

Andrzej GONIEWICZ,  
Maciej SIWCZYŃSKI

#### ANALIZA WRAŻLIWOŚCI GENERATORÓW RC ZE SPRĘŻENIEM ZWROTNYM Z ZASTOSOWANIEM WIELOMIANÓW CHARAKTERYSTYCZNYCH

**Streszczenie.** W artykule przeprowadzono analizę wrażliwości wzbudzenia generatorów ze sprzężeniem zwrotnym na zmiany współczynnika wzmacniacza i redukcji pasożytniczych. Ze względu na ogólność rozważań i przydatność do analizy wrażliwości stosuje się opis czwórnika sprzężenia zwrotnego przy zastosowaniu wielomianów charakterystycznych.

#### 1. Wstęp

W syntezie generatorów ze sprzężeniem zwrotnym zagadnieniem podstawowym jest określenie częstotliwości drgań oraz warunków wzbudzenia. Zagadnienia te są powszechnie znane.

Niezmiernie ważne są jednak zagadnienia wrażliwości pewnych parametrów generatorów na zmiany innych, np. wpływ współczynnika wzmocnienia wzmacniacza generatora na częstotliwość drgań i tzw. zapas wzbudzenia.

Pierwszym przybliżeniem teorii generacji drgań jest teoria liniowa. Zakłada ona liniową charakterystykę przejścia wzmacniacza. Teoria ta pozwala określić warunki wzbudzenia i pierwsze przybliżenie częstotliwości drgań. Następnym przybliżeniem teorii generacji jest teoria nieliniowa, która zakłada nieliniową charakterystykę przejścia wzmacniacza. Pozwala ona na określenie amplitudy drgań oraz na obliczenie dalszych przybliżeń częstotliwości.

Mając powyższe na uwadze, do analizy wrażliwości zapasu wzbudzenia na zmiany parametrów wystarczającym aparatem matematycznym jest teoria liniowa. Natomiast analiza wrażliwości częstotliwości i amplitudy drgań wymaga stosowania teorii nieliniowej.

W niniejszym artykule ograniczamy się do teorii liniowej, kierując tym samym analizę wrażliwości na badania wpływu zmian parametrów na zapas wzbudzenia.

Ze względu na ogólność rozważań i przydatność do analizy wrażliwości stosuje się opis czwórnika sprzężenia zwrotnego przy zastosowaniu wielomianów charakterystycznych.

## 2. Warunki wzbudzenia

Warunkiem powstania drgań w generatorze prądu (napięcia) jest istnienie pierwiastków równania charakterystycznego w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Napięcie na zaciskach generatora spełnia równanie różniczkowe liniowe jednostkowe o postaci:

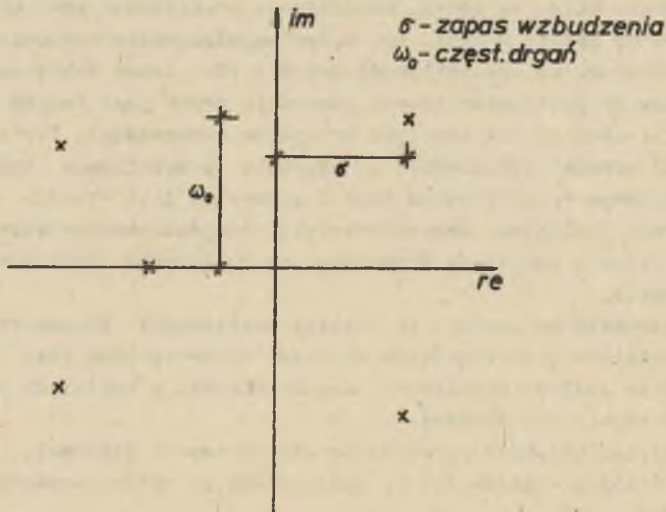
$$n_U(\hat{s})u = 0 \quad \hat{s} = d/dt.$$

Prąd płynący przez zaciski generatora spełnia równanie:

$$n_I(\hat{s})i = 0.$$

$n_U(\hat{s})$ ;  $n_I(\hat{s})$  - wielomiany charakterystyczne napięcia i prądu.

W związku z powyższym wielomian charakterystyczny  $n(s)$  generatora prądu (napięcia) musi posiadać dwa zera zespolone sprzężone, leżące w prawej półpłaszczyźnie w niewielkiej odległości od osi urojonej, (rys. 1).



