ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: ELEKTRYKA z. 64 Nr kol. 593

Jan ULMAN

WYKORZYSTANIE ROZWINIĘĆ ASYMPTOTYCZNYCH PRZY OBLICZANIU WARTOŚCI FUNKCJI BESSELA I ORAZ II RODZAJU DLA ARGUMENTÓW ZESPOLONYCH O $|z| \geqslant 10$ I DOWOLNYM RZĘDZIE ν

Streszczenie. W artykule przedstawiono procedurę obliczania na maszynie cyfrowej wartości dowolnych funkcji Bessela dla argumentów o $|z| \geqslant 10$ i o dowolnym rzędzie ν z wykorzystaniem rozwinięć asymptotycznych funkcji Hankela.

1. Wstęp

Szczegółowa analiza wzorów przedstawiajacych dowolne funkcje Bessela nakazuje konstruować algorytm dla dwóch przedziałów argumentu 1) $|z|<10$, 2) $|z| \geqslant 10$.

Dla pierwszego przypadku należy wykorzystać klasyczne podejście związane z aproksymacją funkcji, natomiast dla przypadku drugiego - rozwinięcia asymptotyczne funkcji. W niniejszym opracowaniu ograniczono się tylko do przypadku drugiego. Szczegóły związane z optymalizacją błędu jak też ilością wykonywanych działań przez MC można w dużej mierze odczytać z przedstawionej procedury.

Procedura umożliwia obliczanie wartości funkcji z błędem względnym nie przekraczającym 10^{-8}. Czas obliczeń wynosi ułamek sekundy. Algorytm obliczenia wartości funkcji Bessela może być wykorzystywany we wszystkich praktycznych zastosowaniach ww. funkcji, które między innymi obejmują zagadnienia numerycznych obliczeń w teorii pola elektromagnetycznego oraz mechaniki stosowanej.

2. Definicja rozwinięcia asymptotycznego

Szereg rozbieżny $A_0 + A_1/z + A_2/z^2 + \ldots + A_n/z^n + \ldots$ o sumie częściowej $S_n(z)$ dla pierwszych $n+1$ wyrazów nazywamy rozwinięciem asymptotycznym funkcji $f(z)$ dla dowolnego przedziału arg z, jeżeli wyrażenie $R_n(z) = z^n\left[f(z) - S_n(z)\right]$ spełnia warunek $\lim\limits_{|z|\to\infty} R_n(z) = 0$ (przy ustalonym n), choć może przy tym być $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n(z)| = \infty$ (przy ustalonym z).

3. Wykorzystanie rozwinięć asymptotycznych funkcji Hankela

Punkt wyjścia stanowią rozwinięcia asymptotyczne funkcji Hankela. Sposób uzyskania tych rozwinięć można znaleźć w pracy [2]:

$$H_\nu^{(1),(2)}(z) = \frac{e^{\mp r\sin\theta}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi r}}\, e^{\pm i\left[r\cos\theta \mp \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}(2\nu+1)\pi\right]}\left[a(z) \pm b(z)\right]$$

gdzie górne znaki odnoszą się do $H_\nu^{(1)}(z)$, dolne do $H_\nu^{(2)}(z)$, $z = r\,e^{i\theta}$, przy czym $\theta \in [-0,5\pi, +0,5\pi]$, $|z| \gg \nu^2$

$$a(z) \approx 1 - \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!(8z)^2} + \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)(4\nu^2-5^1)(4\nu^2-7^2)}{4!(8z)^4} + \ldots + R_p$$

$$b(z) \approx \frac{4\nu^2-1^2}{1!(8z)} - \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)(4\nu^2-5^2)}{3!(8z)^3} + \ldots + R_s,$$

gdzie R_p i R_s są resztami, gdy bierze się odpowiednio p i s wyrazów w szeregach $a(z)$ i $b(z)$.

