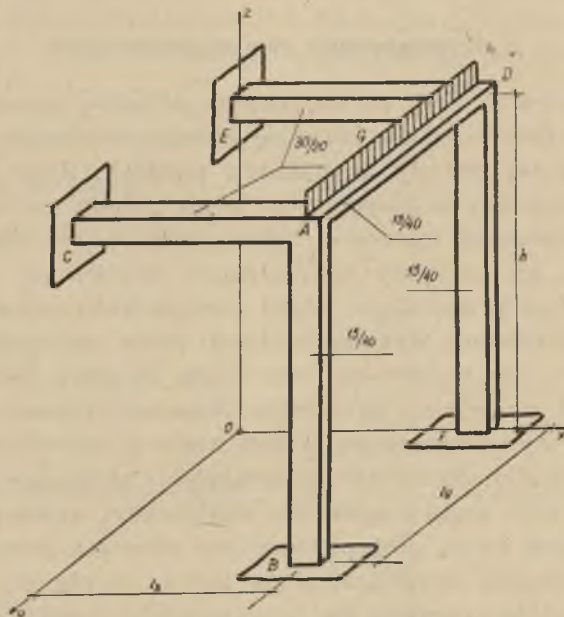
Tok postępowania przy rozwiązywaniu układów przestrzennych metodą kolejnych przybliżeń nie różni się zasadniczo niczym w porównaniu ze stosowaniem tej metody do układów płaskich. Jako pierwsze przybliżenie przyjmujemy, że poszczególne węzły układu nie mogą doznawać żadnych przemieszczeń (obrotów i przesunięć), wobec czego w węzłach tych pojawiają się momenty utwierdzające (wyjściowe) pochodzące od danego obciążenia przeszłowego. Jeżeli obecnie któremukolwiek z wyciętych węzłów umożliwimy wykonanie obrotu przez usunięcie pomyślanego utwierdzenia, to dla równowagi tego węzła musimy przyłożyć w nim pewien moment zewnętrzny przeciwnie skierowany, który rozłoży się na poszczególne pręty schodzące się w tym węźle proporcjonalnie do współczynników rozdziału. Momenty te, zginające i skręcające, przenoszą się na przeciwne końce prętów zgodnie z wartościami współczynników przeniesienia. Opisane wyżej postępowanie jest pierwszą iteracją.

Po jej wykonaniu utwierdzamy na powrót zwolniony węzeł i przeprowadzamy podobną operację nad którymkolwiek węzłem innym, uwzględniając już przy obciążeniu jego także te ewentualne momenty, które zostały przeniesione z węzła rozpatrywanego poprzednio. Kilkakrotna iteracja tego rodzaju doprowadza nas w wyniku do tak małych wartości momentów obciążających poszczególne węzły, że możemy je pominąć bez ujmy dla istoty zagadnienia, a wtedy sumy wszystkich momentów występujących w węzłach poszczególnych prętów dają właściwe wartości liczbowe momentów podporowych.

W celu ustalenia właściwych znaków momentów zginających i skręcających przeprowadzamy rozumowanie odwrotne do podanego w pkt. 2.5.

Przy przeprowadzaniu iteracji należy szczególną uwagę zwrócić na rozróżnienie momentów zginających od skręcających z uwagi na różne współczynniki przeniesienia. W tym celu wprowadzamy następującą umowę: sztywność bezwzględną  $s$  znaczyć będziemy dwoma wskaźnikami (np.  $s_x^y$ ), z których dolny oznacza równoległość wektora-momentu z daną osią, a górny — równoległość osi pręta z daną osią (tzn.  $s_x^y$  oznacza sztywność pochodzącą od wektora-momentu  $M_x$ , dla pręta równoległego do osi  $y$ ). W wypadku różnych wskaźników mamy do czynienia ze zginaniem (a więc  $\gamma = 0$  lub  $\gamma = \frac{1}{2}$ ), natomiast przy jednakowych wskaźnikach występuje skręcanie ( $\gamma = -1$ ). Umowa ta dotyczy także współczynników rozdziału.

Przykład 1. Dana jest rama jak na rysunku 3. Wymiary geometryczne:  $l_y = 5$  m,  $h = 5$  m,  $l_x = 3$  m. Przekroje usytuowane jak na rysunku.



Rys. 3. Widok perspektywiczny ramy, rozwiązywanej w przykładzie 1

Stała sprężystości  $E = 160$  t/cm<sup>2</sup>, ułamek Poissona  $\nu = 0,3$ . Obciążenie jednostajnie rozłożone  $q = 3$  t/mb na długości rozpory  $AD$ . Wszystkie podpory idealnie sztywne. Nieprzesuwność węzłów zapewniona symetrią układu i obciążenia.

$$\text{Momenty wyjściowe: } M_{x_0}^{AD} = -M_{x_0}^{DA} = -\frac{3 \cdot 5,0^2}{12} = -6,25 \text{ tm.}$$

Szywności bezwzględne:

Współczynniki rozdziału:

$$s_x^y = \frac{4 \cdot 160 \cdot 40 \cdot 15^3}{12 \cdot 500} = 14400$$

$$r_x^y = \frac{14400}{38449} = 0,3745$$

$$s_x^z = \frac{4 \cdot 160 \cdot 40 \cdot 15^3}{12 \cdot 500} = 14400$$

$$r_x^z = \frac{14400}{38449} = 0,3745$$

$$s_x^x = \frac{160 \cdot 0,196 \cdot 30 \cdot 20^3}{2(1 + 0,3)300} = 9649$$

$$r_x^x = \frac{9349}{38449} = 0,2510$$

$$\sum_i s_{ix} = 38449.$$

$$\sum_i r_{ix} = 1,0000.$$

Iterację przeprowadzono w tabelicy II.

Ciekawie wygląda porównanie otrzymanych momentów węzłowych z momentami, jakie otrzymalibyśmy rozwiązując ramę *BADF* jako układ płaski. Porównanie to przedstawia się następująco (momenty znakowano według umowy wytrzymałościowej):

pręty	<i>B-A</i>	<i>A-B</i>	<i>A-C</i>	<i>A-D</i>	$M_{\max}^{AD}$ ,
układ przestrzenny	+1439	-2880	+1930	-4810	+4570,
układ płaski	+2085	-4170	—	-4170	+5210,
różnica w ‰	+45‰	+45‰	—	-13‰	-14‰.

Przytoczone porównanie, przeprowadzone co prawda dla ramy specjalnie wrażliwej, wykazuje w sposób oczywisty, że przestrzenność układu nie zawsze może być pominięta.

Sprawdzenie poprawności rozwiązania. Sprawdzenie poprawności przeprowadzonego obliczenia polega na:

- sprawdzeniu ogólnych warunków równowagi,
- sprawdzeniu równości kątów ugięć lub skręcenia poszczególnych prętów schodzących się w węzłach.

W celu sprawdzenia ogólnych warunków równowagi wyznaczamy powszechnie znanymi wzorami wartości oddziaływań, a następnie w odniesieniu do wszystkich sił czynnych i biernych stosujemy sześć ogólnych warunków równowagi sił w przestrzeni.

Sprawdzenie równości odkształceń sprowadza się w tym wypadku do stosowania wzorów podanych przez inż. A. Winokura<sup>1</sup>, które pozwalają przekonać się, czy kąty ugięć poszczególnych prętów schodzących się w rozpatrywanym węzle są sobie równe. Jak wiadomo, wzór pozwalający

<sup>1</sup> Patrz: A. Winokur, *Sprawdzanie obliczeń ram wykonanych metodą Crossa*, „Inżynieria i Budownictwo”, marzec 1949, str. 129—138.