Rys. 1

Wielkość  $\sigma$  - tzw. zapas wzbudzenia - określa odległość pierwiastka od osi urojonej, czyli jest to część rzeczywista tego pierwiastka.

Zapas wzbudzenia musi być wybrany kompromisowo ze względu na sprzeczne warunki jakie musi spełniać.

Przy założeniu  $\delta$  bardzo małego pierwiastki znajdują się prawie na osi urojonej, z czego wynika niebezpieczeństwo przesunięcia się ich w lewo, co powoduje zanik drgań.

Założenie  $\delta$  dużego usuwa niebezpieczeństwo zaniku drgań, ale ze względu na wzrost części rzeczywistej pierwiastka powoduje odkształcenie przebiegu (nałożenie się na harmoniczną podstawową wyższych harmonicznych).

Założmy, że wielomian charakterystyczny generatora ma postać:

$$n(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0.$$

Ponieważ  $s = \delta + j\omega$ , więc dla małego  $\delta$  mamy:

$$\begin{aligned} (\delta + j\omega)^n &= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \delta^{n-m} (j\omega)^m \approx \binom{n}{n-1} \delta (j\omega)^{n-1} + \\ &+ (j\omega)^n = (j\omega)^{n-1} (n\delta + j\omega). \end{aligned}$$

Jeśli  $s = \delta + j\omega$  jest zerem wielomianu  $n(s)$ , to:

$$n(\delta + j\omega) = 0,$$

czyli:

$$\begin{aligned} n(\delta + j\omega) &= \sum_{k=0}^n a_k (j\omega)^{k-1} (k\delta + j\omega) = \delta \sum_{k=0}^n k (j\omega)^{k-1} \cdot a_k + \\ &+ \sum_{k=0}^n a_k (j\omega)^k = \delta \frac{dn(j\omega)}{dj\omega} + n(j\omega) = 0. \end{aligned}$$

Rozbijając wielomian na część rzeczywistą i urojoną

$$n(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

$R(\omega)$  - część rzeczywista wielomianu  $n$ .

$X(\omega)$  - część urojona wielomianu  $n$ .

otrzymamy:

$$\begin{aligned} \sigma \frac{dn(j\omega)}{dj\omega} + n(j\omega) &= -j\sigma \frac{dn(j\omega)}{d\omega} + n(j\omega) = -j\sigma \left[ \frac{dR(\omega)}{d\omega} + j \frac{dX(\omega)}{d\omega} \right] + \\ &+ R(\omega) + jX(\omega) = (R(\omega) + \sigma \frac{dX(\omega)}{d\omega} + j \left[ X(\omega) - \sigma \frac{dR(\omega)}{d\omega} \right]) = 0, \end{aligned}$$

skąd część rzeczywista i urojona muszą być równe zero

$$R(\omega) + \sigma \frac{dX(\omega)}{d\omega} = 0, \quad (1)$$

$$X(\omega) - \sigma \frac{dR(\omega)}{d\omega} = 0.$$

Z równań (1) wynika częstotliwość drgań własnych  $\omega_0$  i warunek samowzbudzenia generatora.

$$R(\omega) + \sigma \frac{dX(\omega)}{d\omega} = 0 \implies \sigma = - \frac{R(\omega)}{\frac{dX(\omega)}{d\omega}} \quad (2)$$

$$X(\omega) - \sigma \frac{dR(\omega)}{d\omega} = 0 \implies \sigma = \frac{X(\omega)}{\frac{dR(\omega)}{d\omega}} \quad (3)$$

Warunki określone równaniami (1) są warunkami rzeczywistymi ( $\sigma \neq 0$ ). Warunki idealne miałyby postać następującą:

$$\begin{aligned} R(\omega) &= 0 \\ X(\omega) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Warunki idealne dotyczą przypadku, gdy pierwiastki wielomianu charakterystycznego generatora leżą na osi urojonej ( $\sigma = 0$ ).

Uwzględniając powyższe, częstotliwość drgań  $\omega_0$  generatora określamy z warunków idealnych, natomiast warunek samowzbudzenia - z warunków rzeczywistych.

