ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: ELEKTRYKA z. 64 Nr kol. 593

Maciej SIWCZYŃSKI

# WYZNACZENIE IMMITANCJI WEJŚCIOWEJ I TRANSMITANCJI ŁAŃCUCHA JEDNAKOWYCH CZWÓRNIKÓW NIEODWRACALNYCH DROGĄ ROZWIĄZANIA RÓWNANIA REKURENCYJNEGO TYPU HOMOGRAFICZNEGO

Streszczenie. W artykule wyznaczono immitancję wejściową odcinka łańcucha jednakowych, nieodwracalnych czwórników drogę rozwiązania nieliniowego równania rekurencyjnego typu:

$$z_{n+1} = \frac{a\,z_n + b}{c\,z_n + d},$$

zwanego homograficznym, a następnie przedyskutowano zagadnienie asymptotyki jego rozwiązań.

## 1. Transmitancja łańcucha otwartego

Weźmy pod uwagę łańcuch jednakowych czwórników. Przez

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{1}$$

oznaczmy macierz łańcuchową jednego ogniwa. Przez $|A|$ oznaczać będziemy wyznacznik macierzy $A$. Prócz tego wprowadzimy oznaczenie:

$$x = \frac{a + d}{2}. \tag{2}$$

Łańcuch taki opisuje równanie rekurencyjne:

$$w_{n+1} = A\,w_n,$$

gdzie $\{w_n\}$ jest ciągiem elementów przestrzeni liniowej, $A$ jest operacją liniową w tej przestrzeni. Rozwiązaniem tego równania przy warunku początkowym $w_o$ jest ciąg:

$$w_n = A^n\,w_o$$

n-ta potęga operacji $A$ określona jest wzorem [4]:

$$A^n = -\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} \lambda^n R_\lambda \, d\lambda^{x)}, \tag{3}$$

gdzie $R$ jest rezolwentą operacji $A$, a kontur $\Gamma$ zawiera wewnątrz jej widmo. Rezolwenta operacji reprezentowanej macierzą (1) ma postać:

$$R_\lambda = \frac{1}{D(\lambda)}\begin{bmatrix} d-\lambda & -b \\ -c & a-\lambda \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$D(\lambda) = \lambda^2 - 2x\lambda + |A|.$$

Punktami widma operacji $A$ są więc:

$$\lambda_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - |A|}. \tag{4}$$

Ponieważ funkcja

$$F(\lambda) = \lambda^{n-2} D(\lambda) R_\lambda$$

jest analityczna, więc na podstawie (3) mamy:

$$-\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} F(\lambda) d\lambda = A^n - 2xA^{n-1} + |A|A^{n-2} = 0.$$

Zatem n-ta potęga macierzy $A$ określona jest zależnością rekurencyjną:

$$A^n = 2xA^{n-1} - |A|A^{n-2}$$

W dalszym ciągu możliwe jest przedstawienie macierzy $A^n$ czwórników odwracalnych za pomocą macierzy $A$ i wielomianów Czebyszewa argumentu x [1, 2].

Mając jednak na uwadze późniejszą dyskusję asymptotyki rozwiązań równań rekurencyjnych pójdziemy w tym artykule nieco inną drogą.

Z (3) wynika, że transmitancja napięciowo-napięciowa łańcucha otwartego na końcu, złożonego z n ogniw, ma postać:

$$t_{no} = \frac{u_{wy}}{u_{we}} = \left(\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}\lambda^n \frac{\lambda-d}{D(\lambda)}\, d\lambda\right)^{-1} = \frac{\lambda_2^{1-n}}{\sigma_n}\,\frac{1-k}{1-k^n}, \tag{5}$$

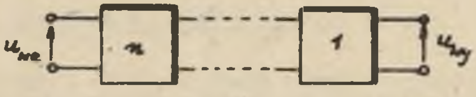
---

x) Wzór (3) można wyprowadzić dokonując przekształcenia Z na wymienionym tu równaniu rekurencyjnym.