Tablica II

Iteracja dla przykładu 1

B	A				C	E	D			F					
	A-B	A-C	A-D	C-A			E-D	D-A	D-E		D-F				
B-A															
	0,3745	0,2510	0,3745										0,3745		
	-6250		-6250								+6250				
+ 1170	+2341	+1568	+2341		-1568		+7420	+7420	+1170		+1170				
	-1389		-1389			+1862	-7420	-7420	-2779	-1862	-2779		-2779		-1389
+ 260	+520	+349	+520		-349		+260	+260	+260		+260				
	-49		-49			+66	-260	-260	-97		-97				-49
+ 9	+18	+13	+18		-13		+9	+9	+9		+9				
	-1,7		-1,7			+2,2	-9	-9	-3,4		-3,4		-2,2		-1,7
+ 0,3	+0,6	+0,5	+0,6		-0,5		+0,3	+0,3	+0,3		+0,3				
	0	+1930,5	-4810,1		-1930,5	+1930,5	0	0	+4809,8	-1930,3	-4809,8		-2879,5		-1439,7
+1439,3	+2879,6	+1930,5	-4810,1		-1930,5	+1930,5	0	0	+4809,8	-1930,3	-4809,8		-2879,5		-1439,7



przeprowadzić tę kontrolę przedstawia się następująco:

$$E\varphi_n = \frac{l}{J_n} \left[ Q_n^w + \frac{l_n}{6} (2M_n + M_{n+1}) \right],$$

gdzie momenty  $M_n$  i  $M_{n+1}$  należy znakować wytrzymałościowo. Jest rzeczą oczywistą, że w układach przestrzennych należy także sprawdzać równość kąta skręcenia pręta skręcane go z kątami ugięć prętów zginanych i to we wszystkich trzech płaszczyznach układu odniesienia. W wypadku, co najczęściej zachodzi, gdy moment skręcający jest stały na całej długości rozpatrywanego pręta, kąt skręcenia obliczamy ze wzoru<sup>1</sup>:

$$\varphi = \frac{M \cdot l}{G \cdot J_0} = \frac{2 \cdot Ml \cdot (1 + \nu)}{EJ_0},$$

skąd

$$E \cdot \varphi = \frac{1}{J_0} 2 \cdot Ml \cdot (1 + \nu).$$

Dla przykładu sprawdzmy równość kątów ugięć i kąta skręcania prętów schodzących się w węźle  $A$  ramy rozwiązanej poprzednio (przykład 1)

$$E \cdot \varphi_x^{AD} = \frac{12}{40 \cdot 15^3} \left[ \frac{0,03 \cdot 500^3}{24} - \frac{500}{6} (2 \cdot 481,0 + 481,0) \right] = 3,20 \text{ t/cm}^2,$$

$$E \cdot \varphi_x^{AB} = \frac{12}{40 \cdot 15^3} \cdot \frac{500}{6} (2 \cdot 288,0 - 143,9) = 3,20 \text{ t/cm}^2,$$

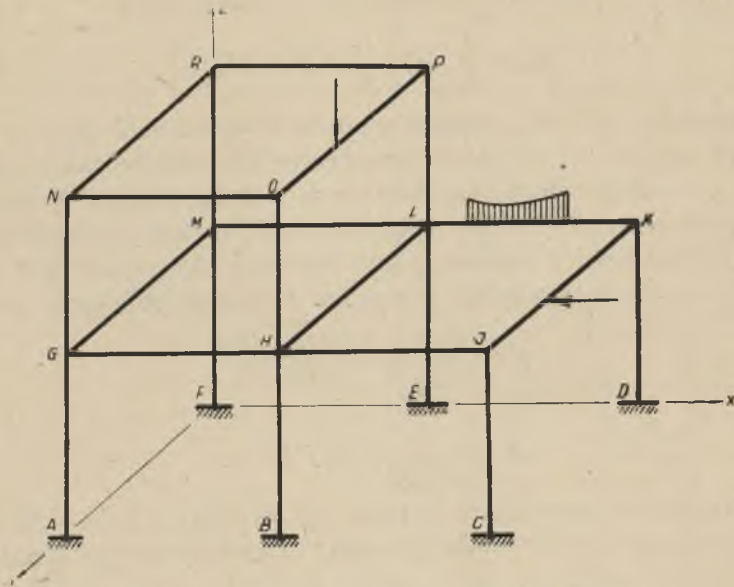
$$E \cdot \varphi_x^{AC} = \frac{1}{0,196 \cdot 20^3 \cdot 30} \cdot 2 \cdot 193,0 \cdot 300 \cdot (1 + 0,3) = 3,20 \text{ t/cm}^2.$$

#### 4. Rozwiązywanie ram o węzłach przesuwnych

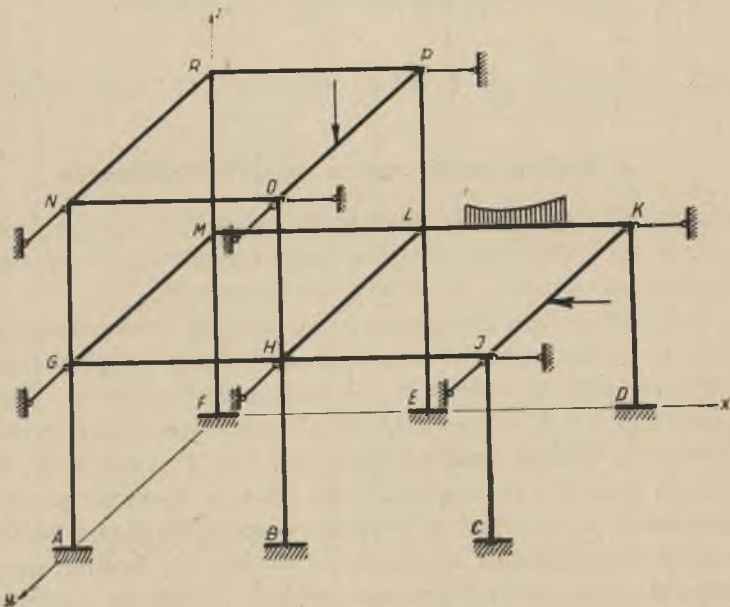
W przypadku gdy sposób obciążenia ramy lub też jej wykształcenie geometryczne wywołuje przesunięcia (poziome lub pionowe) węzłów, rozwiązanie przeprowadzamy na drodze dwuetapowej.

Etap pierwszy polega na usunięciu możliwości powstawania tych przesunięć przez zastosowanie wahaczy. Ilość tych wahaczy zapewniająca nieprzesuwność węzłów zależy od stopnia przesuwalności układu, przez który rozumiemy ilość wszystkich możliwych przesunięć prętów w kierunkach ich osi. Układ przedstawiony na rys. 4 posiada 9 stopni przesuwalności, a więc dla rozwiązania tego układu w etapie pierwszym musimy zastosować 9 wahaczy, w rozpatrywanym wypadku bocznych, rozmieszczonych w ten sposób, aby żaden z węzłów nie mógł doznać żadnych przemieszczeń. Otrzymujemy w ten sposób obciążony jak w schemacie

<sup>1</sup> Wzór niniejszy słuszny jest tylko dla pręta jednostronnie idealnie utwierdzonego. Szersze ujęcie tego wzoru znajduje się przy omawianiu ram o węzłach przesuwnych.



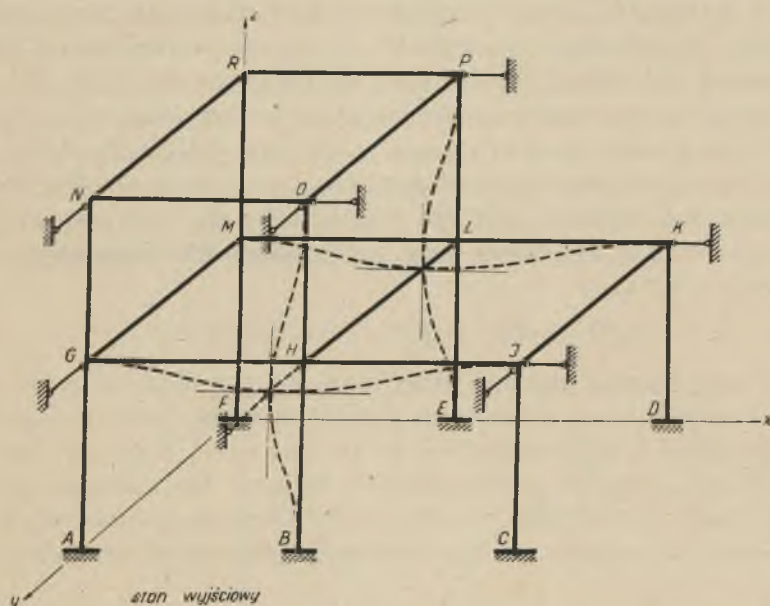
Rys. 4. Rama dowolna o węzłach przesuwanych



Rys. 5. Rama dowolna po odebraniu jej wszystkich stopni przesuwalności (schemat statyczny rozwiązywany w etapie I)

zasadniczym o węzłach nieprzesuwnych układ, który rozwiązujemy zgodnie z podanymi poprzednio uwagami (patrz rys. 5). Znając momenty węzłowe etapu pierwszego, możemy wyznaczyć siły osiowe w poszczególnych wahaczach, które oznaczać będziemy przez  $H_I$  ze wskaźnikiem podającym pręt, wzdłuż którego wahacz został założony.

