

JULIAN PAŁKA

DRGANIA SWOBODNE BRYŁY SZTYWNEJ NA PODŁOŻU
SPRĘŻYSTYM NIEWINKLEROWSKIM Z UWZGLĘDNIENIEM
BEZWŁADNOŚCI PODŁOŻA

1. WSTĘP

Problem drgań bryły sztywnej na podłożu sprężystym wiąże się praktycznie z obliczaniem na drgania fundamentów pod maszyny i urządzenia o działaniu dynamicznym posadowionych bezpośrednio na gruncie. [1]

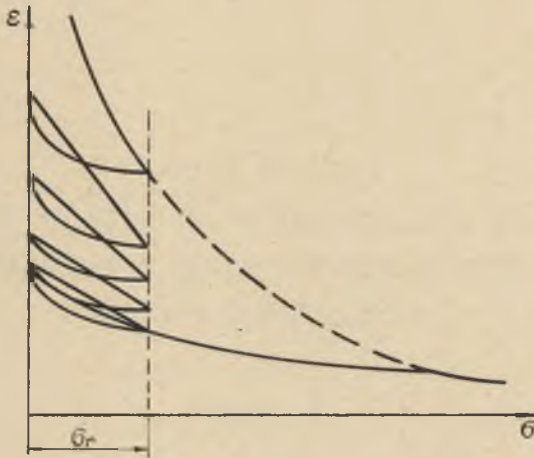
W dotychczasowych rozwiązaniach tego problemu przyjmuje się podłoża winklerowskie nie uwzględniając w obliczeniach bezwładności gruntu. Ogólnie prowadzi to do rozpatrywania drgań układu o sześciu stopniach swobody dynamicznej. [2]

Uwzględniając w obliczeniach dynamicznych bryły sztywnej na podłożu sprężystym bezwładność gruntu, dochodzi się do układu o nieskończonej ilości stopni swobody dynamicznej, co zbliża nas do rzeczywistej pracy podłoża gruntowego obciążonego okresowo wzbudzającymi siłami. [3]

Tematem pracy jest podanie wzorów na obliczenie częstości drgań swobodnych bryły sztywnej o podstawie kołowej spoczywającej bezpośrednio na gruncie, traktowanej jako podłożo sprężyste, którego cechy charakteryzują dwa parametry.

Jak wiadomo grunty budowlane pod obciążeniem zewnętrznym statycznym wykazują zarówno odkształcenia sprężyste jak i trwałe.

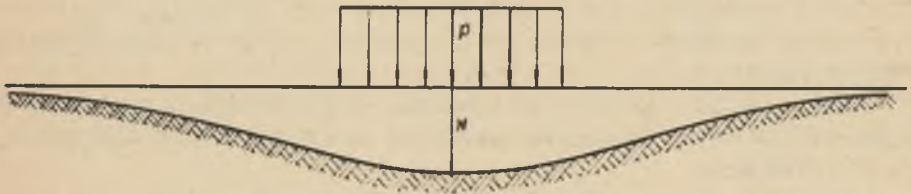
Jeżeli jednak obciążenie powtarza się w pewnych, dopuszczalnych dla danego gruntu granicach, co ma miejsce przy obciążeniach dynamicznych, grunty o odpowiedniej nośności nabierają cech sprężystych i obserwujemy wtedy przede wszystkim odkształcenia sprężyste /Rys.1/. [4]



Rys.1. Krzywa zanikania odkształceń trwałych przy powtarzających się obciążeniach gruntu w granicach σ_r

2. CHARAKTERYSTYKA PODŁOŻA SPRĘŻYSTEGO

Rozpatrując drgania bryły sztywnej na podłożu sprężystym przyjęto, że podłoże gruntowe stanowi półprzestrzeń sprężystą ograniczoną w stanie nieobciążonym poziomą powierzchnią która pod wpływem obciążenia osiada sprężysto nie tylko w miejscu działania tego obciążenia, lecz również poza jego obszarem /Rys.2/. [5]



Rys.2. Osiadanie powierzchni gruntu pod obciążeniem dla podłoża dwuparametrowego

Z kształtu osiadania powierzchni gruntu można wnioskować, że na wielkość osiadania gruntu pod obciążeniem zewnętrznym ma wpływ nie tylko opór objętościowego odkształcenia gruntu, lecz także jego opór na ścianie. Siły ścinające powstają w gruntach sypkich na skutek tarcia wewnętrznego między cząstkami oraz ich wzajemnego zazębiania się zaś w gruntach spoistych dodatkowo na skutek ich spójności.

W związku z tym podłoże gruntowe przy drganiach można scharakteryzować dwoma parametrami: D_1 i D_2 .

Pierwszy z nich D_1 wyrażający się w $/\text{kg}/\text{cm}^3/$ jest to współczynnik dynamicznego sprężystego odkształcenia objętościowego gruntu.

Wiąże on wielkość pionowego jednostkowego oddziaływania gruntu z osiadaniem powierzchni $/w/$ w postaci:

$$2.1 \quad p = D_1 \cdot w$$

Drugi D_2 wyraża się w $/\text{kg}/\text{cm}/$; jest to współczynnik sprężystego dynamicznego odkształcenia postaciowego gruntu.

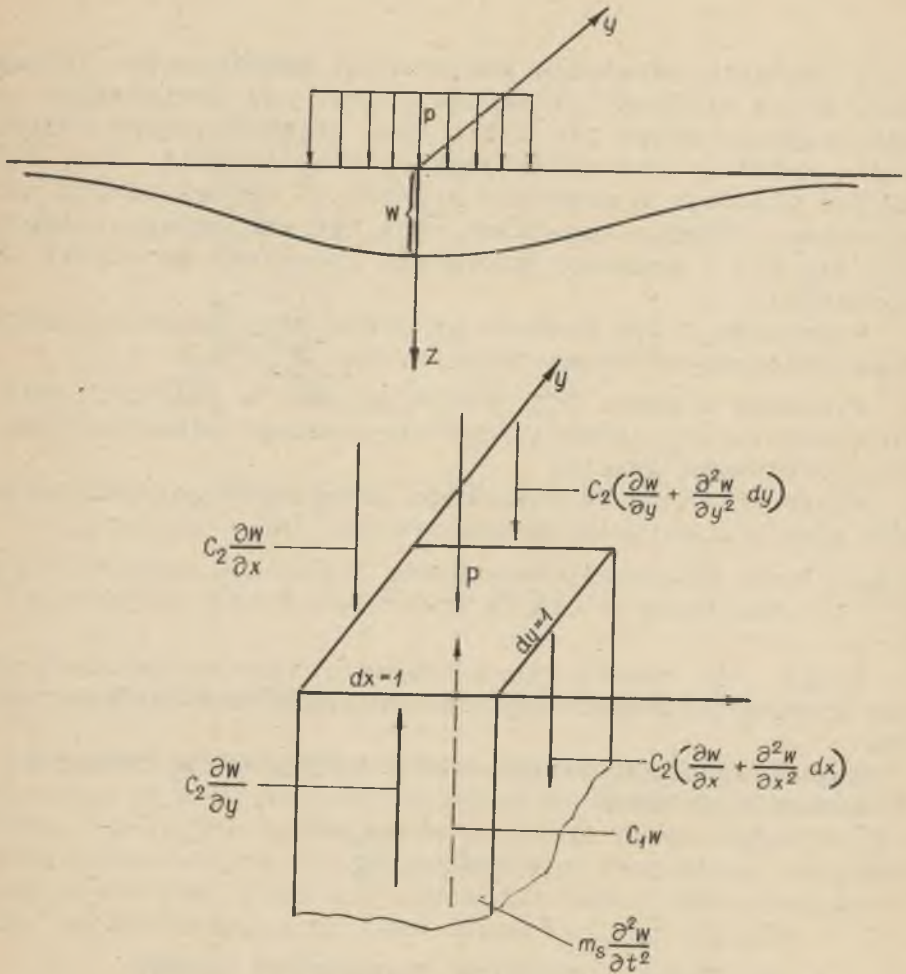
Wyraża on intensywność sił ścinających na jednostkę długości w postaci:

$$2.2 \quad t = D_2 \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

3. DRGANIA SWOBODNE POWIERZCHNI GRUNTU

3.1. Równanie różniczkowe ruchu

Równanie różniczkowe ruchu podłoża gruntowego obciążonego w pewnym obszarze obciążeniem równomiernym można otrzymać rozpatrując równowagę wydzielonego z podłoża gruntowego elementu o bokach $dx = dy = 1$ i wysokości h_e /Rys.3/.



Rys.3. Siły działające na wydzielony element podłoża gruntowego

Na wydzielony element działają następujące siły:

- $D_1 w \, dx \, dy$ - opór objętościowy gruntu
- $m_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \, dx \, dy$ - reakcja bezwładności gruntu
- $D_2 \frac{\partial w}{\partial x} \, dy; + D_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \, dx \right) dy$ - opór postaciowy gruntu
- $D_2 \frac{\partial w}{\partial y} \, dx; + D_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \, dy \right) dx$ - opór postaciowy gruntu

Wysokość graniastosłupa $/h_e/$ oznacza tu miąższość strefy efektywnej podłoża gruntowego.

Strefa efektywna jest to warstwa gruntu w obrębie której praktycznie zachodzi proces odkształcenia podłoża w czasie drgań.

Rzutując wszystkie siły działające na wydzielony element na kierunek pionowy, otrzymamy równanie różniczkowe ruchu powierzchni gruntu o postaci:

$$3.1 \quad D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - D_1 w - m_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p = 0$$

W równaniu tym oznaczają:

- m_s - masa sprowadzona gruntu do powierzchni na jednostkę powierzchni,
- D_1, D_2 - dynamiczne parametry podłoża,
- p - obciążenie zewnętrzne na jednostkę powierzchni gruntu,
- w - osiadanie powierzchni gruntu.