gdzie:

$$k = \frac{\hbar_1}{\hbar_2}, \tag{6}$$

$$\sigma_n = \hbar_2 \frac{1-k^{n+1}}{1-k^n} - d. \tag{7}$$




Rys. 1. Wyznaczanie transmitancji łańcucha otwartego

## 2. Impedancja wejściowa łańcucha otwartego i admitancja wyjściowa łańcucha zwartego

Impedancja wejściowa łańcucha spełnia równanie rekurencyjne typu homograficznego [3]:

$$z_{n+1} = \frac{az_n + b}{cz_n + d}. \tag{8}$$

Podstawienie

$$z_n = \mathfrak{z}_n - \frac{d}{c}$$

sprowadza równanie (8) do postaci równania Riccatiego:

$$c\,\mathfrak{z}_{n+1}\,\mathfrak{z}_n - 2x\mathfrak{z}_n + \frac{|A|}{c} = 0,$$

które przez podstawienie

$$\mathfrak{z}_n = \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

daje się sprowadzić do równania liniowego:

$$c\,v_{n+2} - 2xv_{n+1} + \frac{|A|}{c}\,v_n = 0. \tag{9}$$

Rozwiązując łatwo równanie (9), znajdujemy następnie ogólne rozwiązanie równania (8) w postaci:

$$z_n = \frac{1}{c}\left(\lambda_2 \frac{\alpha k^{n+1} + 1}{\alpha k^n + 1} - d\right). \tag{10}$$

Dla łańcucha otwartego na końcu mamy warunek początkowy $\frac{1}{z_0} = 0$. Wyznaczmy stąd $\alpha = -1$. Zatem impedancja wejściowa otwartego łańcucha złożonego z $n$ ogniw określona jest wzorem:

$$z_n = \frac{\sigma_n}{c}. \tag{11}$$

Admitancja wyjściowa łańcucha spełnia również równanie homograficzne:

$$y_{n+1} = \frac{a\, y_n + c}{b\, y_n + d},$$

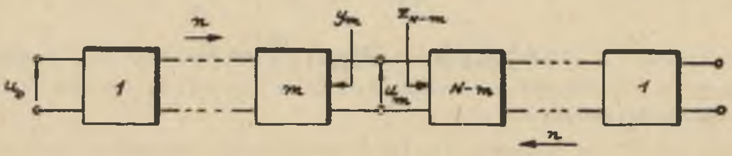
którego rozwiązaniem szczególnym przy warunku początkowym $\frac{1}{y_0} = 0$ (łańcuch zwarty na początku) jest ciąg:

$$y_n = \frac{\sigma_n}{b}, \tag{12}$$

gdzie $\sigma_n$ określona jest wzorem (7).

## 3. Transmitancja odcinka łańcucha otwartego

Wykorzystując wzory (5), (11), (12) określimy łatwo transmitancję odcinka łańcucha otwartego na końcu, pobudzonego napięciowo na początku (rys. 2).




Rys. 2. Wyznaczanie transmitancji odcinka łańcucha otwartego

Stosując zasadę Thevenina do zacisków m-tego ogniwa, mamy:

$$\frac{u_m}{u_{mo}} = \frac{u_m}{t_{mo}\, u_o} = \frac{y_m\, z_{N-m}}{1 + y_m\, z_{N-m}},$$

skąd na podstawie (5), (11), (12) otrzymujemy:

$$\frac{u_m}{u_0} = \lambda_2^{1-m} \frac{1-k}{1-k^m} \frac{\sigma_{N-m}}{bc + \sigma_m \sigma_{N-m}}. \tag{13}$$

Rozwiązując równania homograficzne przy dowolnych warunkach początkowych można określić transmitancję łańcucha przy dowolnych immitancjach na jego wejściu i wyjściu.

## 4. Asymptotyka rozwiązań równań rekurencyjnych

Rozwiązanie $f_n$ równania rekurencyjnego nazywamy asymptotycznym, jeżeli przy dowolnych warunkach początkowych istnieje:

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f.$$

Badanie asymptotyki dotyczy więc zachowania się immitancji łańcuchów przy nieskończenie narastającej liczbie ogniw.

Rozważmy następujące przypadki:

a) gdy $\lambda_1 = \lambda_2$, co ma miejsce przy:

$$x = \sqrt{|\mathbf{A}|}.$$

Wzór (5) daje wtedy wynik:

$$t_{no} = \frac{\lambda_2^{1-n}}{(\lambda_2 - d)\, n + \lambda_2} \tag{14}$$

Wówczas także ogólne rozwiązanie równania (8) przyjmuje postać:

$$z_n = \left(\lambda_2 \frac{\alpha(n+1) + 1}{\alpha n + 1} - d\right) \frac{1}{c}. \tag{15}$$

Ciąg (15) jest zbieżny przy dowolnych $\alpha$ i $\lambda_2$, natomiast ciąg (14) tylko przy $|\lambda_2| > 1$.

b) gdy $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$, rozwiązanie równania (8) jest asymptotyczne. Ciąg $t_{no}$ natomiast jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) > 1,$$

a więc wtedy, gdy co najmniej jeden punkt widma macierzy **A** leży na zewnątrz koła domkniętego

c) gdy $\lambda_1 \neq \lambda_2$ i $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, wówczas łatwo przekonać się, że ciągi (5) i (10) nie mają granicy.