Obecnie przystępujemy do etapu drugiego, który polega na tym, że kolejno wywołujemy w rozpatrywanym układzie przemieszczenia  $f_i$  w kierunkach założonych w etapie pierwszym wahaczy po usunięciu zadanych obciążeń. Na rys. 6 przedstawiono takie wymuszone przemieszczenie



Rys. 6. Rama dowolna, nieprzesuwna z wymuszonym przemieszczeniem węzła  $H$  w stanie wyjściowym (schemat statyczny, rozwiązywany w etapie II)

węzła  $H$  w kierunku osi  $y$  w stanie wyjściowym. We wszystkich prętach odkształconych pojawiają się wtedy momenty wyjściowe zginające o wartościach

$$M_0 = \frac{6 \cdot EJ \cdot f}{l^2}$$

lub

$$M_0 = \frac{3 \cdot EJ \cdot f}{l^2},$$

zależnie od sposobu podparcia pręta.

Znakowanie podanych wyżej momentów wyjściowych przeprowadzamy zgodnie z ogólną regułą znakowania momentów iterowanych. Momenty te wywołują zginanie omawianych prętów, przy czym np. przemieszcze-

nie  $f_y$  wywołuje momenty zginające  $M_x$  oraz  $M_z$ . Po przeprowadzeniu iteracji dla tych momentów wyjściowych wyznaczamy siły osiowe we wszystkich wahaczach, oznaczając je np. przez  $H_1^i$ , odpowiadające pierwszemu wymuszonemu przemieszczeniu, po czym powtarzamy tę operację w odniesieniu do wszystkich wahaczy, otrzymując siły  $H_2^i, H_3^i, H_4^i \dots H_n^i$ , gdzie  $n$  określa stopień przesuwalności układu.

Gdybyśmy wywołali każdorazowo przemieszczenia rzeczywiste, występujące w układzie zasadniczym, to otrzymalibyśmy rozwiązanie właściwe przez zsumowanie momentów węzłowych etapu pierwszego z momentami węzłowymi etapu drugiego. Ponieważ jednak przemieszczeń  $f$  nie znamy, to zakładamy początkowo, że są one równe pewnej dowolnej wielkości, np. jednostce długości; wówczas obliczone siły  $H_1^i, H_2^i, H_3^i \dots H_n^i$  są proporcjonalne do wartości rzeczywistych odpowiadających obciążeniu rozpatrywanej ramy, to znaczy, że wynoszą one  $a_1 H_1^i, a_2 H_2^i, a_3 H_3^i, \dots a_n H_n^i$ , gdzie  $a_i$  są odpowiednimi współczynnikami proporcjonalności. Ponieważ w układzie zasadniczym wahacze nie istnieją, to i siły osiowe w nich występujące muszą być równe zeru, wobec czego dla dowolnego wahacza otrzymamy równanie:

$$a_1 H_1^i + a_2 H_2^i + a_3 H_3^i + \dots + a_n H_n^i + H_I^i = 0.$$

Równań tego rodzaju możemy ułożyć tyle, ile w rozpatrywanym układzie występowało wahaczy, a ponieważ istnieje ta sama ilość współczynników proporcjonalności, otrzymujemy ilość równań o tej ilości niewiadomych, ilokrotny jest stopień przesuwalności układu. Rozwiązując powyższy układ równań wyznaczamy współczynniki proporcjonalności  $a_i$ , a wtedy odpowiednie rzeczywiste przemieszczenia węzłów ramy wynoszą:

$$f_{rz,i} = a_i \cdot f_i$$

a gdy przyjmiemy

$$f_i = 1 \text{ cm},$$

to

$$f_{rz,i} = a_i \text{ (w cm)}.$$

Znając rzeczywiste wartości przemieszczeń  $f_{rz}$ , możemy obliczyć rzeczywiste momenty zginające i skręcające, a ponieważ między przemieszczeniami  $f$  a momentami  $M$  zachodzi zależność liniowa, to:

$$M_{rz}^i = M_I^i + a_1 M_1^i + a_2 M_2^i + \dots + a_n M_n^i,$$

gdzie

$M_{rz}^i$  — rzeczywisty moment węzłowy w pręcie  $i$ -tym,

$M_I^i$  — moment węzłowy w tym pręcie z etapu pierwszego,

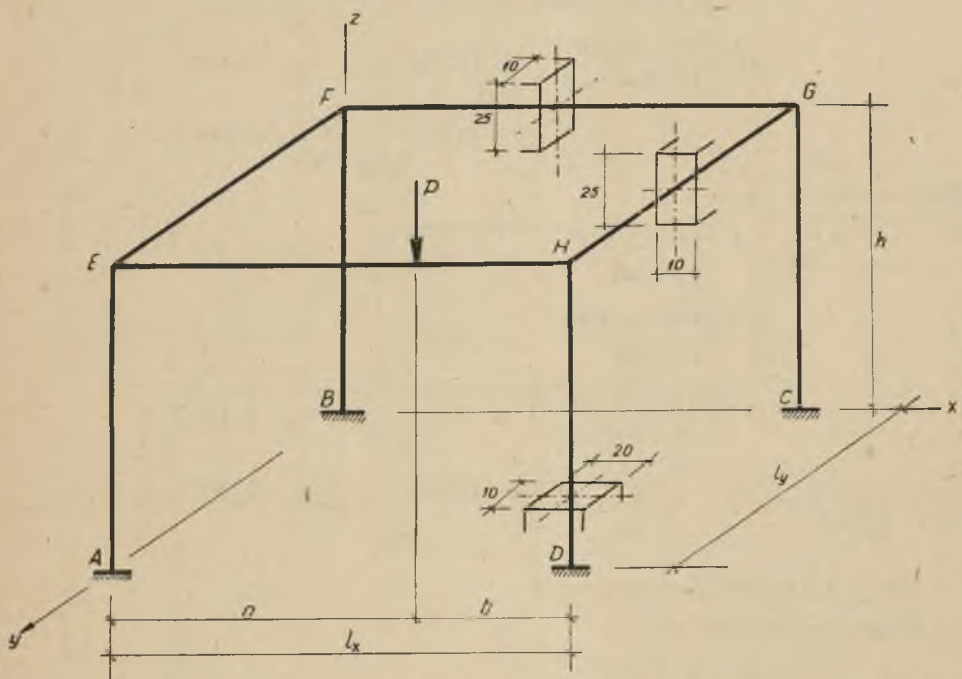
$a_1, a_2$  itd. — współczynniki proporcjonalności,

$M_1^i, M_2^i$  itd. — momenty węzłowe w pręcie  $i$  z kolejnych iteracji etapu drugiego.

Przy układaniu równań, wyrażających zerowe siły osiowe w wahaczach, należy szczególną uwagę zwrócić na znakowanie tych sił. Najwygodniej jest oprzeć się na zasadzie, że znak siły w wahaczu ustalać będziemy przez porównanie zwrotu oddziaływania ze zwrotem równoległej osi układu współrzędnych. Jeżeli zwroty oddziaływania i osi są zgodne, to siłę uważać będziemy za dodatnią. W wypadku przeciwnym mamy do czynienia z siłą ujemną.

Zastosowanie omówionego wyżej toku postępowania podaje przykład 2, zaczerpnięty z artykułu dra inż. A. Lisowskiego: *Obliczanie ram przestrzennych metodą zrównoważenia węzłów*, zamieszczonego w „Inżynierii i Budownictwie“ ze stycznia 1953 r. (str. 20-24). Przykład ten ilustruje korzyści wynikające z zastosowania metody kolejnych przybliżeń nawet do tak prostego wypadku. Układ 16 równań o 16 niewiadomych zredukował się w tym przykładzie do 4 równań o 4 niewiadomych.

Przykład 2. Dana jest prostokątna rama przestrzenna, jednopiętrowa, o wymiarach jak na rysunku 7, obciążona siłą skupioną  $P=10$  t. Moduł sprężystości  $E=200$  t/cm<sup>2</sup>, ułamek Poissona  $\nu=0,3$ .