Równanie różniczkowe ruchu powierzchni gruntu poza obszarem obciążenia $/p/$ w układzie współrzędnych biegunowych $/r, \varphi/$ po przyjęciu współrzędnej bezwymiarowej

$$\xi = \frac{r}{s}, \quad \text{/gdzie } s = \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \text{ / ma postać:}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - w - \frac{m_s}{D_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Masę sprowadzoną m_s można obliczyć mnożąc całą masę wydzielonego z gruntu elementu przez współczynnik sprowadzenia $/\mu/$.

Współczynnik sprowadzenia $/\mu/$ wyznacza się podobnie jak przy drganiach układów prętowych sposobem Rayleigha.

3. WSPÓŁCZYNNIK SPROWADZENIA MASY PODŁOŻA

Stosując sposób Rayleigha w przypadku podłoża gruntowego, należy podzielić wydzielony ze strefy efektywnej gruntu graniastosłup o bokach $dx = dy = 1$ i wysokości $/h_e/$ na jednostkowe części o masie $/m/$ /Rys.4/.

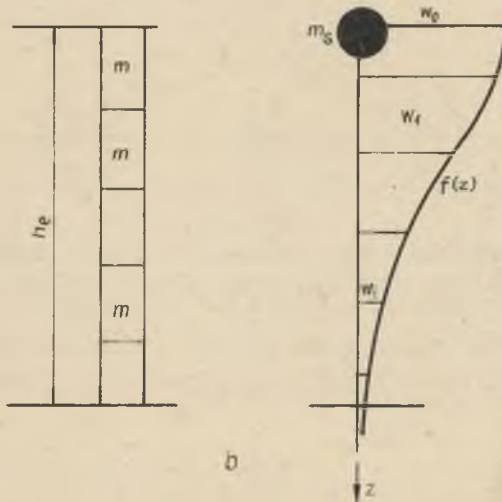
Osiadanie $/w/$ każdej z tych części w procesie drgań będzie funkcją głębokości $/z/$ oraz czasu $/t/$ i można go przedstawić w postaci zależności

$$3.2.1 \quad w(z, t) = w_0(t) \cdot f(z)$$

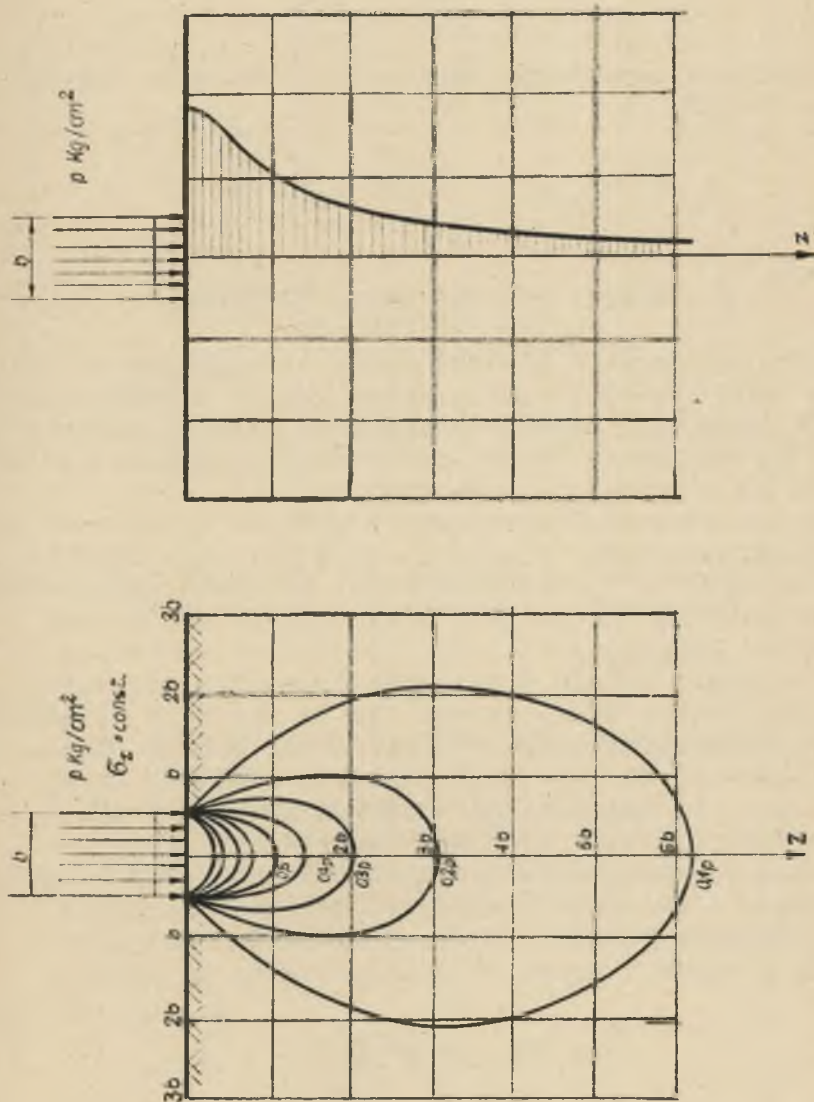
Gdzie: $[w_0(t)]$ jest osiadaniem powierzchni gruntu w danej chwili czasu (t) zaś $[f(z)]$ jest funkcją kształtu charakteryzującą zmianę wielkości osiadania podłoża gruntowego z głębokością. Funkcję $f(z)$ można wyznaczyć dla każdego podłoża gruntowego znając cechy fizyczne i mechaniczne gruntu /Rys.4/.

Wypisując równanie energii kinetycznej układu zadane-go oraz układu sprowadzonego /Rys.5/ otrzymuje się wyrażenie o postaci:

$$2.2.2 \quad \frac{1}{2} m \int_0^{h_e} \left(\frac{d w_{\max}}{dt} \right)^2 dz = \frac{1}{2} m h_e \mu \left(\frac{d w_{0 \max}}{dt} \right)^2$$



Rys.4. Wykres zanikania odkształceń podłoża gruntowego z głębokością



Rys.5 Wykres zanikania naprężeń z głębokością w podłożu gruntowym od obciążenia działającego na powierzchni

z którego po podstawieniu zależności /3.2.1/ i uproszczeniu, otrzymuje się wyrażenie na współczynnik sprowadzenia (μ)

$$3.2.3 \quad \mu = \frac{\int_0^{h_e} [f(z)]^2 dz}{h_e}$$

Uwzględniając wyrażenie /3.2.3/ wzór na masę sprowadzoną ma postać:

$$3.2.4 \quad m_s = \mu h_e \cdot m = m \int_0^{h_e} [f(z)]^2 dz$$

4. DRGANIA PIONOWE BRYŁY SZTYWNEJ

Rozpatrując drgania pionowe bryły otrzymujemy po sprowadzeniu masy gruntu do powierzchni, układ o nieskończenie wielu stopniach swobody dynamicznej jak na rysunku 6.

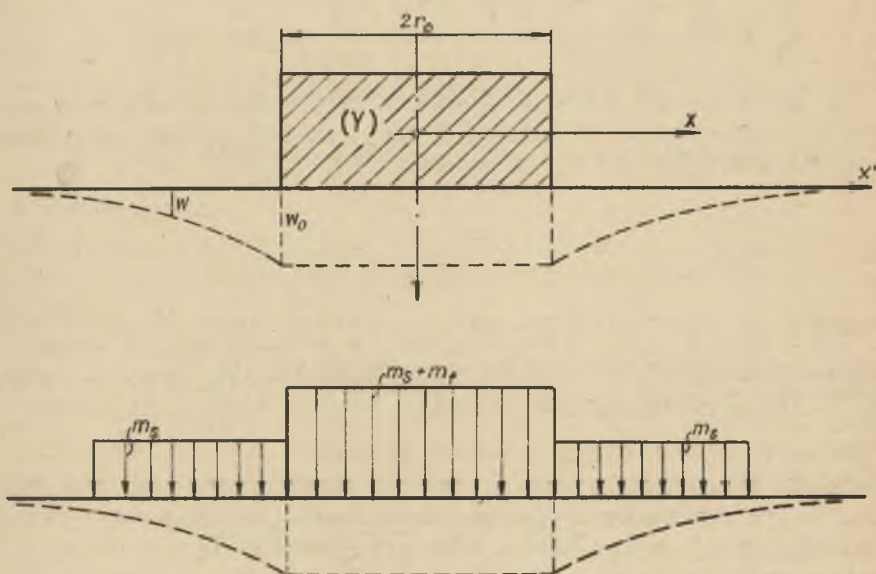
Niech na ten układ działa chwilowo siła osiowa /N/ wychylająca go w położenia równowagi Rys.6.

Na skutek własności sprężystych podłoża gruntowego powstaną drgania pionowe o pewnej częstości λ . Drgania te będą zanikać na skutek tłumienia. Ponieważ wpływ tłumienia na częstość drgań jest nieznaczny w niniejszej pracy został pominięty.

Odształcenie układu w procesie drgań dla częstości podstawowej będzie miało postać jak na rys.6. W obszarze podstawy bryły odształcenie powierzchni gruntu będzie miało stałą wartość W_0 . Poza obszarem podstawy bryły odształcenie to będzie stopniowo zanikać i w punkcie węzłowym przyjmie wartość równą zero.

Równanie różniczkowe drgań swobodnych pionowych układu otrzymamy z równania równowagi rzutując wszystkie siły na kierunek pionowy z uwzględnieniem reakcji bezwładności podłoża i bryły. [7] Równanie to ma postać:

$$4.1 \quad \pi r_0^2 m_f \frac{d^2 w_0}{dt^2} = Z$$



Rys.6. Odkształcenie powierzchni gruntu w procesie drgań pionowych dla częstości podstawowej

gdzie:

- m_f - masa bryły na jednostkę powierzchni podstawy bryły
- r - promień podstawy bryły
- Z^0 - suma rzutów wszystkich sił na kierunku pionowy działających na układ wraz z dynamicznym oddziaływaniem podłoża
- w_0 - odkształcenie podłoża pod podstawą bryły

przy czym

$$Z = R_d + Q_b$$

gdzie:

R_d - dynamiczne oddziaływanie podłoża gruntowego
 $R_d = - N_b - Q_b$

Q_b - ciężar bryły

N_b - dynamiczny opór podłoża gruntowego.