Z określenia funkcji Hankela wynika że:

$$J_\nu(z) = 0,5\left[H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)\right]; \quad Y_\nu(z) = -0,5\,i\left[H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)\right].$$

Pozostałe funkcje zmodyfikowane wyrażają się również poprzez obliczone wcześniej wartości funkcji pierwszego rodzaju:

$$I_\nu(z) = i^{-\nu}J_\nu(iz); \quad K_\nu(z) = 0,5\pi e^{(\nu+1)0,5\pi i}\, H_\nu^{(1)}(iz)$$

4. Przypadek gdy θ leży na zewnątrz przedziału $[-0,5\pi; 0,5\pi]$

Przypuśćmy, że $z = x - iy$, gdzie $x, y > 0$. Załóżmy, że trzeba znaleźć wartość pewnej funkcji $A(-z)$, gdy z leży w IV ćwiartce, a $(-z)$ w II ćwiartce. Zatem, jeżeli $z = r\,e^{i\theta}$, to $-z = r\,e^{i(\theta+\pi)} = z\,e^{i\pi}$. Wobec tego $A(-z) = A(z\,e^{i\pi})$. Gdy z leży w III ćwiartce, wówczas $-z = ze^{i\pi}$ leży w I ćwiartce. Jeśli natomiast z leży w I ćwiartce lub II, wówczas $-z = r\,e^{i(\theta-\pi)} = z\,e^{-i\pi}$. Korzystając ze wzorów definicyjnych na funkcje Bessela nie trudno pokazać, że:

$$J_\nu(-z) = e^{i\nu\pi}J_\nu(z); \quad Y_\nu(-z) = 2\,i\cos(\nu\pi)\;J_\nu(z) + e^{-i\nu\pi}Y_\nu(z)$$

dla $\theta \in (-\pi, 0]$ oraz:

$$J_\nu(z) = e^{-i\nu\pi} J_\nu(z); \quad Y_\nu(-z) = e^{i\nu\pi} Y_\nu(z) - 2\, i \cos(\nu\pi) \, . \, J_\nu(z)$$

dla $\theta \in (0, \pi]$.

Stąd wynikają związki niezwykle przydatne w obliczeniach numerycznych:

$$H_\nu^{(1)}(-z) = J_\nu(-z) + i\, Y_\nu(-z) = e^{i\nu\pi} J_\nu(z) - (e^{i\nu\pi} + e^{-i\nu\pi}) J_\nu(z) +$$

$$+ i\, e^{-i\nu\pi} Y_\nu(z) = -e^{-i\nu\pi} H_\nu^{(2)}(z) \quad \text{dla} \quad \theta \in (-\pi, 0]$$

Analogicznie pokazuje się, że

$$H_\nu^{(2)}(-z) = -e^{i\nu\pi} H_\nu^{(1)}(z)$$

Przedstawione wzory stanowią uogólnienie rozwinięć na przedział $\theta \in (-\pi, \pi)$

5. Warunek $|z| \gg \nu^2$

Warunek słuszności rozwinięć asymptotycznych: $|z| \gg \nu^2$ przestaje stanowić ograniczenie wówczas, gdy wykorzystamy związki rekurencyjne dla funkcji Bessela. Ponieważ podstawę do obliczeń stanowią funkcje Hankela, wystarcza więc stosować jedynie związki:

$$H_{\nu+1}^{(k)}(z) = \frac{2\nu}{z} H_\nu^{(k)}(z) - H_{\nu-1}^{(k)}(z) \qquad k = 1,2.$$

Można w ten sposób dokonać sztucznego obniżenia rzędu tak, żeby $|\nu_0|$ i $|\nu_1| \in [0, 2)$, a następnie po przeprowadzeniu obliczeń dokonać podwyższenia rzędu do początkowej wartości. Metodę tę zastosowano przy konstrukcji algorytmu.