Współczynnik wzmocnienia  $k$  wzmacniacza zawiera się w wielomianie charakterystycznym, przy czym można wyróżnić trzy następujące warianty:

- 1  $R(\omega)$  nie zawiera  $k$ ,
- 2  $X(\omega)$  nie zawiera  $k$ ,
- 3  $R(\omega)$  i  $X(\omega)$  zawierają  $k$ .

ad. 1 Jeśli część rzeczywista wielomianu  $R(\omega)$  nie zawiera współczynnika wzmocnienia  $k$ , to częstotliwość drgań  $\omega_0$  określamy z warunków idealnych:

$$R(\omega_0) = 0,$$

natomiast zapas wzbudzenia określa się z warunków rzeczywistych:  $\sigma$  (jak widać na rys. 1) musi być małe i dodatnie, z równania (3)

$$\sigma = \frac{x(\omega_0)}{\left(\frac{dR(\omega)}{d\omega}\right)_{\omega_0}} > 0, \quad \text{czyli} \quad x(\omega_0) \left(\frac{dR(\omega)}{d\omega}\right)_{\omega_0} > 0.$$

ad. 2 Częstotliwość drgań  $\omega_0$ ;

$$x(\omega_0) = 0$$

warunek samowzbudzenia

$$\sigma = - \frac{R(\omega_0)}{\left(\frac{dX(\omega)}{d\omega}\right)_{\omega_0}} > 0,$$

czyli

$$R(\omega_0) \left(\frac{dX(\omega)}{d\omega}\right)_{\omega_0} < 0.$$

ad. 3

$$R(\omega, k) = 0$$

$$X(\omega, k) = 0$$

Z tych dwóch równań należy wyrugować  $k$  i obliczyć częstotliwość drgań  $\omega$ . Natomiast warunek samowzbudzenia określamy z jednej z poniższych nierówności:

$$\sigma = - \frac{R(\omega_0, k)}{\left(\frac{dX(\omega, k)}{d\omega}\right)_{\omega_0}} > 0 \quad \text{lub} \quad \sigma = \frac{X(\omega_0, k)}{\left(\frac{dR(\omega, k)}{d\omega}\right)} > 0$$

### 3. Podstawowe struktury generatorów RC ze sprzężeniem zwrotnym

W zależności od typu wzmacniacza rozróżniamy cztery rodzaje generatorów (rys. 2).

Przyjmijmy, że wzmacniacz odwraca fazę

$$f(x) = -k x,$$

ponieważ

$$[a] = \frac{1}{Q(s)} \begin{bmatrix} n^{z0}(s) & n^{zZ}(s) \\ n^{o0}(s) & n^{oZ}(s) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$n^{**}$  - wielomiany charakterystyczne czwornika sprzężenia zwrotnego.

więc wielomiany charakterystyczne dla poszczególnych rodzajów generatorów mają postać:

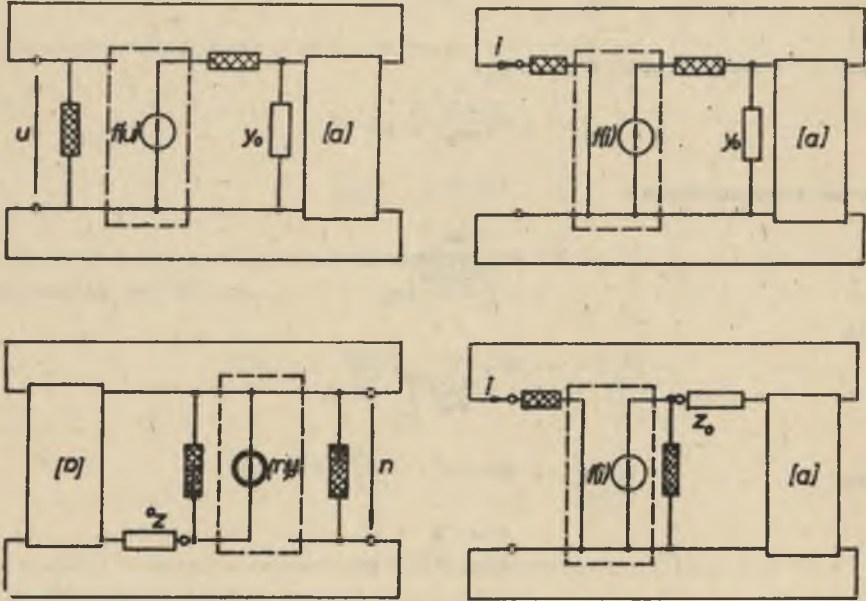
$$\text{rys. 2a} \quad n^{zo}(s) + k Q(s)$$

$$\text{rys. 2b} \quad n^{zz}(s) + k Q(s)$$



$$\text{rys. 2c} \quad n^{oo}(s) + k Q(s)$$

$$\text{rys. 2d} \quad n^{oz}(s) + k Q(s)$$

(6)



Rys. 2

Symbole   oznaczają małe reduktancje pasożytnicze, [a] - czwórnik sprzężenia zwrotnego

Łatwo się przekonać, że obciążenie generatora nie ma wpływu na te wielomiany dotąd, dopóki źródła sterowane wzmacniaczy są idealne. Ze względów praktycznych poczynimy pewne założenia upraszczające, dotyczące czwórników sprzężenia zwrotnego, a mianowicie

- czwórniki posiadają strukturę drabinkową RC,
- posiadają one wyłącznie pojemności z uziemioną wspólną okładką.