Na dynamiczny opór podłoża gruntowego złożony jest opór gruntu w obszarze podstawy bryły, który oznaczymy przez N_p oraz opór poza jej obszarem N_g czyli

$$N_b = N_p + N_g$$

Opór gruntu pod podstawą bryły składa się z oporu gruntu pochodzącego od sztywności podłoża oraz z oporu gruntu pochodzącego od reakcji bezwładności podłoża czyli:

$$4.2 \quad N_p = \pi r_o^2 \left(m_s \frac{d^2 w_o}{dt^2} + D_1 w_o \right)$$

Opór podłoża poza obszarem podstawy bryły można obliczyć jako D_1 - krotną objętość powstałą między powierzchnią podłoża gruntowego w stanie spoczynku, a powierzchnią powstałą po odkształceniu gruntu w procesie drgań. Należy więc wyznaczyć funkcję osiadania powierzchni gruntu w poza obszarem bryły w procesie drgań a następnie scałkować to wyrażenie w granicach od $\xi = \xi_0$ do $\xi = \xi_1$,

gdzie:

ξ_1 - bezwymiarowa współrzędna danego węzła drgań.

Wyrażenie na w czyli na osiadanie powierzchni gruntu poza obszarem podstawy bryły znajdziemy wychodząc z wyprowadzonego równania /3.1/ przy założeniu że $\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = 0$, gdyż przy drganiach pionowych otrzymuje się powierzchnię obrotową.

Czyli równanie /3.1/ przyjmie postać:

$$4.3 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} - w - \frac{m_s}{D_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Rozwiązania równania /4.3/ szukamy w postaci

$$4.4 \quad w(\xi, t) = W(\xi)(A \cos \lambda_z t + B \sin \lambda_z t)$$

gdzie:

$W(\lambda)$ - jest funkcją kształtu, nie zależy od czasu (t)

A, B - stałe

λ_z - częstość kątowna drgań pionowych.

Podstawiając wyrażenie /4.4/ do równania /4.3/ otrzymamy po przekształceniu równanie różniczkowe zwyczajne o postaci:

$$4.5 \quad \frac{d^2 W}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dW}{d\xi} + W \left(\frac{m_s \lambda_z^2}{D_1} - 1 \right) = 0$$

Wyrażenie w nawiasach równania /4.5/ może mieć wartość dodatnią lub ujemną w zależności od wielkości m_s , λ_z , i D_1 .

Przypadek ujemnej wartości nie bierze się tu pod uwagę, gdyż rozwiązania równania 4.3. przedstawiają wtedy ruch aperiodyczny, czego nie rozpatrujemy w niniejszej pracy.

W przypadku gdy to wyrażenie jest dodatnie oznaczamy go przez β_z^2 czyli:

$$4.6 \quad \left(\frac{m_s \lambda_z^2}{D_1} - 1 \right) = \beta_z^2$$

Podstawiając wyrażenie 4.6. do 4.5. otrzymujemy równanie o postaci

$$4.7 \quad \frac{d^2 W}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dW}{d\xi} + \beta_z^2 W = 0$$

Jest to równanie Eulera-Bessela z parametrem β_z o wskaźniku $n = 0$.

Całka ogólna tego równania ma postać:

$$4.8 \quad W(\xi) = C_1 J_0(\beta_z \xi) + C_2 Y_0(\beta_z \xi)$$



Stałe całkowania wyznaczmy z warunków brzegowych mianowicie:

$$4.9 \quad \begin{aligned} \text{dla } \xi = \xi_0 &\rightarrow W(\xi_0) = W_0 \\ \text{dla } \xi = \xi_1 &\rightarrow W(\xi_1) = 0 \end{aligned}$$

Uwzględniając warunki brzegowe otrzymamy:

$$\begin{aligned} C_1 J_0(\beta_2 \xi_0) + C_2 Y_0(\beta_2 \xi_0) &= W_0 \\ C_1 J_0(\beta_2 \xi_1) + C_2 Y_0(\beta_2 \xi_1) &= 0 \end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ równań względem C_1 i C_2 wyznaczmy:

$$4.10 \quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{W_0 Y_0(\beta_2 \xi_1)}{J_0(\beta_2 \xi_0) Y_0(\beta_2 \xi_1) - J_0(\beta_2 \xi_1) Y_0(\beta_2 \xi_0)} \\ C_2 &= \frac{W_0 J_0(\beta_2 \xi_1)}{J_0(\beta_2 \xi_0) Y_0(\beta_2 \xi_1) - J_0(\beta_2 \xi_1) Y_0(\beta_2 \xi_0)} \end{aligned}$$

Po podstawieniu wyrażeń /4.10/ do wzoru /4.8/ otrzymujemy wyrażenie na $W(\xi)$ w postaci:

$$4.11 \quad W(\xi) = \frac{W_0 [Y_0(\beta_2 \xi_1) J_0(\beta_2 \xi) - J_0(\beta_2 \xi_1) Y_0(\beta_2 \xi)]}{J_0(\beta_2 \xi_0) Y_0(\beta_2 \xi_1) - J_0(\beta_2 \xi_1) Y_0(\beta_2 \xi_0)}$$

Podstawiając wyrażenie 4.11. do 4.4 otrzymamy

$$4.12 \quad w(\xi, t) = \frac{W_0 [Y_0(\beta_2 \xi_1) J_0(\beta_2 \xi) - J_0(\beta_2 \xi_1) Y_0(\beta_2 \xi)]}{J_0(\beta_2 \xi_0) Y_0(\beta_2 \xi_1) - J_0(\beta_2 \xi_1) Y_0(\beta_2 \xi_0)} (A \cos \lambda_2 t + B \sin \lambda_2 t)$$

Opór podłoża poza obszarem podstawy bryły będzie więc równy

$$4.13 \quad \begin{aligned} N_g &= \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} W(\xi, t) r dr d\varphi = \frac{S^2 D_1 W_0 (A \cos \lambda_2 t + B \sin \lambda_2 t)}{J_0(\beta_2 \xi_0) Y_0(\beta_2 \xi_1) - J_0(\beta_2 \xi_1) Y_0(\beta_2 \xi_0)} \\ & \cdot [Y_0(\beta_2 \xi_1) \int_0^{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi_1} J_0(\beta_2 \xi) \xi d\xi d\varphi - J_0(\beta_2 \xi_1) \int_0^{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi_1} Y_0(\beta_2 \xi) \xi d\xi d\varphi] = \\ & = \frac{2\pi r_1^2 D_1 W_0 (A \cos \lambda_2 t + B \sin \lambda_2 t)}{\beta_2 \xi_0^2 [J_0(\beta_2 \xi_0) Y_0(\beta_2 \xi_1) - J_0(\beta_2 \xi_1) Y_0(\beta_2 \xi_0)]} \\ & \cdot \{ [J_1(\beta_2 \xi_1) \xi_1 - J_1(\beta_2 \xi_0) \xi_0] Y_0(\beta_2 \xi_1) - J_0(\beta_2 \xi_1) [Y_1(\beta_2 \xi_1) \xi_1 - Y_1(\beta_2 \xi_0) \xi_0] \} \end{aligned}$$

Uwzględniając wyrażenie 4.12 oraz 4.13 równanie drgań układu przyjmie postać

$$4.14 \quad \pi r_0^2 (m_f + m_s) \frac{d^2 w_0}{dt^2} + \pi r_0^2 D_1 w_0 + \frac{\pi r_0^2 2 D_1 W_0 (A \cos \lambda_z t + B \sin \lambda_z t)}{[J_0(\beta_z \xi_0) Y_0(\beta_z \xi_1) - J_0(\beta_z \xi_1) Y_0(\beta_z \xi_0)] \beta_z \xi_0^2} \cdot \{ Y_0(\beta_z \xi_1) [J_1(\beta_z \xi_1) \xi_1 - J_1(\beta_z \xi_0) \xi_0] - J_1(\beta_z \xi_1) [Y_1(\beta_z \xi_1) \xi_1 - Y_1(\beta_z \xi_0) \xi_0] \} = 0$$

i podstawiając

$$w_0(\xi, t) = W_0(\xi) (A \cos \lambda_z t + B \sin \lambda_z t)$$

otrzymamy po uproszczeniu równanie częstości o postaci:

$$4.15 \quad \lambda_z^2 (m_f + m_s) = D_1 \left\{ 1 + \frac{2 \{ Y_0(\beta_z \xi_1) [J_1(\beta_z \xi_1) \xi_1 - J_1(\beta_z \xi_0) \xi_0] - J_0(\beta_z \xi_1) [Y_1(\beta_z \xi_1) \xi_1 - Y_1(\beta_z \xi_0) \xi_0] \}}{[J_0(\beta_z \xi_0) Y_0(\beta_z \xi_1) - J_0(\beta_z \xi_1) Y_0(\beta_z \xi_0)] \beta_z \xi_0^2} \right\}$$

Rozwiązując to równanie metodą graficzną możemy wyznaczyć kolejne częstości kątowe drgań swobodnych pionowych od podstawowej do częstości wyższych rzędów.