6. Dobór ilości wyrazów szeregu asymptotycznego funkcji Hankela

Zachowując warunki słuszności rozwinięć asymptotycznych zauważamy, że początkowo każdy wyraz szeregu a(z) jest mniejszy co do wartości bezwzględnej od wyrazu poprzedniego. Jednak poczynając od pewnego miejsca, każdy wyraz będzie większy co do wartości bezwzględnej od wyrazu poprzedniego, gdyż a(z) jako szereg nieskończony jest rozbieżny dla wszystkich wartości z i pewien wyraz jest najmniejszy. Widać to z ilorazu:

$$\frac{a_{p+1}}{a_p} = \frac{\left[4\vartheta^2 - (4p-3)^2\right]\left[4\vartheta^2 - (4p-1)^2\right]}{(2p-1)2p(8z)^2}$$

Stąd wynika dla $p \gg \vartheta$ oraz $p \gg 1$

$$\frac{a_{p+1}}{a_p} \approx \frac{256(p-1)^2 p^2}{256 p^2 z^2} = \frac{(p-1)^2}{z^2}$$

Wobec tego wyrez najmniejszy występuje w przybliżeniu dla $(p-1)^2 = |z|^2$ albo $p = 1 + |z|$. Jeśli będziemy uwzględniać w obliczeniach wyrazy następujące po wyrazie najmniejszym, to błąd będzie wzrastał. Zachowując więc tylko wyrazy do wyrazu najmniejszego łatwo zauważyć, że obliczymy wartość $a(z)$ z błędem nie przekraczającym następnego wyrazu. Oznaczając przez $R(z,\vartheta)$ wspomniany błąd otrzymujemy:

$$\max_{\substack{|z| \geq 10 \\ |\vartheta| \in [0,2)}} (R(z,\vartheta) = \max_{\substack{|z| \geq 10 \\ |\vartheta| \in [0,2)}} \frac{\left|(4\vartheta^2-1^2)(4\vartheta^2-3^2)\ldots\left[4\vartheta^2 - (4p-5)^2\right]\right|}{(2p-2)!(8z)^{2p-2}}$$

$$\leq \max_{|\vartheta| \in [0,2)} \frac{\left|(4\vartheta^2-1^2)\ldots\left[4\vartheta^2-(4p-5)^2\right]\right|}{(2p-2)!(8.10)^{2p-2}}$$

Ponieważ $|z| = 10$ to $p = 1 + |z| = 11$

$$\max_{\substack{|z| \geq 10 \\ |\vartheta| \in [0,2)}} (R(z,\vartheta) = \max_{|\vartheta| \in [0,2)} \frac{\left|(4\vartheta^2-1^2)\ldots(4\vartheta^2-39^2)\right|}{20!(8.10)^{20}} < \frac{39^2.37^2\ldots 9^2}{20!(8.10)^{20}} \approx 10^{-10}$$

Analogiczną dyskusję można przeprowadzić dla wyrażenia $b(z)$.

7. Opis procedury AspBessel

procedure AspBessel (n,mi,x,y,rh1,ih1,rh2,ih2);

Procedura ta dokonuje obniżenia rzędu funkcji Bessela do przedziału $[0,2)$ w taki sposób, ażeby $|\vartheta_0|$ i $|\vartheta_1| \in [0,2)$. Następnie po obliczeniu wartości funkcji Bessela przez procedurę Mc Bessel ponownie podwyższa rząd funkcji przy użyciu związków rekurencyjnych.

Znaczenie parametrów formalnych:

n - rodzaj obliczanej funkcji Bessela,
 n = 1 oznacza obliczanie $J_\vartheta(z)$,
 n = 2 " " $Y_\vartheta(z)$,
 n = 3 " " $H_\vartheta^{(1)}(z)$ oraz $H_\vartheta^{(2)}(z)$.

n = 4 oznacza obliczanie $I_\nu(z)$,
n = 5 " " $K_\nu(z)$,

mi - rząd funkcji Bessela,
x - Re(z),
y - Jm(z),
z - argument funkcji Bessela,
rh1- część rzeczywista obliczonej funkcji J_ν lub Y_ν, lub $H_\nu^{(1)}$, lub I_ν, lub K_ν,
ih1- część urojona ww. funkcji,
rh2- część rzeczywista obliczonej funkcji $H_\nu^{(z)}$,
ih2- część urojona obliczonej funkcji $H_\nu^{(z)}$.