Rys. 7. Schemat statyczny ramy do przykładu 2

Wymiary geometryczne:  $l_x=5,0$  m,  $l_y=3,0$  m,  $h=3,0$  m. Przekroje rygli:  $25 \times 10$  cm, przekroje słupów:  $20 \times 10$  cm. Położenie siły:  $a=3,5$  m,  $b=1,5$  m.

Szttywności bezwzględne

Współczynniki rozdziału

Płaszczyzna  $y-z$ :

$$s_x^x = \frac{200 \cdot 0,249 \cdot 25 \cdot 10^3}{2(1+0,3)500} = 958$$

$$r_x^x = 0,024$$

$$s_x^y = \frac{4 \cdot 200 \cdot 10 \cdot 25^3}{12 \cdot 300} = 34722$$

$$r_x^y = 0,865$$

$$s_x^z = \frac{4 \cdot 200 \cdot 20 \cdot 10^3}{12 \cdot 300} = 4444$$

$$r_x^z = 0,111$$

$$\sum_i s_{ix} = 40124.$$

$$\sum_i r_i = 1,000.$$

Płaszczyzna  $x-z$ :

$$s_y^x = \frac{4 \cdot 200 \cdot 10 \cdot 25^3}{12 \cdot 500} = 20833$$

$$r_y^x = 0,518$$

$$s_y^y = \frac{200 \cdot 0,249 \cdot 25 \cdot 10^3}{2(1+0,3)300} = 1596$$

$$r_y^y = 0,040$$

$$s_y^z = \frac{4 \cdot 200 \cdot 10 \cdot 20^3}{12 \cdot 300} = 17778$$

$$r_y^z = 0,442$$

$$\sum_i s_{iy} = 40207.$$

$$\sum_i r_i = 1,000.$$

Płaszczyzna  $x-y$ :

$$s_z^x = \frac{4 \cdot 200 \cdot 25 \cdot 10^3}{12 \cdot 500} = 3333$$

$$r_z^x = 0,331$$

$$s_z^y = \frac{4 \cdot 200 \cdot 25 \cdot 10^3}{12 \cdot 300} = 5555$$

$$r_z^y = 0,552$$

$$s_z^z = \frac{200 \cdot 0,229 \cdot 20 \cdot 10^3}{2(1+0,3)300} = 1174$$

$$r_z^z = 0,117$$

$$\sum_i s_{iz} = 10062.$$

$$\sum_i r_i = 1,000.$$

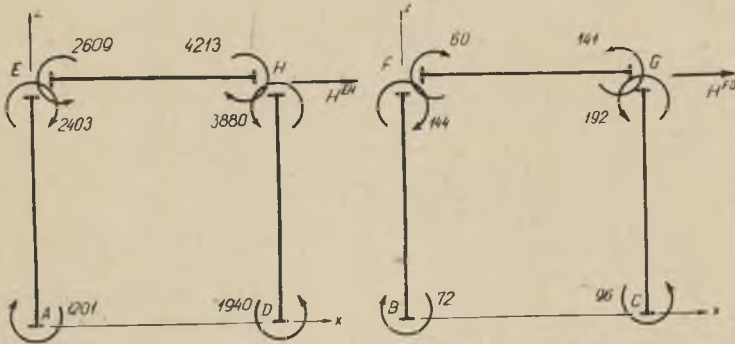
Etap I (węzły nieprzesuwne)

Momenty wyjściowe:

$$M_{y0}^{EH} = -Pa \left(\frac{b}{l}\right)^2 = -10 \cdot 3,5 \left(\frac{1,5}{5,0}\right)^2 = -3,15 \text{ tm} = -3150 \text{ kgm},$$

$$M_{y0}^{HE} = Pb \left(\frac{a}{l}\right)^2 = 10 \cdot 1,5 \cdot \left(\frac{3,5}{5,0}\right)^2 = 7,35 \text{ tm} = 7350 \text{ kgm}.$$

Iterację przeprowadzono w tablicy III (wszystkie iteracje w danym przykładzie wykonano na suwaku logarytmicznym 27 cm):

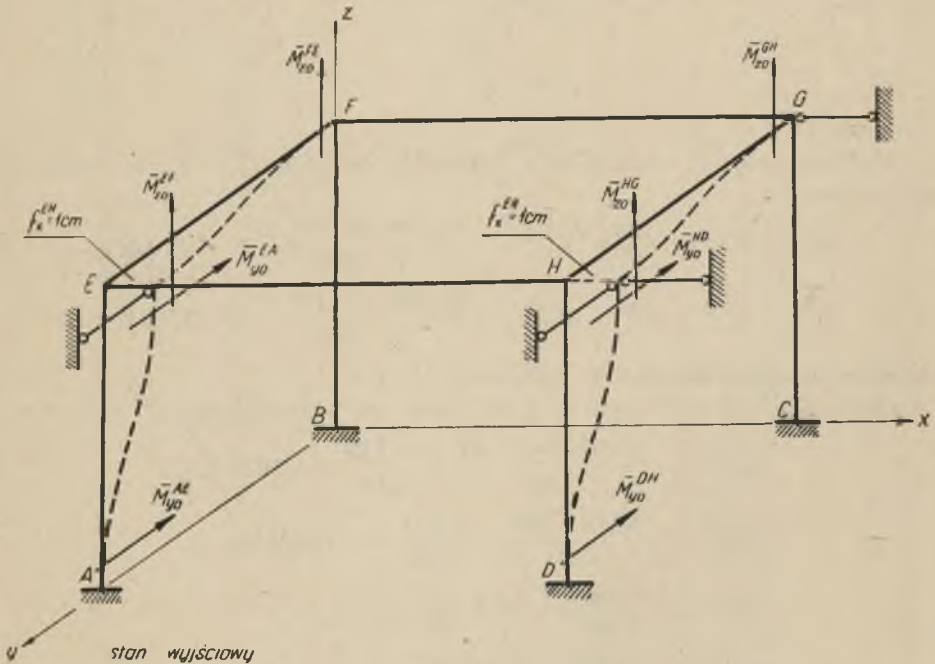


Rys. 8. Obliczenie sił osiowych w wahaczach w etapie I

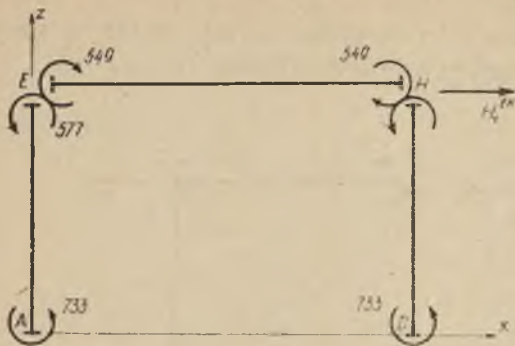
Obliczenie sił osiowych w wahaczach:

$$H^{EH} = \frac{-2403 - 1201 + 3880 + 1940}{3,0} = + 735 \text{ kg,}$$

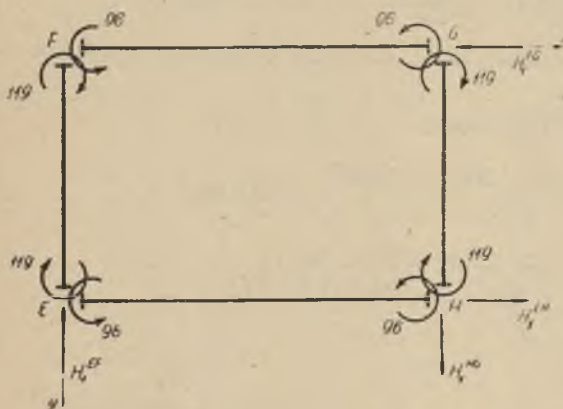
$$H^{FG} = \frac{-144 - 72 + 192 + 96}{3,0} = + 24 \text{ kg.}$$



Rys. 9. Stan wyjściowy przy pierwszych iteracjach etapu II



Rys. 10. Obliczenie sił osiowych w wahaczach do pierwszych iteracji etapu II



### Etap II

1) Przesunięcia rygla  $EH$  w kierunku osi  $x$  o  $f_x^{EH} = 1$  cm. Momenty wyjściowe:

$$M_{y0}^{AE} = M_{y0}^{EA} = M_{y0}^{DH} = M_{y0}^{HD} = -\frac{6 \cdot 200 \cdot 10 \cdot 20^3 \cdot 1}{12 \cdot 300^2} = -88,9 \text{ tcm},$$

$$M_{z0}^{EF} = M_{z0}^{FE} = M_{z0}^{HG} = M_{z0}^{GH} = +\frac{6 \cdot 200 \cdot 25 \cdot 10^3 \cdot 1}{12 \cdot 300^2} = +27,8 \text{ tcm}.$$