Wyrażenie po prawej stronie równania 4.15 można oznaczyć przez $S_z / \text{kG/cm}^2$, oznacza ono jednostkową dynamiczną sztywność podłoża na przesuw pionowy.

$$4.16 \quad S_z = D_1 \left\{ 1 + \frac{2 \{ Y_0(\beta_z \xi_1) [J_1(\beta_z \xi_1) \xi_1 - J_1(\beta_z \xi_0) \xi_0] - J_0(\beta_z \xi_1) [Y_1(\beta_z \xi_1) \xi_1 - Y_1(\beta_z \xi_0) \xi_0] \}}{[J_0(\beta_z \xi_0) Y_0(\beta_z \xi_1) - J_0(\beta_z \xi_1) Y_0(\beta_z \xi_0)] \beta_z \xi_0^2} \right\}$$

Wyrażenie na częstość drgań można wtedy zapisać w postaci

$$4.17 \quad \lambda_{zn} = \sqrt{\frac{S_{zn}}{(m_f + m_s)}} \quad \text{gdzie } n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

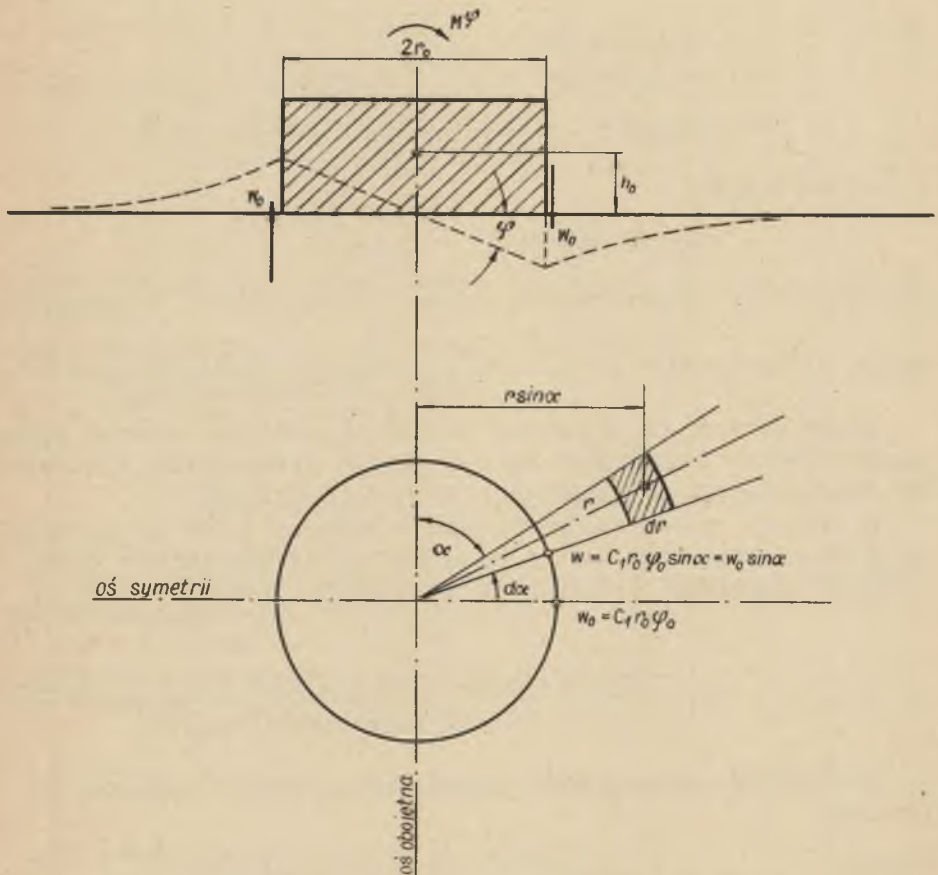
5. DRGANIA OBROTOWE BRYŁY DOKOŁA POZIOMEJ OSI UKŁADU

Założmy, że na bryłę sztywną o podstawie kołowej działa w płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez środek ciężkości bryły i jej podstawy chwilowy moment M .

Przyjmując zupełną sztywność podłoża na przesuw poziomy, moment ten wywoła drgania obrotowe układu dokoła poziomej osi /rys.7/.

Dla częstości podstawowej układu, odkształcenie powierzchni podłoża w obrębie podstawy bryły ma kształt

dwóch półcylicydrycznych klinów, a poza obszarem podstawy dwóch krzywoliniowych powierzchni. Sprrowadzając w pro-



Rys.7. Odkształcenie powierzchni gruntu w procesie drgań obrotowych dokoła poziomej osi dla częstości podstawowej

cesie tych drgań masę podłoża do powierzchni podobnie jak dla drgań pionowych równanie różniczkowe ruchu ma wtedy postać

$$5.1 \quad \pi r_0^2 m_F (\varrho^2 + h_0^2) \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = L$$

gdzie:

- L - suma momentów wszystkich sił względem poziomej osi obrotu układu przechodzącej przez środek ciężkości podstawy bryły.
 ρ - promień bezwładności układu
 h_0 - odległość środka ciężkości bryły od jego podstawy
 α - kąt obrotu bryły w procesie drgań
 r_0 - promień podstawy bryły
 m_f - masa bryły

Wyrażenie na L można zapisać w postaci:

$$5.2 \quad L = M_\alpha + q\pi r_0^2 h_0 \alpha$$

gdzie:

- M_α - moment oporu podłoża gruntowego w procesie drgań
 q - ciężar układu na jednostkę powierzchni podstawy bryły.

Opór podłoża przy obrocie bryły o kąt α można obliczyć jako sumę dwóch momentów

a/ momentu $/M_p/$ od oporu podstawą bryły na który złoży się opór od sztywności gruntu oraz opór od sił bezwładności, czyli

$$5.3 \quad M_{p\alpha} = \pi r_0^2 m_s (\rho^2 + h_0^2) \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + D_1 \frac{\pi r_0^4}{4} \alpha$$

b/ momentu $/M_g/$ od oporu podłoża poza obszarem podstawy bryły.

Opór podłoża poza obszarem podstawy bryły w procesie drgań można wyznaczyć jako moment dwóch D_1 -krotnych objętości powstałych między powierzchnią podłoża gruntowego w stanie nieobciążonym a powierzchnią odkształconą.

Należy więc wyznaczyć funkcję osiadania gruntu $/w/$, a następnie scałkować w granicach od $0 - \pi$ oraz od r_0 do r_1 czyli wyrażenie na moment M_g ma postać:

$$5.4 \quad M_g = 2 D_1 \int_0^\pi \int_{r_0}^{r_1} w \cdot r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi$$

Wyrażenie na w wyznaczmy wychodząc z ogólnego równania różniczkowego ruchu powierzchni gruntu, gdy obciążenie zewnętrzne p równe jest zeru. Równanie to ma postać:

$$5.5 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{m_s}{D_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - w = 0$$

Wyrażając skrajne sprężyste odkształcenie podłoża po obwodzie podstawy bryły przez

$$5.6 \quad w_{\text{skr}} = r_0 \omega \sin \varphi$$

Rozwiązanie równania 5.5. przedstawiamy w postaci

$$5.7 \quad w = v \sin \varphi$$

Podstawiając wyrażenie 5.7 do równania 5.5 otrzymamy równanie o postaci:

$$5.8 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right) v - \frac{m_s}{D_1} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

Rozwiązania równania 5.8. poszukujemy w postaci:

$$5.9 \quad v(\xi, t) = V(\xi) (A \cos \lambda_\alpha t + B \sin \lambda_\alpha t)$$

gdzie:

$V(\xi)$ - funkcja kształtu nie zależna od czasu

A, B - stałe

λ_α - częstość kątowna drgań swobodnych obrotowych dokoła poziomej osi przy zupełnej sztywności podłoża na przesuw.

Podstawiając wyrażenie 5.9. do równania 5.8. otrzymujemy

$$5.10 \quad \frac{d^2 V}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dV}{d\xi} + \left(\frac{m_s \lambda_\alpha^2}{D_1} - 1 - \frac{1}{\xi^2} \right) V = 0$$

przyjmując, że wyrażenie

$$\frac{m_s \lambda_\alpha^2}{D_1} \geq 1$$

i oznaczając

$$5.11 \quad \frac{m_s \lambda_\alpha^2}{D_1} - 1 = \beta_x^2$$

otrzymamy po podstawieniu 5.11.

$$5.12 \quad \frac{d^2 V}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dV}{d\xi} + \left(\beta_x^2 - \frac{1}{\xi^2} \right) V = 0$$

Jest to równanie Eulera-Bessela z parametrem β_x o wskaźniku $n = 1$.

Całka ogólna równania 5.12. ma postać:

$$5.13 \quad V(\xi) = C_3 J_1(\beta_x \xi) + C_4 Y_1(\beta_x \xi)$$

Stałe całkowania C_3 i C_4 wyznaczymy z warunków brzegowych, mianowicie:

$$5.14 \quad \text{dla } \xi = \xi_0 \longrightarrow V(\xi) = r_0 \alpha = V_0$$

$$\text{dla } \xi = \xi_1 \longrightarrow V(\xi) = 0$$

Stąd po podstawieniu 5.14. do 5.13. otrzymamy:

$$5.15 \quad C_3 J_1(\beta_x \xi_0) + C_4 Y_1(\beta_x \xi_0) = V_0$$

$$C_3 J_1(\beta_x \xi_1) + C_4 Y_1(\beta_x \xi_1) = 0$$

Rozwiązując ten układ równań wyznaczymy:

$$5.16 \quad C_3 = \frac{V_0 Y_1(\beta_x \xi_1)}{J_1(\beta_x \xi_0) Y_1(\beta_x \xi_1) - J_1(\beta_x \xi_1) Y_1(\beta_x \xi_0)}$$

$$C_4 = \frac{-V_0 J_1(\beta_x \xi_1)}{J_1(\beta_x \xi_0) Y_1(\beta_x \xi_1) - J_1(\beta_x \xi_1) Y_1(\beta_x \xi_0)}$$

Po podstawieniu wyrażeń 5.16. do 5.13. otrzymujemy:

$$5.17 \quad V(\xi) = \frac{V_0 [Y_1(\beta_\alpha \xi_1) J_1(\beta_\alpha \xi) - J_1(\beta_\alpha \xi_1) Y_1(\beta_\alpha \xi)]}{J_1(\beta_\alpha \xi_0) Y_1(\beta_\alpha \xi_1) - J_1(\beta_\alpha \xi_1) Y_1(\beta_\alpha \xi_0)}$$

Po uwzględnieniu 5.9. oraz 5.17. wyrażenie 5.7 na /w/ w procesie drgań przyjmuje postać:

$$5.18 \quad w(\xi, t) = \pm V_0 \sin \varphi \frac{[Y_1(\beta_\alpha \xi_1) J_1(\beta_\alpha \xi) - J_1(\beta_\alpha \xi_1) Y_1(\beta_\alpha \xi)]}{[J_1(\beta_\alpha \xi_0) Y_1(\beta_\alpha \xi_1) - J_1(\beta_\alpha \xi_1) Y_1(\beta_\alpha \xi_0)]} \cdot (A \cos \lambda_\alpha t + B \sin \lambda_\alpha t)$$

gdzie:

φ - kąt zmieniający się od zera do π

α - kąt wychylenia bryły w procesie drgań.