Czas obliczeń na MC ODRA 1204 wartości funkcji wynosi ułamek sekundy, błąd względny jest nie gorszy niż 10^{-8}.

```
procedure AspBessel(n,mi,x,y,rh1,ih1,rh2,ih2);
 value n,mi,x,y;
 real mi,x,y,rh1,rh2,ih1,ih2;
 integer n;
 begin
  procedure MultC(Ra,Ia,Rb,Ib,Rc,Ic);
   value Ra, Ia,Rb,Ib;
   real Ra,Ia,Rb,Ib,Rc,Ic;
   begin
    Rc:=Ra*Rb-Ia*Ib;
    Ic:=Ra*Ib+Ia*Rb
   end MultC;
  procedure SumC(RA,IA,RB,IB,RC,IC);
   real RA,IA,RB,IB,RC,IC;
   begin
    RC:=RA+RB;
    IC:=IA+IB
   end SumC;
  procedure McBessel(n1,ni,x,y,rH1,iH1,rH2,iH2);
   real ni,x,y,rH1,iH1,rH2;iH2;
   integer n1;
   begin
    real a4,pi,x2,y2,fi,a,u,v,b2,a2,b5,a5,rId,iId,rY,iY;
    array t1,t2,t3[0:11];
    Boolean cw2,cw3,niec;
    integer p,p41,p43,p2;
    procedure pdw(rz,iz,r,i);
     real rz,iz,r,i;
     begin
      r:=rz;
      i:=iz;
     end pdw;
    procedure polcv(n0,a1,rx,ix,rv,iv);
     value n0,rx,ix;
     integer n0;
     real rx,ix,rv,iv;
     array a1;
     begin
      integer k;
      real p,q,r;
      rv:=a1[0];
      iv:=0;
      if ix≠0
```

```
        then
         begin
          p:=rx+rx;
          q:=rx*rx+ix*ix;
          for k:=1 step 1 until n0 do
           begin
            r:=rv+iv p;
            rv:=a1[k]-iv*q;
            iv:=r
           end k;
          rv:=rv+iv*rx;
          iv:=iv*ix
         end ix≠0
        else
         for k:=1 step 1 until n0 do
          rv:=rv*rx+a1[k]
      end polcv;
     procedure transf(x1,y1,psi);
      value x1,y1;
      real x1,y1,psi;
      begin
       real pspi;
       pspi:=3.141592654;
       if x1=0
        then
         begin
          if y1>0
           then psi:=pspi*0.5
           else
            if y1<0
             then psi:=-pspi*0.5
             else psi:=0
         end
        else
         begin
          psi:=arctan(y1/x1);
          if x1<0
           then
            begin
             if y1<0
              then psi=-pspi+psi
              else
               if y1>0
                then psi:=pspi+psi
                else psi:=pspi
            end
         end
      end;
     pi:=3.1415926536;
     if n1<4
      then
       begin
        x2:=x;
        y2:=y;
       end
      else
       if n1=5
        then
         begin
          x2:=-y;
          y2:=x
         end
```

```
        else
         begin
          transf(x,y,fi);
          if fi≤.5*pi∧fi>-pi
           then
            begin
             x2:=-y;
             y2:=x
            end
           else
            begin
             x2:=y;
             y2:=-x
            end
         end;
   cw2:=x2<0∧y2>0;
   niec:=abs(ni-entier(ni))>10-11;
   cw3:=x2<0∧y2<0;
   transf(x2,y2,fi);
   if ¬ niec∧ni<0
    then a:=-ni
    else a:=ni;
   if cw2
    then
     begin
      x2:=-x2;
      y2:=-y2;
      fi:=fi-pi
     end;
    if cw3
     then
      begin