Iterację przeprowadzono w tablicach IV i V:

Obliczenie sił osiowych w wahaczach od przesunięcia  $f_x^{EH} = 1$  cm.

$$H_1^{EH} = +\frac{2 \cdot 577 + 2 \cdot 733}{3,00} + \frac{4 \cdot 119}{3,00} = +1032 \text{ kg},$$

$$H_1^{FG} = -\frac{2 \cdot 10 + 2 \cdot 5}{3,00} - \frac{4 \cdot 119}{3,00} = -168,8 \text{ kg},$$

$$H_1^{EF} = -\frac{4 \cdot 96}{5,00} = -76,8 \text{ kg},$$

$$H_1^{HG} = \frac{4 \cdot 96}{5,00} = +76,8 \text{ kg}.$$



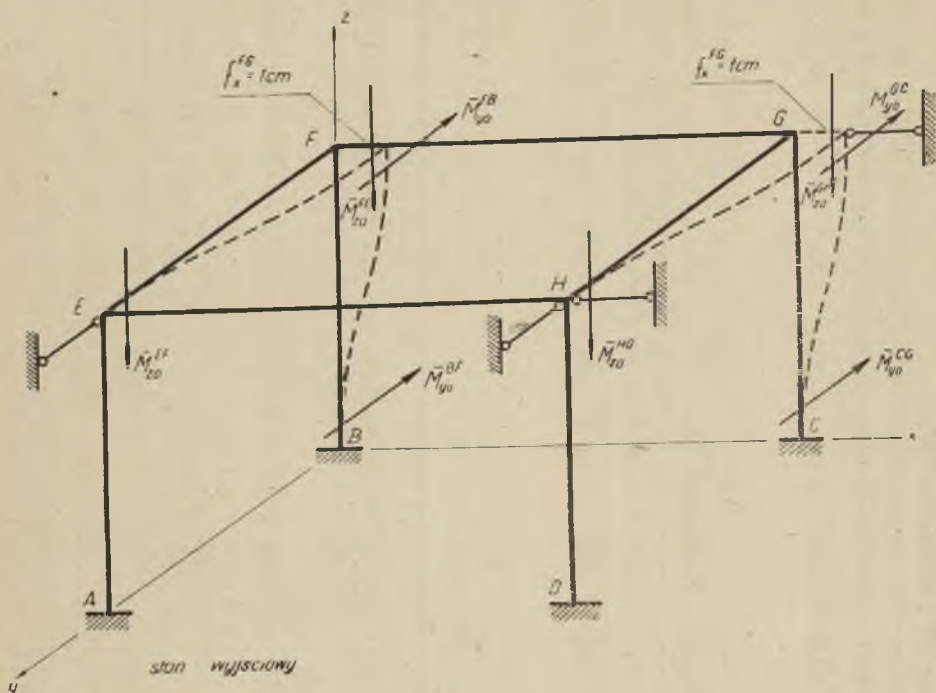


Etap II. Przesunięcie  $f_x^{EH}$ . Momenty  $M_z$

E			A			F			B			G			C			H			D	
E-H	E-A	E-F	A-E	F-E	F-B	F-G	B-F	G-F	G-C	G-H	C-G	H-G	H-D	H-E	D-H							
0,518	0,442	0,040	0,040	0,442	0,518			0,518	0,442	0,040		0,040	0,442	0,518								
-659	+230		-889	-18	-27			-36		-36		-889	+36	+460	-889							
+659	+341	+27	+146	+18	+1	+9	+4	+36	+19	+16	+8	-1	+393	+171	+196							
-45	-44	-1	+10	-5	-2	-3		+12	+5	+7		-7	-75	-88	-37							
+45	+23	+2		+5		+3	+1	-12	-6	-5	-3	+1	+1	+12								
-3	-3			-1		-1		+2	+1	+1		-1	-6	-6	-3							
+3	+2	+1		+1		+1		-2	-1	-1		+1		+1								
0	+549	-577	+28	0	-28	+10	+18	0	+18	+10	+5	0	+28	+549	-733							

Etap II. Przesunięcie  $f_x^{EH}$ . Momenty  $M_z$

E			A			F			B			G			C			H			D	
E-H	E-A	E-F	A-E	F-E	F-B	F-G	B-F	G-F	G-C	G-H	C-G	H-G	H-D	H-E	D-H							
0,331	0,117	0,552	0,552	0,552	0,117	0,331		0,331	0,117	0,552		0,552	0,117	0,331								
+278		+278	+33	+156	-76	-46		+278		+278	+33	+156	-76	-46	+18							
-278	-92	-33	+8	-156	-86	-52	+18	-278	-33	-153		-76	-18	-52								
-69	-26	-43	-8	+30	+19	+11		-69	-26	-43	-8	-156	-86	-18	+4							
+69	+23	+8		-30	-17	-4	+4	+69	+23	+8	+38	+30	+19	+11	+4							
-14	-5	-9	-2	+6	+4	+2		-14	-5	-9	-2	-30	-17	-4	-9							
+14	+4	+2		-6	-3	-1	+1	+14	+4	+2	+8	+6	+4	+2	+1							
-3	-1			-6	-3	-1		-3	-1		-2	-6	-3	-1								
+3	+1	+2						+3	+1	+2	+2											
0	-96	-23	+23	0	+119	-23	+23	0	-96	-23	+23	0	+119	-23	-96							



Rys. 11. Stan wyjściowy przy drugich iteracjach etapu II

2) Przesunięcie rygla  $FG$  w kierunku osi  $x$   $f_x^{FG} = 1$  cm. Momenty wyjściowe:

$$M_{y0}^{BF} = M_{y0}^{FB} = M_{y0}^{CG} = M_{y0}^{GC} = \frac{-6 \cdot 200 \cdot 10 \cdot 20^3 \cdot 1}{12 \cdot 300^2} = -88,9 \text{ tcm},$$

$$M_{z0}^{EF} = M_{z0}^{FE} = M_{z0}^{GH} = M_{z0}^{HG} = \frac{-6 \cdot 200 \cdot 25 \cdot 10^3 \cdot 1}{12 \cdot 300^2} = -27,8 \text{ tcm}.$$

Zestawienie momentów węzłowych podano w tablicach VI i VII (por. przypadek I).

Siły osiowe w wahaczach od przesunięcia  $f_x^{FG} = 1$  cm,

$$H_2^{EH} = -\frac{2 \cdot 10 + 2 \cdot 5}{3,00} - \frac{4 \cdot 119}{3,00} = -168,8 \text{ kg},$$

$$H_2^{FG} = +\frac{2 \cdot 577 + 2 \cdot 733}{3,00} + \frac{4 \cdot 119}{3,00} = +1032 \text{ kg},$$

$$-H_2^{EF} = H_2^{HG} = -\frac{4 \cdot 96}{5,00} = -76,8 \text{ kg}.$$

Etap II. Przesunięcie  $f_x^{FG}$ . Momenty  $M_y$

$E-H$	$E-A$	$E-F$	$A-E$	$F-E$	$F-B$	$F-G$	$B-F$	$G-F$	$G-C$	$G-H$	$C-G$	$H-G$	$H-D$	$H-E$	$D-H$
+18	+10	-28	+5	+28	-577	+549	-733	+549	-577	+28	-733	-28	+10	+18	+5

Etap II. Przesunięcie  $f_x^{FG}$ . Momenty  $M_z$

$E-H$	$E-A$	$E-F$	$A-E$	$F-E$	$F-B$	$F-G$	$B-F$	$G-F$	$G-C$	$G-H$	$C-G$	$H-G$	$H-D$	$H-E$	$D-H$
+96	+23	-119	-23	-119	+23	+96	-23	+96	+23	-119	-23	-119	+23	+96	-23