Podstawiając 5.18 do 5.4 otrzymujemy

$$5.19 \quad M_g = \frac{2D_1 V_0 (A \cos \lambda_\alpha t + B \sin \lambda_\alpha t)}{J_1(\beta_\alpha \xi_0) Y_1(\beta_\alpha \xi_1) - J_1(\beta_\alpha \xi_1) Y_1(\beta_\alpha \xi_0)} \cdot \left[Y_1(\beta_\alpha \xi_1) \int_0^\pi \int_{r_0}^{r_1} J_1(\beta_\alpha \xi) r^2 \sin^2 \varphi \, d\varphi \, dr - J_1(\beta_\alpha \xi_1) \int_0^\pi \int_{r_0}^{r_1} Y_1(\beta_\alpha \xi) r^2 \sin^2 \varphi \, d\varphi \, dr \right] = \frac{\pi V_0 s^3 D_1 (A \cos \lambda_\alpha t + B \sin \lambda_\alpha t)}{[J_1(\beta_\alpha \xi_0) Y_1(\beta_\alpha \xi_1) - J_1(\beta_\alpha \xi_1) Y_1(\beta_\alpha \xi_0)] \beta_\alpha \cdot \{ Y_1(\beta_\alpha \xi_1) [J_2(\beta_\alpha \xi_1) \xi_1^2 - J_2(\beta_\alpha \xi_0) \xi_0^2] - J_1(\beta_\alpha \xi_1) [Y_2(\beta_\alpha \xi_1) \xi_1^2 - Y_2(\beta_\alpha \xi_0) \xi_0^2] \}} = \frac{\pi r_0^3 V_0 D_1 (A \cos \lambda_\alpha t + B \sin \lambda_\alpha t)}{[J_1(\beta_\alpha \xi_0) Y_1(\beta_\alpha \xi_1) - J_1(\beta_\alpha \xi_1) Y_1(\beta_\alpha \xi_0)] \beta_\alpha \xi_0^3 \cdot \{ Y_1(\beta_\alpha \xi_1) [J_2(\beta_\alpha \xi_1) \xi_1^2 - J_2(\beta_\alpha \xi_0) \xi_0^2] - J_1(\beta_\alpha \xi_1) [Y_2(\beta_\alpha \xi_1) \xi_1^2 - Y_2(\beta_\alpha \xi_0) \xi_0^2] \}}$$

Uwzględniając wyrażenie 5.3 oraz 5.19 równanie drgań układu przyjmie postać:

$$5.20 \quad \pi r_0^2 (\varrho^2 + h_0^2) (m_f + m_s) \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{\pi r_0^4}{4} D_1 \alpha - \pi r_0^2 q h_0 \alpha +$$

$$+ \frac{\pi r_0^3 V_0 D_1 (A \cos \lambda_{\alpha} t + B \sin \lambda_{\alpha} t)}{[J_1(\beta_{\alpha} \xi_0) Y_1(\beta_{\alpha} \xi_1) - J_1(\beta_{\alpha} \xi_1) Y_1(\beta_{\alpha} \xi_0)] \beta_{\alpha} \xi_0^3}$$

$$\left\{ Y_1(\beta_{\alpha} \xi_1) [J_2(\beta_{\alpha} \xi_1) \xi_1^2 - J_2(\beta_{\alpha} \xi_0) \xi_0^2] - \right.$$

$$\left. - J_1(\beta_{\alpha} \xi_1) [Y_2(\beta_{\alpha} \xi_1) \xi_1^2 - Y_2(\beta_{\alpha} \xi_0) \xi_0^2] \right\} = 0$$

Uwzględniając, że

$$\alpha = \frac{V}{r_0} (A \cos \lambda_{\alpha} t + B \sin \lambda_{\alpha} t)$$

po podstawieniu i uproszczeniu przez funkcję czasu i przez V_0 otrzymamy równanie częstości:

$$5.21 \quad \lambda_{\alpha}^2 (m_f + m_s) (\varrho^2 + h_0^2) + q h_0 =$$

$$= D_1 \frac{r_0^2}{4} \left\{ 1 + \frac{4 \{ Y_1(\beta_{\alpha} \xi_1) [J_2(\beta_{\alpha} \xi_1) \xi_1^2 - J_2(\beta_{\alpha} \xi_0) \xi_0^2] - J_1(\beta_{\alpha} \xi_1) [Y_2(\beta_{\alpha} \xi_1) \xi_1^2 - Y_2(\beta_{\alpha} \xi_0) \xi_0^2] \}}{[J_1(\beta_{\alpha} \xi_0) Y_1(\beta_{\alpha} \xi_1) - J_1(\beta_{\alpha} \xi_1) Y_1(\beta_{\alpha} \xi_0)] \beta_{\alpha} \xi_0^3} \right\}$$

Wyrażenie po prawej stronie równania można oznaczyć przez S /kG/cm/ oznacza ona jednostkową dynamiczną sztywność podłoża na obrót dokoła poziomej osi, więc

$$S_{\alpha} = D_1 \frac{r_0^2}{4} \left\{ 1 + \frac{4 \{ Y_1(\beta_{\alpha} \xi_1) [J_2(\beta_{\alpha} \xi_1) \xi_1^2 - J_2(\beta_{\alpha} \xi_0) \xi_0^2] - J_1(\beta_{\alpha} \xi_1) [Y_2(\beta_{\alpha} \xi_1) \xi_1^2 - Y_2(\beta_{\alpha} \xi_0) \xi_0^2] \}}{[J_1(\beta_{\alpha} \xi_0) Y_1(\beta_{\alpha} \xi_1) - J_1(\beta_{\alpha} \xi_1) Y_1(\beta_{\alpha} \xi_0)] \beta_{\alpha} \xi_0^3} \right\}$$

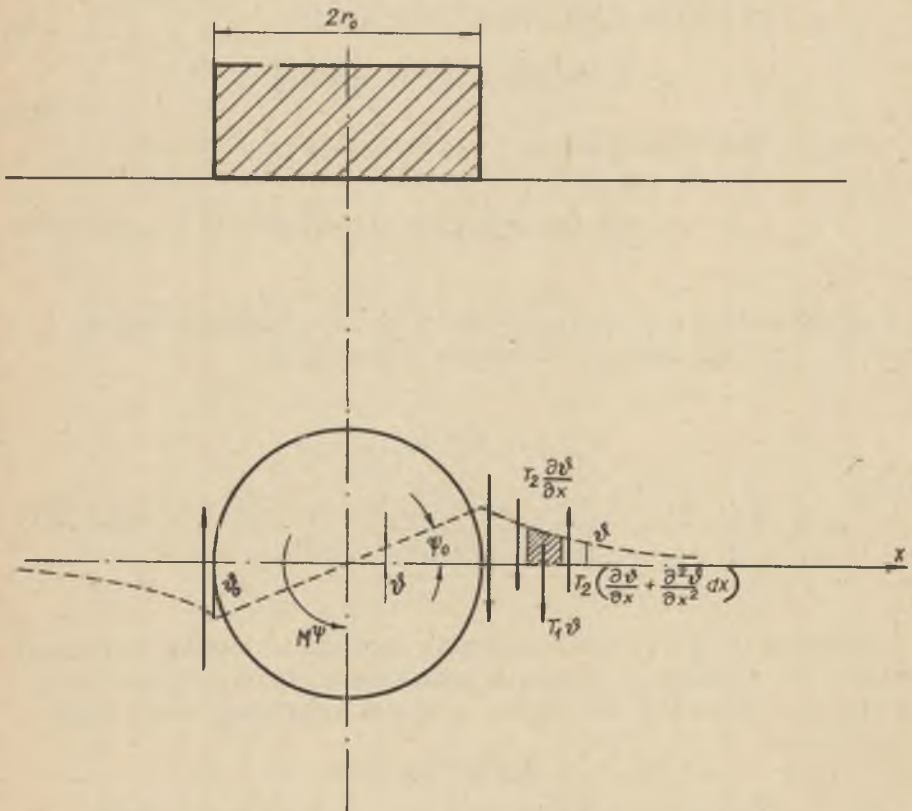
Wyrażenie na częstość drgań można wtedy zapisać w postaci:

$$\lambda_{\alpha n} = \sqrt{\frac{S_{\alpha n} - q h_0}{(\varrho^2 + h_0^2) (m_f + m_s)}}$$

6. DRGANIA SKRĘTNE

Założmy, że na bryłę sztywną o podstawie kołowej działa w płaszczyźnie poziomej chwilowy moment M .

Moment ten wywoła obrót bryły sztywnej dokoła pionowej osi, a powstałe przemieszczenia poziome wszystkich punktów powierzchni gruntu będą mieć postać jak na rys.8.