       x2:=-x2;
       y2:=-y2;
       fi:=fi+pi
      end;
    t3[0]:=1.0;
    for p=1 step 1 until 11 do
     begin
      a4:=4.0*a*a;
      p43:=4*p-3;
      p41:=p43+2;
      p2:=2*p;
      t3[p]:=-t3[p-1]*(a4-p43*p43)*(a4-p41*p41)/((p2-1)*p2
             64)

     end;
    for p:=0 step 1 until 11 do
     t1[p]:=t3[11-p];
    u:=x2*x2-y2*y2;
    v:=2.0*x2*y2;
    b2:=u*u+v*v;
    polcv(11,t1,u/b2,-v/b2,a2,a5);
    t3[0]:=a4-1.0;
    for p:=1 step 1 until 11 do
     begin
      p41:=4*p-1;
      p43:=p41+2;
      p2:=2*p;
      t3[p]:=-t3[p-1]*(a4-p41*p41)*(a4-p43*p43)/(p2*(p2+1)
             *64)
```

```
    end;
   for p:=0 step 1 until 11 do
    t2[p]:=t3[11-p];
   polcv(11,t2,u/b2,-v/b2,b2,b5);
   u:=x2*x2+y2*y2;
   MultC(b2.b5,x2/(8.0*u),-y2/(8.0*u),b2,b5);
   u:=sqrt(u);
   SumC(a2,a5,-b5,b2,rH1,iH1);
   v:=u*cos(fi)-.5*fi-.25*(2.0*a+1.0)*pi;
   MultC(cos(v),sin(v),rH1,iH1,rH1,iH1);
   MultC(rH1,iH1,exp(-u*sin(fi))/sqrt(.5*u*pi),.0,rH1,
          iH1);
   SumC(a2,a5,b5,-b2,rH2,iH2);
   v:=v+fi;
   MultC(cos(v),-sin(v),rH2,iH2,rH2,iH2);
   MultC(rH2,iH2,exp(u*sin(fi))/sqrt(.5 u pi),.0,rH2,iH2);
   if ¬niec∧ni<0
    then a4:=-ni
    else a4:=ni;
   a4:=a4*pi;
   if cw2
    then
    begin
     real a,b;
     a:=rH1;
     b:=iH1;
     MultC(rH2,iH2,-cos(a4),sin(a4),rH1,iH1);
     MultC(a,b,cos(a4),sin(a4),a,b);
     MultC(2.0*cos(a4),.0,rH2,iH2,rH2,iH2);
     SumC(rH2,iH2,a,b,rH2,iH2)
    end cw2;
  if cw3
   then
    begin
     real a,b;
     a:=rH2;
     b:=iH2;
     MultC(rH1,iH1,-cos(a4),-sin(a4),rH2,iH2);
     SumC(rH1,iH1,a,b,rId,iId);
     MultC(rId,iId,.5,.0,rId,iId);
     MultC(2.0*cos(a4),-2.0*sin(a4),rId,iId,a,b);
     MultC(rH1,iH1,cos(a4),sin(a4),rH1,iH1);
     SumC(a,b,rH1,iH1,rH1,iH1);
    end cw3;
  if ni=3
   then go to koniec1;
  SumC(rH1,iH1,rH2,iH2,rId,iId);
                                               MultC(.5,.0,rId,iId,rId,iId);
  if ni=1
   then pdw(rId,iId,rH1,iH1);
  if ni=2
    then
     begin
      SumC(rH1,iH1,-rH2,-iH2,rY,iY);
      MultC(.0,-.5,rY,iY,rY,iY);
      pdw(rY,iY,rH1,iH1);
      end;
  if ni=4
   then
    begin
     transf(x,y,fi);
     if fi>.5*pi∧fi<pi
      then a4:=ni
      else a4:=-ni;
     a4:=a4*pi*.5;
     MultC(cos(a4),sin(a4),rId,iId,rY,iY);
     pdw(rY,iY,rH1,iH1);
    end;
```

```
 if n1=5
  then
   begin
    a4:=.5*pi*(a+1);
    MultC(cos(a4),sin(a4),rH1,iH1,rY,iY);
    MultC(.5*pi,.0,rY,rY,iY);
    pdw(rY,iY,rH1,iH1)
   end;
koniec1:
 if n1≠3
  then
   begin
    if x>0∧y=0
     then iH1:=.0
   end
 end McBessel;
 array RB[0:1],IB[0:1], RH[0:1], IH[0:1];
 real e,ni,c,d,u,i;
 integer a;
 if mi<0∧abs(mi-entier(mi))<₁₀-11
  then ni:=-mi
  else ni:=mi;
 if abs(ni)<2.0
  then
   begin
    McBessel(n,ni,x,y,rh1,ih1,rh2,ih2);
    go to et
   end;
 u:=x*x+y*y;
 a:=entier(ni);
 if ni>0
  then
   begin
    e:=ni-a;