Z założeń tych wynika, że wielomian  $Q(s)$  w równaniach (5), (6) jest równy jedności.

W związku z tym przy określaniu częstotliwości drgań i warunku wzbudzenia korzysta się z wariantu 2.

Wielomian  $n(s)$  można rozłożyć na części: parzystą i nieparzystą:

$$n(s) = n_1(s^2) + s n_2(s^2),$$

stąd:

$$n(j\omega) = n_1(-\omega^2) + j\omega n_2(-\omega^2).$$

Jak widać:

$$R(\omega) = n_1(-\omega^2), \quad X(\omega) = \omega n_2(-\omega^2).$$

Korzystając z wariantu 2 wyznaczamy częstotliwość drgań  $\omega_0$  z równania

$$n_2(-\omega^2) = 0 \quad (7)$$

a zapas wzbudzenia:

$$\sigma = - \frac{R(\omega_0)}{\left(\frac{dX(\omega)}{d\omega}\right)_{\omega_0}} = - \frac{n_1(-\omega_0^2)}{\left(\frac{d}{d\omega} \omega n_2(-\omega^2)\right)_{\omega_0}} = \frac{n_1(y)}{n_2(y) + 2y \frac{dn_2(y)}{dy}} > 0, \quad (8)$$

gdzie

$$y = -\omega_0^2.$$

Dla zaistnienia generacji wystarczy wielomian charakterystyczny  $n(s)$  trzeciego stopnia:

$$n(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 + k,$$

wówczas:

$$n_1(y) = a_2 y + a_0 + k$$

$$n_2(y) = a_3 y + a_1$$

Z równania (7) wyznaczamy częstotliwość drgań:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{a_1}{a_3}},$$

a z wyrażenia (8) zapas wzbudzenia:

$$\sigma = - \frac{a_2 y + a_0 + k}{a_3 y + a_1 + 2y a_3} = \frac{-a_1 a_2 + a_0 a_3 + k a_3}{2a_1 a_3} > 0. \quad (9)$$

Z ostatniej nierówności określamy wartość wzmocnienia  $k$  potrzebną dla zapewnienia warunku wzbudzenia

$$k > \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_3}$$

#### 4. Analiza wrażliwości

Ze względów praktycznych celowe jest analizowanie następujących wrażliwości:

- $S_k^{\sigma}$  zapasu wzbudzenia na zmiany współczynnika wzmocnienia wzmacniacza,
- $S_{a,r}^{\sigma}$  zapasu wzbudzenia na zmiany reduktancji pasożytniczych patrz rys. 2) i na zmiany obciążenia,
- zapasu wzbudzenia na zmiany parametrów RC czwórnika sprzężenia zwrotnego,
- częstotliwości drgań na zmiany parametrów czwórnika sprzężenia zwrotnego, reduktancji pasożytniczych i obciążenia,
- częstotliwości drgań na zmiany punktu pracy wzmacniacza.

Analiza wrażliwości określonych w punktach a, b, c jest stosunkowo prosta, bowiem do ich obliczania wystarczy teoria liniowa. Natomiast przypadki d, e wymagają zastosowania teorii nieliniowej, gdyż częstotliwość zależy od zawartości wyższych harmonicznych generowanego przebiegu. W związku z tym ograniczymy się do rozpatrywania przypadków a i b.