Rys.8. Przeszyczenia punktów powierzchni gruntu w procesie drgań skrętnych dla częstości podstawowej

Przeszyczenia te będą rosły radialnie od środka podstawy bryły osiągając największą wartość dla $r = r_0$ po obwodzie podstawy bryły, a następnie będą maleć dążąc w pewnej odległości r_1 do zera. Równanie różnicz-

kowe drgań swobodnych skrętnych układu z uwzględnieniem masy podłoża można otrzymać z warunku równowagi dynamicznej:

$$6.1 \quad \pi r_o^2 Q_\psi^2 m_f \frac{d^2 \psi}{dt^2} = L_\psi$$

gdzie:

- L_ψ - suma momentów wszystkich sił względem osi pionowej przechodzącej przez środek ciężkości układu
 m_f - masa bryły na jednostkę powierzchni podstawy bryły
 Q_ψ - promień bezwładności układu względem pionowej osi ciężkości
 ψ - kąt obrotu bryły.

W tym przypadku

$$L_\psi = M_\psi$$

gdzie:

- M_ψ - moment oporu podłoża gruntowego przy obrocie układu dokoła pionowej osi.

Opór podłoża przy obrocie bryły o kąt ψ można obliczyć jako sumę dwóch momentów

- a/ momentu M_p od oporu podłoża pod podstawą bryły na który złoży się opór od sztywności podłoża oraz opór od sił bezwładności gruntu, czyli

$$6.2 \quad M_{p\psi} = \pi r_o^2 Q_\psi^2 m_s \frac{d^2 \psi}{dt^2} + \frac{\pi r_o^4}{2} T_1 \psi_o$$

- b/ Momentu M_g powstałego od oporu podłoża poza obszarem podstawy bryły.

Opór podłoża poza obszarem podstawy bryły można wyznaczyć jako moment dwóch T_1 krotnych powierzchni przesuwu cząstek podłoża gruntowego

$$6.3 \quad M_{g\psi} = r_s T_1 \int_0^{2r} \int_{r_0}^{r_1} v r dr d\varphi$$

gdzie:

T_1 - współczynnik dynamicznego sprężystego odkształcenia objętościowego gruntu przy przesuwie poziomym.

r_s - odległość środka ciężkości powierzchni przesuwu cząstek gruntu poza obszarem podstawy bryły.

Równanie przesuwu cząstek w przekroju średnicowym we współrzędnych biegunowych z uwzględnieniem masy podłoża można otrzymać rozpatrując równowagę wyciętego elementu powierzchni podłoża gruntowego.

Na wydzielony element gruntu będą działać następujące siły:

$T_1 v dx dy$ - opór objętościowy przesuwu poziomego

$T_2 \frac{\partial v}{\partial x} dy$; $T_2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \right) dy$ - opór postaciowy gruntu przy przesuwie poziomym

$T_2 \frac{\partial v}{\partial y} dx$; $T_2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy \right) dx$ - opór postaciowy gruntu przy przesuwie poziomym.

Rzutując wszystkie siły na kierunek poziomy działające na wydzielony element otrzymamy równanie o postaci

$$6.4 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} - v - \frac{m_s}{T_1} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

Rozwiązanie tego równania poszukujemy w postaci

$$6.5 \quad v(\xi, t) = \theta(\xi) (A \cos \lambda_\psi t + B \sin \lambda_\psi t)$$

gdzie:

$\theta(\xi)$ - jest funkcją niezależną od czasu /t/

A, B - stałe

λ_ψ - częstość kątowa drgań obrotowych dokoła pionowej osi.

Podstawiając wyrażenie 6.4 do równania 6.3 otrzymamy

$$6.6 \quad \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} + \theta \left(\frac{m_s \lambda_\psi^2}{T_1} - 1 \right) = 0$$

Zakładając, że wyrażenie w nawiasach jest dodatnie czyli, że:

$$\frac{m \lambda_{\psi}^2}{T_1} - 1 = \beta_{\psi}^2$$

równanie 6.5 przyjmie postać:

$$6.7 \quad \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} + \theta \beta_{\psi}^2 = 0$$

Jest to równanie Eulera-Bessela z parametrem β_{ψ} o wskaźniku $n = 0$.

Całka ogólna tego równania ma postać

$$6.8 \quad \theta(\xi) = C_5 J_0(\beta_{\psi} \xi) + C_6 Y_0(\beta_{\psi} \xi)$$

Stałe całkowania C_5 , C_6 obliczymy z warunków brzegowych, a mianowicie

$$6.9 \quad \begin{array}{ll} \text{dla } \xi = \xi_0 & \longrightarrow \theta(\xi) = \theta_0 \\ \text{dla } \xi = \xi_1 & \longrightarrow \theta(\xi) = 0 \end{array}$$

Dalej po podstawieniu 6.8 do 6.7 otrzymamy układ dwóch równań na wyznaczenie C_5 i C_6 o postaci:

$$6.10 \quad \begin{array}{l} C_5 J_0(\beta_{\psi} \xi_0) + C_6 Y_0(\beta_{\psi} \xi_0) = \theta_0 \\ C_5 J_0(\beta_{\psi} \xi_1) + C_6 Y_0(\beta_{\psi} \xi_1) = 0 \end{array}$$

Rozwiązując ten układ równań względem C_5 i C_6 znajdziemy:

$$6.11 \quad \begin{array}{l} C_5 = \frac{\theta_0 Y_0(\beta_{\psi} \xi_1)}{J_0(\beta_{\psi} \xi_0) Y_0(\beta_{\psi} \xi_1) - J_0(\beta_{\psi} \xi_1) Y_0(\beta_{\psi} \xi_0)} \\ C_6 = \frac{-\theta_0 Y_0(\beta_{\psi} \xi_1)}{J_0(\beta_{\psi} \xi_0) Y_0(\beta_{\psi} \xi_1) - J_0(\beta_{\psi} \xi_1) Y_0(\beta_{\psi} \xi_0)} \end{array}$$

Podstawiając wyrażenie 6.10 do 6.7 otrzymamy;

$$6.12 \quad \theta(\xi) = \frac{\theta_0 [Y_0(\beta_\psi \xi_1) - J_0(\beta_\psi \xi_1)]}{J_0(\beta_\psi \xi_0) Y_0(\beta_\psi \xi_1) - J_0(\beta_\psi \xi_1) Y_0(\beta_\psi \xi_0)}$$

a następnie uwzględniając 6.12 wyrażenie 6.5 przyjmie postać:

$$6.13 \quad v(\xi, t) = \frac{\theta_0 [Y_0(\beta_\psi \xi_1) - J_0(\beta_\psi \xi_1)] (A \cos \lambda_\psi t - B \sin \lambda_\psi t)}{J_0(\beta_\psi \xi_0) Y_0(\beta_\psi \xi_1) - J_0(\beta_\psi \xi_1) Y_0(\beta_\psi \xi_0)}$$

czyli opór podłoża poza obszarem podstawy bryły będzie równy:

$$6.14 \quad M_{g\psi} = \frac{r_3 T_1 \theta_0 (A \cos \lambda_\psi t + B \sin \lambda_\psi t)}{J_0(\beta_\psi \xi_0) Y_0(\beta_\psi \xi_1) - J_0(\beta_\psi \xi_1) Y_0(\beta_\psi \xi_0)} \\ \left[Y_0(\beta_\psi \xi_1) \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{r_3} J_0(\beta_\psi \xi) r dr d\varphi - \right. \\ \left. - J_0(\beta_\psi \xi_1) \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{r_3} Y_0(\beta_\psi \xi) r dr d\varphi \right] - \\ = \frac{2\pi r_3^2 T_1 \theta_0 (A \cos \lambda_\psi t + B \sin \lambda_\psi t)}{[J_0(\beta_\psi \xi_0) Y_0(\beta_\psi \xi_1) - J_0(\beta_\psi \xi_1) Y_0(\beta_\psi \xi_0)] \beta_\psi} \\ \left\{ Y_0(\beta_\psi \xi_1) [J_1(\beta_\psi \xi_1) \xi_1 - J_1(\beta_\psi \xi_0) \xi_0] - \right. \\ \left. - J_0(\beta_\psi \xi_1) [Y_1(\beta_\psi \xi_1) \xi_1 - Y_1(\beta_\psi \xi_0) \xi_0] \right\} = \\ = \frac{2\pi r_3 r_0^2 T_1 \theta_0 (A \cos \lambda_\psi t + B \sin \lambda_\psi t)}{J_0(\beta_\psi \xi_0) Y_0(\beta_\psi \xi_1) - J_0(\beta_\psi \xi_1) Y_0(\beta_\psi \xi_0)} \beta_\psi \xi_0^2 \\ \left\{ Y_0(\beta_\psi \xi_1) [J_1(\beta_\psi \xi_1) - J_1(\beta_\psi \xi_0) \xi_0] - \right. \\ \left. - J_0(\beta_\psi \xi_1) [Y_1(\beta_\psi \xi_1) \xi_1 - Y_1(\beta_\psi \xi_0) \xi_0] \right\}$$

Uwzględniając wyrażenie 6.2 oraz 6.14 równanie drgań układu przyjmie postać:

$$\begin{aligned}
 & \pi r_o^2 (m_f + m_s) \rho^2 \frac{d^2 \psi_o}{dt^2} + \frac{\pi r_o^4}{2} T_1 \psi + \\
 6.15 \quad & + \frac{2\pi r_o r_o^2 T_1 \theta_o (\text{Acos } \lambda_\psi t + B \sin \lambda_\psi t)}{J_o(\beta_\psi \xi_o) Y_o(\beta_\psi \xi_1) - J_o(\beta_\psi \xi_1) Y_o(\beta_\psi \xi_o)} \beta_\psi \xi_o^2 \cdot \\
 & \cdot \{ Y_o(\beta_\psi \xi_1) [J_1(\beta_\psi \xi_1) \xi_1 - J_1(\beta_\psi \xi_o) \xi_o] - \\
 & - J_o(\beta_\psi \xi_1) [Y_1(\beta_\psi \xi_1) \xi_1 - Y_1(\beta_\psi \xi_o) \xi_o] \} = 0
 \end{aligned}$$