Etap II. Przesunięcie  $f_y^{EF}$ . Momenty  $M_x$

	$E$			$A$			$F$			$B$			$G$			$C$			$H$			$D$	
	$E-H$	$E-A$	$E-F$	$A-E$	$F-E$	$F-B$	$F-G$	$B-F$	$G-F$	$G-C$	$G-H$	$C-G$	$H-G$	$H-D$	$H-E$	$D-H$							
+126	+222	0,865	+222	+222	0,865	0,024	+222	0,024	0,024	0,111	0,865	0,024	0,865	0,111	0,024								
-126	-3	-14	-96	-109	-192	-24,5	-54,5	-5,5	-12	-24,5	-5,5	-12	-12	-12	-12								
+23,5			7	54,5	47	6	1,5	3	3	6	1,5	3	3	3	3								
-23,5	-0,5	-2,5	-20,5	-1,5	-9,5	-10	+0,5	+0,5	+0,5	+0,5	+0,5	+0,5	+0,5	+0,5	+0,5								
+4			4	9,5	8,5	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5								
-4				-2	-2																		
				2	1,5	0,5																	
0	-3,5	+205	-201,5	+213,5	0	-201,5	+205	-3,5	+213,5	0	-3,5	0	-3	-0,5	+3,5	0							

Etap II. Przesunięcie  $f_y^{EF}$ . Momenty  $M_z$

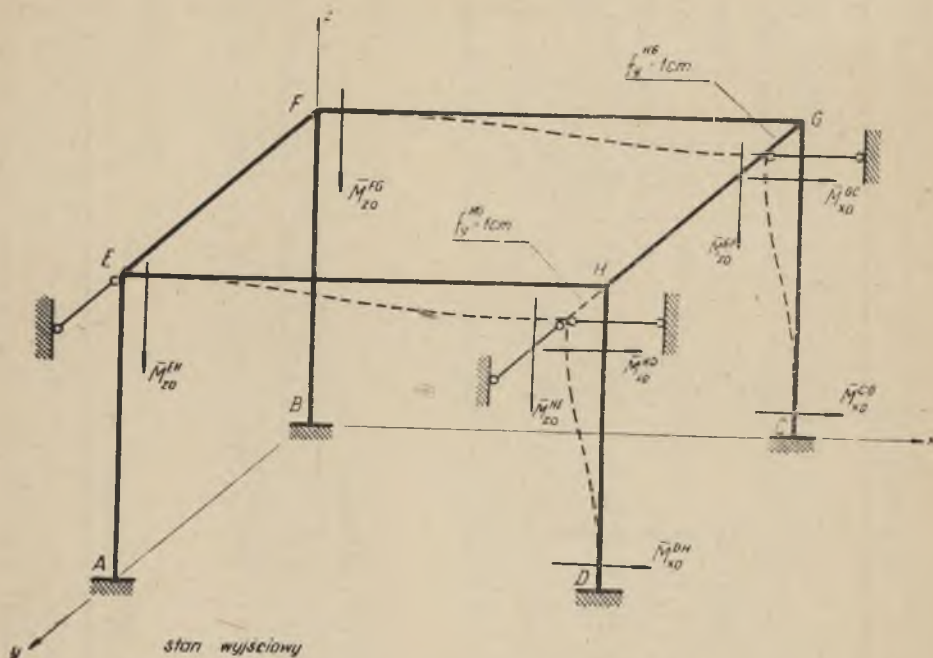
E			A			F			B			G			C			H			D	
E-H	E-A	E-F	A-E	A-F	A-E	F-E	F-B	F-G	B-F	B-F	G-F	G-C	G-H	C-G	H-G	H-D	H-E	D-H				
0,331	0,117	0,552				0,552	0,117	0,331			0,331	0,117	0,552		0,552	0,217	0,331					
+100	-33	-12	-55	+12	+56	-27,5		+100		+100	+100	-33	-12	+56	-27,5		+100					
-100	9	-24,5	-15,5	-56	-31	-6,5	-18,5	-16,5	+6,5	-100	-33	-9	-15,5	-56	-31	-6,5	-16,5					
+24,5	+8	+3	+13,5	-3	+7		+4	+4		+24,5	+8	+3	+13,5	-3	+7		-18,5			+6,5		
-5	-2	+0,5	-3	-11	-6	-1,5	-3,5	-3,5	+1,5	-5	-2	-3	-3	-11	-6	-1,5	-3,5			+1,5		
-5	+2	+0,5	+2,5	-0,5	+2,5	+1,5	+1	+1		+5	+2	+0,5	+2,5	-0,5	+2,5	+1,5	+1			+0,5		
					-2,5	-1,5	-0,5	+0,5	+0,5						-2,5	-1,5	-0,5			+0,5		
0	+66,0	-8,5	-57,5	+8,5	0	-57,5	-8,5	+66,0	+8,5	0	+66,0	-8,5	-57,5	+8,5	-57,5	-8,5	+66,0			+8,5		

Etap II. Przesunięcie  $f_y^{HG}$ . Momenty  $M_x$

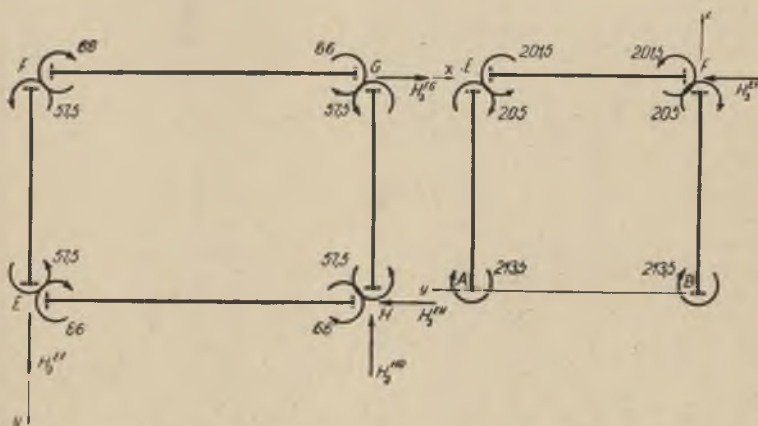
E-H	E-A	E-F	A-E	A-F	F-E	F-B	F-G	B-F	B-F	G-F	G-C	G-H	C-G	H-G	H-D	H-E	D-H
+4	-0,5	-3,5	0	-3	-0,5	+3,5	0	-3,5	+205	-201,5	+213,5	-201,5	+205	-3,5	+213,5		

Etap II. Przesunięcie  $f_y^{HG}$ . Momenty  $M_z$

E-H	E-A	E-F	A-E	A-F	F-E	F-B	F-G	B-F	B-F	G-F	G-C	G-H	C-G	H-G	H-D	H-E	D-H
-66	-8,5	+57,5	-8,5	+57,5	+8,5	-66	-66	-8,5	+8,5	+57,5	-8,5	+57,5	-8,5	+57,5	+8,5	-66	-8,5



Rys. 12. Stan wyjściowy przy trzecich iteracjach etapu II



Rys. 13. Obliczenie sił osiowych w walcach do trzecich iteracji etapu II

3, Przesunięcie rygła  $EF$  w kierunku osi  $y$  o  $f_y^{EF} = 1$  cm. Momenty wyjściowe:

$$M_{x_0}^{AE} = M_{x_0}^{EA} = M_{x_0}^{BF} = M_{x_0}^{FB} = + \frac{6 \cdot 200 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 1}{12 \cdot 300} = + 22,2 \text{ tcm},$$

$$M_{z_0}^{EH} = M_{z_0}^{HE} = M_{z_0}^{FG} = M_{z_0}^{GF} = + \frac{6 \cdot 200 \cdot 25 \cdot 10^3 \cdot 1}{12 \cdot 500^2} = + 10,0 \text{ tcm}.$$

Iterację przeprowadzono w tablicach VIII i IX:

Obliczenie sił osiowych w wahaczach od przesunięcia  $f_y^{EF} = 1$  cm.

$$H_3^{EH} = - \frac{4 \cdot 57,5}{3,00} = - 76,8 \text{ kg}$$

$$H_3^{FG} = + \frac{4 \cdot 57}{3,00} = + 76,8 \text{ kg},$$

$$H_3^{EF} = + \frac{4 \cdot 66}{5,00} + \frac{2 \cdot 205 + 2 \cdot 213,5}{3,00} = + 331,8 \text{ kg},$$

$$H_3^{HG} = - \frac{4 \cdot 66}{5,00} = - 52,8 \text{ kg}.$$

4) Przesunięcie rygła  $HG$  w kierunku osi  $y$  o  $f_y^{HG} = 1$  cm. Momenty wyjściowe:

$$M_{x_0}^{DH} = M_{x_0}^{HD} = M_{x_0}^{CG} = M_{x_0}^{GC} = + \frac{6 \cdot 200 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 1}{12 \cdot 300^2} = + 22,2 \text{ tcm},$$

$$M_{z_0}^{EH} = M_{z_0}^{HE} = M_{z_0}^{FG} = M_{z_0}^{GF} = - \frac{6 \cdot 200 \cdot 25 \cdot 10^3 \cdot 1}{12 \cdot 500^2} = - 10,0 \text{ tcm}.$$