Wrażliwość zapasu wzbudzenia  $\sigma$  na zmiany współczynnika wzmocnienia  $k$  obliczamy na podstawie wyrażenia (9):

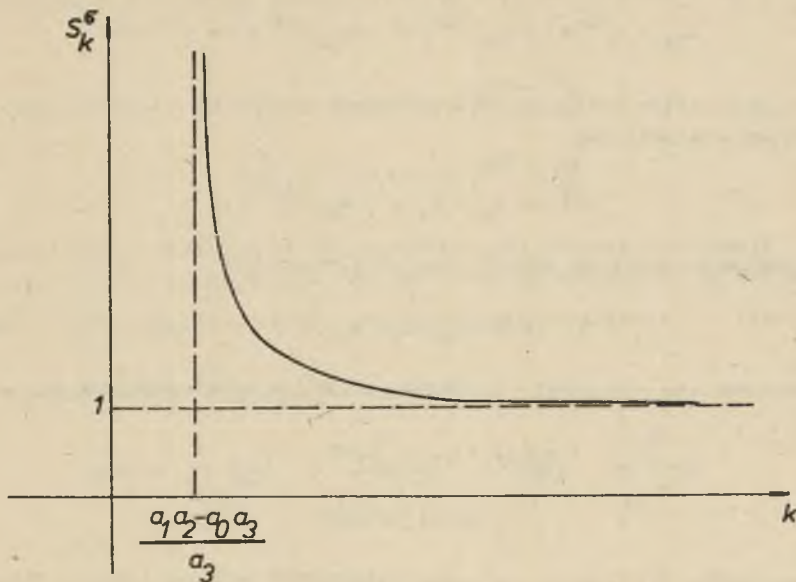
$$S_k^{\sigma} = \frac{d\sigma}{dk} \frac{k}{\sigma} = \frac{k}{k - \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_3}} \quad (10)$$

Graficzna interpretacja relacji (10) widoczna jest na rys. 3. Z rysunku tego wynika, że minimalizacja wrażliwości  $S_k^{\sigma}$  wymaga jak największej wartości współczynnika wzmocnienia. Należy jednak zastrzec, że wzór (10) jest dostatecznie dokładny przy niezbyt dużym  $k$ , co wynika z założeń postawionych w paragrafie 2.

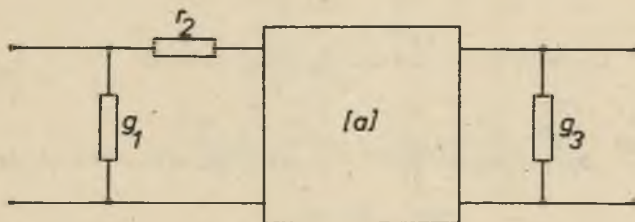
Jednocześnie należy podkreślić, że wzrost  $k$  powoduje zwiększenie zawartości wyższych harmonicznych w generowanym przebiegu. Dlatego też dokładna analiza i optymalizacja powyższej wrażliwości wymagałaby zastosowania metod nieliniowych.

Rozpatrzmy obecnie wrażliwość  $\sigma$  na zmiany reduktancji pasożytniczych. Weźmiemy pod uwagę generator ze wzmacniaczem prądowym sterowanym napięciowo (rys. 2c). Odpowiedni czwórnik sprzężenia zwrotnego uzupełniony byłymi reduktancjami pasożytniczymi i obciążenia pokazano na rys. 4.





Rys. 3



Rys. 4

Macierz łańcuchowa czwórnik uzupełnionego ma postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n^{zo} & n^{zz} \\ n^{oo} & n^{oz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g_3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} n^{zo} + r_2 n^{oo} + g_3 (n^{zz} + r_2 n^{oz}); & n^{zz} + r_2 n^{oz} \\ g_1 n^{zo} + n^{oo} (g_1 r_2 + 1) + g_3 (g_1 n^{zz} + n^{oz} (1 + g_1 r_2)); & g_1 n^{zz} + n^{oz} (1 + g_1 r_2) \end{bmatrix}$$

W związku z wyborem struktury generatora bierzemy pod uwagę tylko element  $a_{21}$  tej macierzy. Zaniedbując iloczyny reduktancji jako małe w porównaniu z pozostałymi wyrazami otrzymujemy:

$$a_{21} = n^{00}(s) + g_1 n^{z0}(s) + g_3 n^{0z}(s) = n^{00'}(s) \quad (11)$$

$n^{00'}(s)$  jest wielomianem charakterystycznym czwórnika uzupełnionego.  
Każdemu wielomianowi

$$n(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$$

jednoznacznie odpowiada wektor jego współczynników

$$\bar{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots).$$

Niestrudno się przekonać, że zachodzą następujące odpowiedniości:

$$n_1(s) + n_2(s) \leftrightarrow \bar{a}_1 + \bar{a}_2$$

$$\sigma n(s) \leftrightarrow \sigma \bar{a}$$

Z wyrażenia (9) wynika, że zapas wzbudzenia  $\sigma$  jest funkcją skalarną argumentu wektorowego

$$\sigma = \sigma(\bar{a}^{00}) = \frac{ka_3^{00} + a_0^{00} a_3^{00} - a_1^{00} a_2^{00}}{2a_1^{00} a_3^{00}} \quad (12)$$