Uwzględniając, że

$$6.16 \quad \psi_o = \frac{\theta_o}{r_o} (\text{Acos } \lambda_\psi t - B \sin \lambda_\psi t)$$

otrzymamy po podstawieniu i uproszczeniu równanie częstości

$$\begin{aligned}
 & (m_f + m_s) \rho^2 \lambda_\psi^2 = \frac{\Omega_o^2}{2} T_1 \left\{ 1 + \right. \\
 6.17 \quad & + \frac{4r_s \{ Y_o(\beta_\psi \xi_1) [J_1(\beta_\psi \xi_1) \xi_1 - J_1(\beta_\psi \xi_o) \xi_o] - J_o(\beta_\psi \xi_1) [Y_1(\beta_\psi \xi_1) \xi_1 - Y_1(\beta_\psi \xi_o) \xi_o] \}}{r_o [J_o(\beta_\psi \xi_o) Y_o(\beta_\psi \xi_1) - J_o(\beta_\psi \xi_1) Y_o(\beta_\psi \xi_o)] \beta_\psi \xi_o^2}
 \end{aligned}$$

Wyrażenie po prawej stronie równania 6.17 można oznaczyć przez S_ψ /kg/cm/.

Oznacza ono jednostkową dynamiczną sztywność podłoża na obrót dokoła pionowej osi, czyli

$$\begin{aligned}
 6.18 \quad & S_\psi = T_1 \frac{\Omega_o^2}{2} \left\{ 1 + \right. \\
 & + \frac{4r_s \{ Y_o(\beta_\psi \xi_1) [J_1(\beta_\psi \xi_1) \xi_1 - J_1(\beta_\psi \xi_o) \xi_o] - J_o(\beta_\psi \xi_1) [Y_1(\beta_\psi \xi_1) \xi_1 - Y_1(\beta_\psi \xi_o) \xi_o] \}}{r_o [J_o(\beta_\psi \xi_o) Y_o(\beta_\psi \xi_1) - J_o(\beta_\psi \xi_1) Y_o(\beta_\psi \xi_o)] \beta_\psi \xi_o^2}
 \end{aligned}$$

Wyrażenie na częstość drgań obrotowych dokoła pionowej osi można wtedy zapisać.

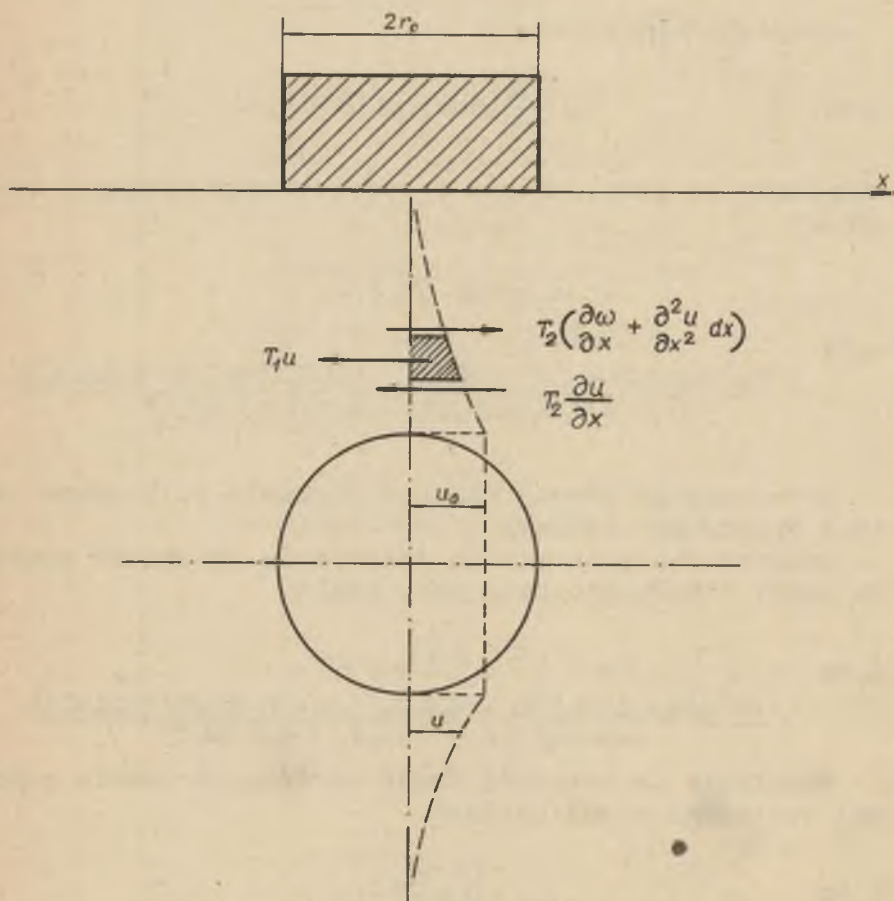
$$6.19 \quad \lambda_{\psi n} = \sqrt{\frac{S_{\psi n}}{\rho^2 (m_f + m_s)}}$$

7. DRGANIA POZIOME PRZESUWNE
PRZY ZUPEŁNEJ SZTYWNOŚCI PODŁOŻA NA OBRÓT

Założmy, że na bryłę sztywną o podstawie kołowej działa na wysokości środka ciężkości bryły siła pozioma H .

Przyjmując zupełną sztywność podłoża na obrót, siła ta na skutek sprężystości podłoża na przesuw, wywoła drgania poziome przesuwne układu.

Dla częstości podstawowej przemieszczenia punktów powierzchni podłoża będą miały postać jak na rys.9.



Rys.9. Przemieszczenia punktów powierzchni gruntu w procesie drgań poziomych przesuwnych dla częstości podstawowej

W obszarze podstawy bryły przemieszczenia te będą miały stałą wartość równą $/u_0/$ zaś poza obszarem podstawy będą malały od wartości $/u_0/$ do zera.

Sprowadzając w procesie tych drgań masę podłoża do powierzchni podobnie jak przy drganiach pionowych bryły, równanie różniczkowe ruchu z uwzględnieniem reakcji bezwładności podłoża i bryły ma wtedy postać

$$7.1 \quad \pi r_0^2 m_f \frac{d^2 u_0}{dt^2} = X$$

gdzie:

X - suma rzutów na kierunek poziomy wszystkich sił działających na układ.

Na wartość X złoży się opór dynamiczny podłoża $/R/$ pochodzący od sztywności gruntu oraz dodatkowo od sił P bezwładności podłoża w obszarze i poza obszarem podstawy bryły.

Opór podłoża w obszarze podstawy bryły można przedstawić w postaci:

$$7.2 \quad H_p = \pi r_0^2 m_s \frac{d^2 u_0}{dt^2} + \pi r_0^2 T_1 u_0$$

gdzie:

T_1 - współczynnik dynamicznego sprężystego odkształcenia objętościowego gruntu przy przesuwie poziomym,

u_0 - przemieszczenie poziome bryły,

r_0 - promień podstawy bryły.

Opór podłoża poza obszarem podstawy bryły można obliczyć jako siłę sprężystą równą T_1 -krotnej powierzchni przesuwu cząstek podłoża gruntowego przez odpowiednie przemieszczenia tych cząstek w procesie drgań, czyli:

$$7.3 \quad H_w = \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{r_1} u(\xi) r dr d\varphi$$

gdzie:

u - oznacza przemieszczenie cząstek powierzchni gruntu poza obszarem podstawy bryły.

Należy więc wyznaczając funkcję przemieszczeń cząstek powierzchni gruntu $/u/$ i podstawić do wyrażenia 7.3.

Równanie krzywej przesuwu cząstek powierzchni gruntu poza obszarem podstawy bryły w przekroju średnicowym wyznaczyć można rozpatrując równowagę wyciętego elementu powierzchni gruntu rys.9.

Rzutując wszystkie siły na kierunek poziomy otrzymamy po uproszczeniu

$$7.4 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} - u - \frac{m_s}{T_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Rozwiązanie na / / szukamy w postaci:

$$7.5 \quad u = U(\xi)(A \cos \lambda_x t - B \sin \lambda_x t)$$

wstawiając 7.5 do 7.4 otrzymamy wyrażenie:

$$7.6 \quad \frac{d^2 U}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial U}{\partial \xi} + U \left(\frac{m_s \lambda_x^2}{T_1} - 1 \right) = 0$$

Jeśli przyjmiemy że $\frac{m_s \lambda_x^2}{T_1} > 1$

i oznaczymy

$$7.7 \quad \frac{m_s \lambda_x^2}{T_1} - 1 = \beta_x^2$$

otrzymamy po podstawieniu do 7.6 równanie Eulera-Bessela z parametrem o wskaźniku $n = 0$.