Zestawienie momentów węzłowych podano w tablicach X i XI (przez analogię do przypadku 3);

Obliczenie sił osiowych w wahaczach od przesunięcia  $f_y^{HG} = 1$  cm.

$$H_4^{EH} = + \frac{4 \cdot 57,5}{3,00} = + 76,8 \text{ kg},$$

$$H_4^{FG} = - \frac{4 \cdot 57,5}{3,00} = - 76,8 \text{ kg},$$

$$H_4^{EF} = - \frac{4 \cdot 66}{5,00} = - 52,8 \text{ kg},$$

$$H_4^{HG} = + \frac{4 \cdot 66}{5,00} + \frac{2 \cdot 205 + 2 \cdot 213,5}{3,00} = + 331,8 \text{ kg}.$$

Równania sił zerowych w wahaczach:

$$\begin{cases} 1032a_1 - 168,8a_2 - 76,8a_3 + 76,8a_4 + 735 = 0 \\ - 169,8a_1 + 1032a_2 + 76,8a_3 - 76,8a_4 + 24 = 0 \\ - 76,8a_1 + 76,8a_2 + 331,8a_3 - 52,8a_4 = 0 \\ + 76,8a_1 - 76,8a_2 + 52,8a_3 + 331,8a_4 = 0. \end{cases}$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymamy:

$$a_1 = -0,7517; \quad a_2 = -0,1282; \quad a_3 = -0,1245; \quad a_4 = +0,1245;$$

tzn., że rzeczywiste składowe przemieszczenia główce słupów wynoszą:

$$f_x^E = f_x^H = -0,7517 \text{ cm}, \quad f_y^E = f_y^F = -0,1245 \text{ cm},$$

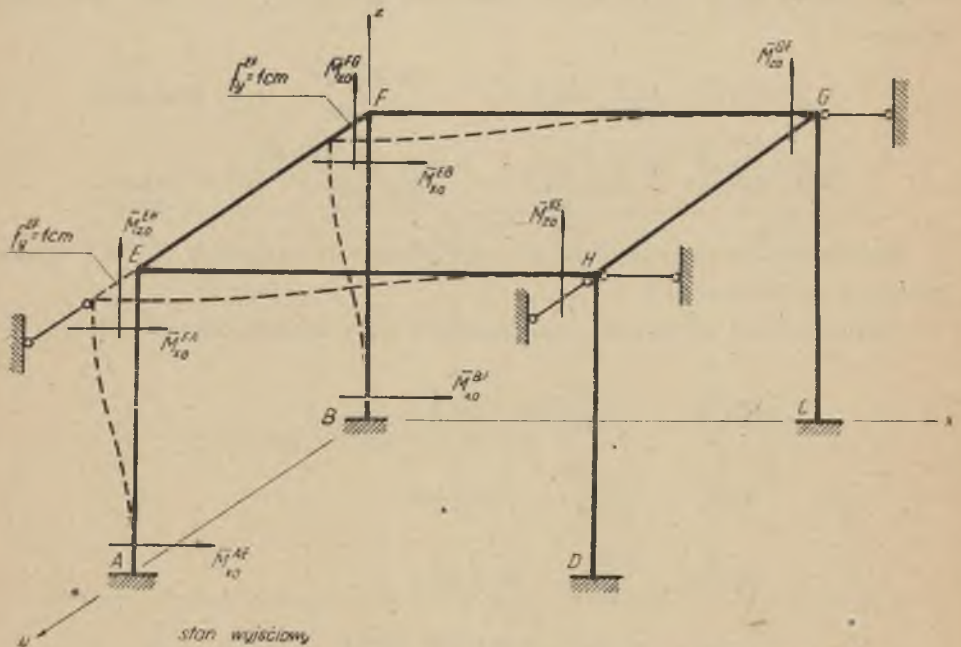
$$f_x^F = f_x^G = -0,1282 \text{ cm}, \quad f_y^H = f_y^G = +0,1245 \text{ cm},$$

wobec czego wartości momentów węzłowych z zachowaniem znakowania podanego w pkt 5 są:

$$M_x^{EH} = -0,1245(-3,5) + 0,1245 \cdot 4 = +0,93 \text{ kgm},$$

$$M_y^{EH} = -2609 - 0,7517 \cdot 549 - 0,1282 \cdot 18 = -3024,0 \text{ kgm},$$

$$M_z^{EH} = -0,7517(-96) - 0,1282 \cdot 96 - 0,1245 \cdot 66 + 0,1245(-66) = +43,6 \text{ kgm}.$$



Rys. 14. Stan wyjściowy przy czwartej iteracji etapu II



W podobny sposób otrzymamy wartości pozostałych momentów węzłowych:

$$M_x^{EA} = -25,6 \text{ kgm}, \quad M_y^{EA} = +2835,4 \text{ kgm}, \\ M_z^{EA} = +16,2 \text{ kgm}.$$

$$M_x^{EF} = +24,7 \text{ kgm}, \quad M_y^{EF} = +186,5 \text{ kgm}, \\ M_z^{EF} = -59,9 \text{ kgm}.$$

$$M_x^{FE} = +24,7 \text{ kgm}, \quad M_y^{FE} = -186,5 \text{ kgm}, \\ M_z^{FE} = -59,9 \text{ kgm}.$$

$$M_x^{FB} = -25,6 \text{ kgm}, \quad M_y^{FB} = +210,5 \text{ kgm}, \\ M_z^{FB} = +16,2 \text{ kgm}.$$

$$M_x^{FG} = +0,93 \text{ kgm}, \quad M_y^{FG} = -24,1 \text{ kgm}, \\ M_z^{FG} = +43,6 \text{ kgm}.$$

$$M_x^{GF} = -0,93 \text{ kgm}, \quad M_y^{GF} = -224,9 \text{ kgm}, \\ M_z^{GF} = +43,6 \text{ kgm}.$$

$$M_x^{GC} = +25,6 \text{ kgm}, \quad M_y^{GC} = -125,5 \text{ kgm}, \\ M_z^{GC} = +16,2 \text{ kgm}.$$

$$M_x^{GH} = -24,7 \text{ kgm}, \quad M_y^{GH} = +350,5 \text{ kgm}, \\ M_z^{GH} = -59,9 \text{ kgm}.$$

$$M_x^{HG} = -24,7 \text{ kgm}, \quad M_y^{HG} = -350,5 \text{ kgm}, \\ M_z^{HG} = -59,5 \text{ kgm}.$$

$$M_x^{HD} = +25,6 \text{ kgm}, \quad M_y^{HD} = -3447,6 \text{ kgm}, \\ M_z^{HD} = -16,2 \text{ kgm}.$$

$$M_x^{HE} = -0,93 \text{ kgm}, \quad M_y^{HE} = +3779,0 \text{ kgm}, \\ M_z^{HE} = +43,6 \text{ kgm}.$$

oraz momenty utwierdzające:

$$M_x^{AE} = -26,6 \text{ kgm}, \quad M_y^{AE} = +1751,4 \text{ kgm}, \\ M_z^{AE} = -16,2 \text{ kgm}.$$

$$M_x^{BF} = -26,6 \text{ kgm}, \quad M_y^{BF} = +162,2 \text{ kgm}, \\ M_z^{BF} = -16,2 \text{ kgm}.$$

$$\begin{aligned}
 M_x^{CG} &= +26,6 \text{ kgm}, & M_y^{CG} &= -5,8 \text{ kgm}, \\
 & & M_z^{CG} &= -16,2 \text{ kgm}. \\
 M_x^{DH} &= +26,6 \text{ kgm}, & M_y^{DH} &= -1389,6 \text{ kgm}, \\
 & & M_z^{DH} &= -16,2 \text{ kgm}.
 \end{aligned}$$

Przytoczony przykład znacznie upraszcza się przez wykorzystanie symetrii i antymetrii układu, co, podobnie jak w układach płaskich, sprowadza się do zmian odpowiednich sztywności bezwzględnych.