Dla przypadków a) i b), przy $n \to \infty$, mamy:

$$z_n \to (\lambda_2 - d)\frac{1}{c}, \tag{16}$$

przy czym $\lambda_2$ jest jednym z punktów widma macierzy A, spełniającym warunek $|\lambda_2| > |\lambda_1|$.

Punkty widma wyrażone przez impedancje ogniwa określone są wzorem:

$$\lambda_{1,2} = \frac{z_{11} + z_{22} \pm \sqrt{(z_{11} + z_{22})^2 - 4 z_{12} z_{21}}}{2 z_{21}}.$$

W szczególnym przypadku dla czwórnika o rzeczywistych impedancjach mamy:

$$\lambda_{1,2} = \frac{r_{11} + r_{22} \pm \sqrt{(r_{11} + r_{22})^2 - 4 r_{12} r_{21}}}{2 r_{21}}.$$

Przypadek c), w którym $z_n$ nie posiada granicy przy $n \to \infty$, ma miejsce gdy:

$$4 r_{12} r_{21} - (r_{11} + r_{22})^2 > 0. \tag{17}$$

Interesujące wydaje się porównanie tego wyniku z warunkiem pasywności podanym przez Raisbecka [5, 6], który w tym szczególnym przypadku przyjmuje postać:

$$4 r_{11} r_{22} - (r_{12} + r_{21})^2 \geqslant 0. \tag{18}$$

$$r_{11} \geqslant 0, \quad r_{22} \geqslant 0.$$

Rozpatrzmy jeszcze szczególny przypadek drabinkowego układu rezystancyjnego. Macierz rezystancyjna składowego ogniwa typu gamma odwrócona z rezystancją podłużną $R_1$ i poprzeczną $R_2$ ma postać

$$r = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ R_2 & R_2 \end{bmatrix}$$

Warunek Raisbecka daje wynik:

$$R_1 \geqslant 0 \quad \text{i} \quad R_2 \geqslant 0.$$

Nierówność (17) natomiast daje wynik:

$$R_1(R_1 + 4\,R_2) < 0,$$

który nie może mieć miejsca w układzie pasywnym.

Na zakończenie należy stwierdzić, że równania rekurencyjne typu homograficznego mogą znaleźć zastosowanie w analizie łańcuchów czwórników, obok metod podanych w [1].

LITERATURA

[1] Cholewicki T.: Układy drabinkowe zbieżne a równania różnicowe. Arch. Elektrot. z. 4, 1973.

[2] Cholewicki T.: Chebyshev polynomials of the second and first kind in the analysis of a cascade of identical two-ports. Arch. Elektrot. z.4, 1974.

[3] Koźniewska I.: Równania rekurencyjne, PWN, Warszawa 1972.

[4] Krejn S.G.: Analiza funkcjonalna, r. 1, PWN. Warszawa 1967.

[5] de Pian L.: Linear active network theory, Prentice-Hall, Inc., 1962, Englwood Cliffs, N.Y.

[6] Raisbeck G.: A Definition of Passive Linear Networks in Terms of Time and Energy, J. Applied Physics 25, 1510-1514 Dec. 1954.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВХОДНОГО ИМПЕДАНСА И ФУНКЦИИ ЦЕПИ ОДИНАКОВЫХ НЕОБРАТИМЫХ ЧЕТЫРЁХПОЛЮСНИКОВ ПУТЁМ РЕШЕНИЯ РЕКУРРЕНТНОГО УРАВНЕНИЯ БИЛИНЕЙНОГО ТИПА

Р е з ю м е

В статье определено входной импеданс цепи одинаковых необратимых четырёхполюсников путём решения нелинейного уравнения рекуррентного типа

$$z_{n+1} = \frac{a\,z_n + b}{c\,z_n + d}$$

названного билинейным, а затем обсуждено вопрос асимптотики его решения.

## CALCULATION OF THE DRIVING-POINT INMITTANCE AND TRANSMITTANCE OF THE CHAIN OF IDENTICAL, NONRECIPROCAL TWO-POLES BY THE METHOD OF SOLVING A BILINEAR TYPE OF A RECURRENTIAL EQUATION

S u m m a r y

In the article there was calculated the driving-point inmittance of the chain of identical, nonreciprocal two-poles by the method of solving a nonlinear recurrential equation of a bilinear type

$$z_{n+1} = \frac{a\,z_n + b}{c\,z_n + d}$$

Then the problem of solution asymptotics was discussed.

Przyjęto do druku w czerwcu 1978 r.