Jednocześnie  $\bar{a}^{00'}$  jest funkcją wektorową pewnego argumentu skalarnego  $\xi$ :

$$\bar{a}^{00'} = \bar{a}^{00'}(\xi)$$

Wrażliwość  $\sigma$  na zmiany  $\xi$  określa wzór:

$$\frac{d\sigma}{d\xi} = \langle \text{grad} \sigma, \frac{d\bar{a}^{00'}}{d\xi} \rangle \quad (13)$$

Ze wzoru (11) wynika, że

$$\bar{a}^{00'} = \bar{a}^{00} + g_1 \bar{a}^{z0} + g_3 \bar{a}^{0z}$$

a stąd mamy:

$$\frac{d\bar{a}^{00'}}{dg_1} = \bar{a}^{z0} \quad \text{oraz} \quad \frac{d\bar{a}^{00'}}{dg_3} = \bar{a}^{0z}$$

Podstawiając w miejsce  $\xi$  reduktancje  $g_1$  i  $g_3$  z wyrażenia (12) otrzymujemy:

$$S_{g_1}^{\delta} = \langle \text{grad} \delta, \bar{a}^{zo} \rangle \frac{g_1}{\delta} \tag{14}$$

$$S_{g_3}^{\delta} = \langle \text{grad} \delta, \bar{a}^{oz} \rangle \frac{g_3}{\delta} \tag{15}$$

Minimalizacja wrażliwości  $S_{g_1}^{\delta}$  sprowadza się do ortogonalizacji wektorów  $\text{grad} \delta$ ,  $\bar{a}^{zo}$  i analogicznie  $S_{g_3}^{\delta}$  dla  $S_{g_3}^{\delta}$ . Ortogonalizację tę można przeprowadzić dobierając odpowiednio współczynnik wzmocnienia  $k$  (patrz wzór (12)).

Obliczając gradient funkcji (12) otrzymamy:

$$\text{grad} \delta = \left( \frac{1}{2a_{100}^{\delta}}; -\frac{k+a_{00}^{\delta}}{2(a_{100}^{\delta})^2}; -\frac{1}{2a_{300}^{\delta}}; \frac{a_{200}^{\delta}}{2(a_{300}^{\delta})^2} \right)$$

Rozwiązując względem  $k$  równanie:

$$\langle \text{grad} \delta, \bar{a}^{zo} \rangle = 0$$

otrzymamy

$$k = \frac{2(a_{100}^{\delta})^2}{a_{100}^{\delta}} \left( \frac{a_{00}^{\delta}}{2a_{100}^{\delta}} - \frac{a_{200}^{\delta}}{2a_{300}^{\delta}} + \frac{a_{300}^{\delta} a_{200}^{\delta}}{2(a_{300}^{\delta})^2} \right) - a_{00}^{\delta}$$

LITERATURA

- [1] Goniewicz A.: O stabilności konwerterów impedancji ujemnej NIC. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 54, Gliwice 1976.
- [2] De Pian L.: Linear. Active Network Theory Prentice-Hall, Inc 1962.
- [3] Matthaei G.L.: Some Simplifications for Analysis of Linear Circuits. Trans. IRE V.CT-4, No 3, 1957.
- [4] Siwczyński M.: Synchronizacja złożonych, słabo sprzęgniętych układów samowzbudnych. Archiwum Elektrotechniki Tom XXIII, z. 4, 1974.

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ RC ГЕНЕРАТОРОВ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ  
С ПРИМЕНЕНИЕМ ЗАДАНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

Р е з ю м е

В статье рассматривается анализ чувствительности возбуждения генераторов с обратной связью на изменение коэффициента усилителя и паразитных редуктансов. Из-за обобщённости решений и пригодности для анализа чувствительности применяется описание четырёхпольника обратной связи при применении характеристических многочленов.

APPLICATION OF CHARACTERISTIC POLYNOMIALS TO SENSITIVITY ANALYSIS  
OF RC GENERATOR WITH FEEDBACK

S u m m a r y

In the article the sensitivity of margin excitation of feedback-generators on the changes of gain factor and parasitic reductances is analyzed. Generality of studies and applicability for sensitivity analysis implies an introduction of characteristic polynomials of feedback two-port.

Przyjęto do druku w czerwcu 1978 r.