### Sprawdzenie poprawności rozwiązania

Sprawdzenie otrzymanych wyników polega, podobnie jak przy ramach nieprzesuwanych, na ułożeniu ogólnych warunków równowagi i przekonaniu się, czy warunki te rzeczywiście są sprawdzone, oraz na sprawdzeniu równości kątów ugięć w poszczególnych węzłach. Przy obliczaniu tych kątów należy zwrócić uwagę na wpływ przemieszczeń węzłów, które wywołują obrót cięciwy pręta o kąt

$$\Delta\varphi = \frac{f_n - f_{n-1}}{l_n},$$

wobec czego wzór na obliczenie całkowitego kąta ugięcia przybiera postać:

$$E \cdot \varphi_n = \frac{l}{J_n} \left[ Q_n'' + \frac{l_n}{6} (2M_n + M_{n-1}) \right] + \frac{f_n - f_{n-1}}{l_n} E.$$

Jest rzeczą oczywistą, że sprawdzenie równości kątów ugięć powinno nastąpić we wszystkich trzech płaszczyznach układu odniesienia.

Dla zobrazowania stosowalności tego wzoru przytoczono poniżej sprawdzenie równości kątów ugięć węzła  $H$  ramy rozwiązanej w przykładzie 2.

Kąty ugięć w płaszczyźnie  $x-z$  (rys. 15a):

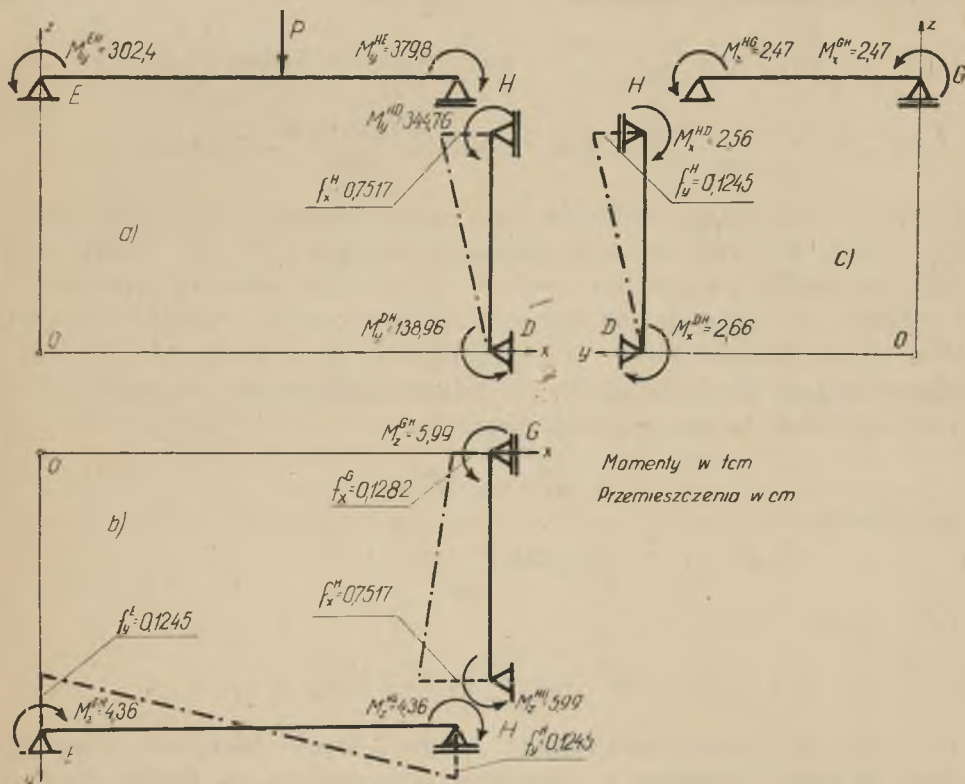
$$\begin{aligned}
 E \cdot \varphi_y^{HE} &= \frac{12}{10 \cdot 25^3} \left[ \frac{10 \cdot 350 \cdot 150}{6 \cdot 500} (150 + 2 \cdot 350) - \frac{500}{6} (2 \cdot 379,80 + 302,40) \right] = \\
 &= +4,628 \text{ t/cm}^2,
 \end{aligned}$$

$$E \cdot \varphi_y^{HD} = \frac{12}{10 \cdot 20^3} \cdot \frac{300}{6} (-2 \cdot 344,76 + 138,96) - \frac{0,7517 \cdot 200}{300} = +4,630 \text{ t/cm}^2.$$

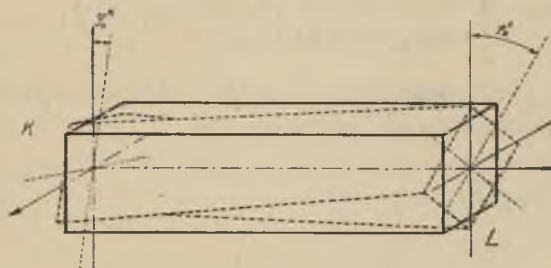
Kąty ugięć w płaszczyźnie  $x-y$  (rys. 15b):

$$E \cdot \varphi_z^{HE} = \frac{12}{25 \cdot 10^3} \cdot \frac{500}{6} (2 \cdot 4,36 - 4,36) + \frac{2 \cdot 0,1245}{500} \cdot 200 = +0,274 \text{ t/cm}^2,$$

$$E \cdot \varphi_z^{HG} = \frac{12}{25 \cdot 10^3} \cdot \frac{300}{6} (2 \cdot 5,99 - 5,99) - \frac{0,7517 - 0,1282}{300} \cdot 200 = +0,273 \text{ t/cm}^2.$$



Rys. 15. Obraz momentów zginających i przesunięć węzłów ramy przykładu 2 w trzech rzutach



Rys. 16. Perspektywny rysunek pręta skręcanego K-L, którego końce doznały obrotów o kąty  $\varphi_x^K$  i  $\varphi_x^L$

Kąty ugięć w płaszczyźnie  $y-z$  (rys. 15c):

$$E \cdot \varphi_x^{HG} = \frac{12}{10 \cdot 25^3} \cdot \frac{300}{6} (2 \cdot 2,47 - 2,47) = + 0,0094 \text{ t/cm}^2,$$

$$E \cdot \varphi_x^{HD} = \frac{12}{20 \cdot 10^3} \cdot \frac{300}{6} (2 \cdot 2,56 - 2,66) - \frac{0,1245 \cdot 200}{300} = - 0,0093 \text{ t/cm}^2.$$

Obliczając analogicznie wszystkie kąty ugięć możemy przekonać się także, czy zostały właściwie obliczone momenty skłęcające. W celu rozpatrzenia tego przypadku przyjmijmy pręt  $K-L$  (rys. 16) równoległy do osi  $x$  i załóźmy, że nastąpiło juź sprawdzenie kątów ugięć wszystkich prętów leżących w płaszczyźnie  $y-z$  i zbiegających się w węzłach  $K$  i  $L$ . Załóźmy, że kąty te wynoszą  $\varphi_x^K$  i  $\varphi_x^L$ . Róźnica między tymi dwoma kątami jest oczywiście kątem skłęcenia pręta  $K-L$ :

$$\varphi_x^K - \varphi_x^L = \varphi_x^{KL},$$

a poniewaź

$$\varphi_x^{KL} = \frac{2 M_x^{KL} \cdot l(1 + \nu)}{E J_0},$$

to

$$M_x^{KL} = \frac{E J_0}{2l(1 + \nu)} (\varphi_x^K - \varphi_x^L).$$

Obliczoną za pomocą powyższego wzoru wartość momentu skłęcającego możemy porównać z wynikiem otrzymanym na drodze iteracji i przekonać się o poprawności przeprowadzonego obliczenia.

Zastosujmy ostatni wzór do pręta  $H-D$  z przykłądu 2. Z uwagi na idealne utwierdzenie w pkt.  $D$ , kąt  $\varphi_z^D = 0$ , a kąt  $\varphi_z^H = \frac{0,273}{E}$ , wobec czego

$$M_z^{HD} = \frac{E \cdot 0,229 \cdot 20 \cdot 10^3}{2 \cdot 300 \cdot (1 + 0,3)} \left( \frac{0,273}{E} - 0 \right) = 1,61 \text{ tcm}.$$

Jak widzimy, w przytoczonym wypadku róźnica wynosi około 0,6% i powstała na skutek działań suwakowych.

Opracowano w lutym 1953 r.