    McBessel(n,e,x,y,RB[0],IB[0],RH[0],IH[0]);
    McBessel(n,e+1,x,y,RB[1],IB[1],RH[1],IH[1]);
    for i:=e+1 step 1.0 until ni-0.9999 do
     begin
      real c1,d1;
      MultC(x/u,-y/u,2.0*i,.0,c,d);
      c1:=c;
      d1:=d;
      MultC(c,d,RB[1],IB[1],c,d);
      if n≠5
       then SumC(c,d,-RB[0],-IB[0],rh1,ih1);
      if n=5
       then SumC(c,d,RB[0],IB[0],rh1,ih1);
      if n=4
       then
        begin
         rh1:=-rh1;
         ih1:=-ih1
        end;
      RB[0]:=RB[1];
      IB[0]:= IB[1];
      RB[1]:=rh1;
      IB[1]:=ih1;
      if n=3
       then
        begin
         MultC(c1,d1,RH[1],IH[1],c1,d1);
         SumC(c1,d1,-RH[0],-IH[0],rh2,ih2);
         RH[0]:=RH[1];
         IH[0]:=IH[1];
         RH[1]:=-rh2;
         IH[1]:=ih2
        end n=3
     end i
   end ni>0
```

```
  else
   begin
    e:=e-ni;
    McBessel(n,e,x,y,RB[0],IB[0],RH[0],IH[0]);
    Mc Bessel(n,e-1.0,x,y,RB[1],IB[1],RH[1],IH[1]);
    for i:=e-1.0 step -1.0 until ni+0.9999 do
     begin
      real c1,d1;
      MultC(x/u,-y/u,2.0*i,.0,c,d);
      c1:=c;
     d1=d;
      MultC(c,d,RB[1],IB[1],c,d);
      if n=4
       then SumC(-RB[0],-IB[0],c,d,rh1,ih1);
      if n=4
       then SumC(RB[0],IB[0],c,d,rh1,ih1);
      if n=5
       then
        begin
         rh1:=-rh1;
         ih1:=-ih1
        end;
      RB[0]:=RB[1];
      IB[0]:=IB[1];
      RB[1]:=rh1;
      IB[1]:=ih1;
      if n=3
       then
        begin
         MultC(c1,d1,RH[1],IH[1],c1,d1);
         SumC(c1,d1,-RH[0],-iH[0],rh2,ih2);
         RH[0]:=RH[1];
         IH[0]:=IH[1];
         RH[1]:=rh2;
         IH[1]:=ih2
        end n=3
     end i
   end ni<0;
et:
  if mi<0∧abs(mi-entier(mi))<10-11
   then
    begin
     if n<4
      then
       begin
        if 2*(e÷2)≠e
         then
          begin
           rh1:=-rh1;
           ih1:=-ih1;
           rh2:=-rh2;
           ih2:=-ih2
          end
       end
    end
 end AspBessel;
```

LITERATURA

[1] Mc Lachlan N.W.: Funkcje Bessela dla inżynierów. WNT, Warszawa 1964.
[2] Whittaker E.T., Watson G.N.: Kurs analizy współczesnej. WNT, Warszawa 1968.
[3] Paszkowski S.: Algol 60. WNT, Warszawa 1968.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ВЕЛИЧИНЫ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ I-ГО И II-ГО РОДА ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ АРГУМЕНТОВ o$|Z| \geq 10$ и ЛЮБОМ РЯДУ

Р е з ю м е

В статье приводится способ вычисления на ВЦМ величин любых функции Бесселя для аргументов о $|Z| \geq 10$ и любом ряду с использованием разложений асимптотических функции Ганкеля.

THE PROCEDURE OF COMPUTING BESSEL'S FUNCTIONS

S u m m a r y

In this article we present the procedure for computing Bessel's functions for the argument of absolute value $|Z| \geq 10$ while employing an asymptotic expansion.

Przyjęto do druku w czerwcu 1978 r.