Całka tego równania ma postać

$$7.8 \quad U = C_7 J_0(\beta_x \xi) + C_8 Y_0(\beta_x \xi)$$

Stałe całkowania C_7 i C_8 wyznaczmy z warunków brzegowych, mianowicie!

dla $\xi = \xi_0$

$$7.9 \quad U(\xi_0) = C_7 J_0(\beta_x \xi_0) + C_8 Y_0(\beta_x \xi_0) = U_0$$

oraz dla $\xi = \xi_1$

$$U(\xi_1) = C_7 J_0(\beta_x \xi_1) + C_8 Y_0(\beta_x \xi_1) = 0$$

Rozwiązując 7.9 względem C_7 i C_8 wyznaczmy:

$$7.10 \quad C_7 = \frac{U_0 Y_0(\beta_x \xi_1)}{J_0(\beta_x \xi_0) Y_0(\beta_x \xi_1) - J_0(\beta_x \xi_1) Y_0(\beta_x \xi_0)}$$

$$C_8 = \frac{-U_0 J_0(\beta_x \xi_1)}{J_0(\beta_x \xi_0) Y_0(\beta_x \xi_1) - J_0(\beta_x \xi_1) Y_0(\beta_x \xi_0)}$$

Po podstawieniu wyrażen na C_7 i C_8 do 7.5 otrzymujemy

$$7.11 \quad u(\xi, t) = \frac{U_0 [Y_0(\beta_x \xi_1) J_0(\beta_x \xi) - J_0(\beta_x \xi_1) Y_0(\beta_x \xi)]}{J_0(\beta_x \xi_0) Y_0(\beta_x \xi_1) - J_0(\beta_x \xi_1) Y_0(\beta_x \xi_0)} (A \cos \lambda_x t - B \sin \lambda_x t)$$

Podstawiając 7.11 do wyrażenia 7.3 opór podłoża poza obszarem podstawy bryły będzie równy:

$$7.12 \quad H_w = \frac{s^2 T_1 U_0}{J_0(\beta_x \xi_0) Y_0(\beta_x \xi_1) - J_0(\beta_x \xi_1) Y_0(\beta_x \xi_0)} \cdot$$

$$\cdot [Y_0(\beta_x \xi_1) \int_0^{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi_1} J_0(\beta_x \xi) \xi d\xi d\varphi -$$

$$- J_0(\beta_x \xi_1) \int_0^{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi_1} Y_0(\beta_x \xi) \xi d\xi d\varphi] =$$

$$= \frac{2\pi r_0^2 T_1 U_0}{[J_0(\beta_x \xi_0) Y_0(\beta_x \xi_1) - J_0(\beta_x \xi_1) Y_0(\beta_x \xi_0)] \beta_x \xi_0^2} \cdot$$

$$\cdot \{ Y_0(\beta_x \xi_1) [J_1(\beta_x \xi_1) \xi_1 - J_1(\beta_x \xi_0) \xi_0] -$$

$$- J_0(\beta_x \xi_1) [Y_1(\beta_x \xi_1) \xi_1 - Y_1(\beta_x \xi_0) \xi_0] \}$$

Uwzględniając 7.12 oraz 7.2

Równanie ruchu układu przyjmie postać:

$$7.14 \quad \pi r_0^2 (m_f + m_s) \frac{d^2 u_0}{dt^2} + \pi r_0^2 T_1 u_0 + \frac{2\pi r_0^2 T_1 U_0 (A \cos \lambda_x t - B \sin \lambda_x t)}{[J_0(\beta_x \xi_0) Y_0(\beta_x \xi_1) - J_0(\beta_x \xi_1) Y_0(\beta_x \xi_0)] \beta_x \xi_0^2} \cdot \{ Y_0(\beta_x \xi_1) [J_1(\beta_x \xi_1) \xi_1 - J_1(\beta_x \xi_0) \xi_0] - J_0(\beta_x \xi_1) [Y_1(\beta_x \xi_1) \xi_1 - Y_1(\beta_x \xi_0) \xi_0] \} = 0$$

Uwzględniając, że:

$$7.14 \quad u_0 = U_0 (A \cos \lambda_x t + B \sin \lambda_x t)$$

otrzymamy po uproszczeniu równanie częstości w przypadku gdy podłoże jest zupełnie sztywne na obrót.

$$7.15 \quad \lambda_x^2 (m_f + m_s) = T_1 \left\{ 1 + \frac{2 \{ Y_0(\beta_x \xi_1) [J_1(\beta_x \xi_1) \xi_1 - J_1(\beta_x \xi_0) \xi_0] - J_0(\beta_x \xi_1) [Y_1(\beta_x \xi_1) \xi_1 - Y_1(\beta_x \xi_0) \xi_0] \}}{[J_0(\beta_x \xi_0) Y_0(\beta_x \xi_1) - J_0(\beta_x \xi_1) Y_0(\beta_x \xi_0)] \beta_x \xi_0^2} \right\}$$

Wyrażenie po prawej stronie równania oznacza sztywność podłoża gruntowego na jednostkę powierzchni przy przesuwie poziomym bryły, można go oznaczyć przez S_x i nazwać jednostkowym dynamicznym współczynnikiem sztywności przesuwu poziomego.

Wyrażenie to ma postać

$$7.16 \quad S_x = T_1 \left\{ 1 + \frac{2 \{ Y_0(\beta_x \xi_1) [Y_1(\beta_x \xi_1) \xi_1 - J_1(\beta_x \xi_0) \xi_0] - J_0(\beta_x \xi_1) [Y_1(\beta_x \xi_1) \xi_1 - J_1(\beta_x \xi_0) \xi_0] \}}{[J_0(\beta_x \xi_0) Y_0(\beta_x \xi_1) - J_0(\beta_x \xi_1) Y_0(\beta_x \xi_0)] \beta_x \xi_0^2} \right\}$$

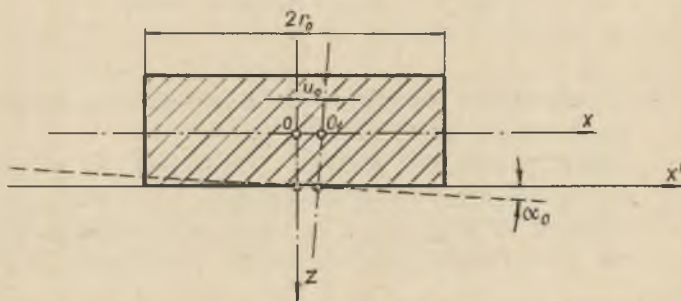
Częstość kątową drgań swobodnych poziomych przy założeniu zupełnej sztywności podłoża na obrót można w skróconej postaci zapisać

$$7.17 \quad \lambda_{xn} = \sqrt{\frac{S_{xn}}{m_f + m_s}}$$

W wyrażeniu na S_x wchodzi wartość β_x jeśli rozwiążemy równanie 7.15 metodą graficzną znajdziemy częstości drgań swobodnych przesuwnych od podstawowej do wyższych harmonicznym.

8. DRGANIA WAHADŁOWE BRYŁY SZTYWNEJ NA PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM Z UWZGLĘDNIENIEM MASY PODŁOŻA GRUNTOWEGO

Jeżeli bryłę sztywną o podstawie kołowej wychylimy z położenia równowagi na przykład chwilowo działającą siłą poziomą, to zacznie ona wykonywać sprzężone drgania poziome przesuwne oraz drgania obrotowe dokoła poziomej osi w płaszczyźnie XOZ /rys.10/.



Rys.10. Przemieszczenia bryły sztywnej w procesie drgań poziomych obrotowo-przesuwnych

Drgania te możemy przedstawić układem dwu równań różniczkowych, które otrzymamy z warunków równowagi układu z uwzględnieniem reakcji bezwładności zarówno bryły jak i podłoża gruntowego.

$$\pi r_0^2 (m_f + m_s) \frac{d^2 u_0}{dt^2} = X$$

8.1

$$\pi r_0^2 Q^2 (\dot{m}_f + m_s) \frac{d^2 \alpha_0}{dt^2} = L_{\alpha}$$

gdzie:

- ρ - promień bezwładności masy układu za który możemy uważać bryłę wraz z masą sprowadzoną podłoża;
 $u_0 \alpha_0$ - poziome przesunięcie środka ciężkości układu i kąt obrotu w danej chwili /t/;
 X - suma rzutów wszystkich sił na kierunek poziomy
 L_α - suma momentów tych sił względem poziomej osi OY.

W rozpatrywanym przypadku wyrażenia na X i L przyjmą postać:

$$X = -S_x(u_0 - h_0 \alpha_0) \pi r_0^2$$

8.2

$$L_\alpha = [-S_\alpha \alpha_0 + S_x(u_0 + h_0 \alpha_0) h_0 + q h_0 \alpha_0] \pi r_0^2$$

gdzie:

- S_x - dynamiczna sztywność jednostkowa podłoża dla poziomego przesuwu
 S_α - dynamiczna sztywność jednostkowa podłoża przy obrocie fundamentu dokoła poziomej osi OY
 q - ciężar bryły wraz z masą sprowadzoną podłoża na jednostkę powierzchni podstawy bryły.

Podstawiając wyrażenie 11.2 do równań 11.1 oraz dzieląc przez πr_0^2 otrzymamy:

$$(m_f + m_s) \frac{d^2 u_0}{dt^2} + S_x u_0 - S_\alpha h_0 \alpha_0 = 0$$

8.3

$$q^2 (m_f + m_s) \frac{d^2 \alpha_0}{dt^2} + (S_\alpha + S_x h_0^2 - q h_0) \alpha_0 - S_x h_0 u_0 = 0$$

Dzieląc równanie pierwsze przez $/m + m/$ zaś drugie przez $/q^2 + h_0^2/ /m_f + m_s/$ oraz wprowadzając oznaczenia:

$$\frac{S_x}{m_f + m_s} = \lambda_x^2$$

8.4

$$\frac{S_\alpha - q h_0}{(q^2 + h_0^2)(m_f + m_s)} = \lambda_\alpha^2; \quad \frac{q^2}{q^2 + h_0^2} = \gamma$$

otrzymamy:

$$\frac{d^2 u_0}{dt^2} + \lambda_x^2 u_0 - \lambda_x^2 h_0 \alpha_0 = 0$$

8.5

$$\gamma \frac{d^2 \alpha_0}{dt^2} + [\lambda_\alpha^2 + (1-\gamma) \lambda_x^2] \alpha_0 - \lambda_x^2 (1-\gamma) \frac{u_0}{h_0} = 0$$

Rozwiązania szczególnych tego układu poszukujemy w postaci

$$8.6 \quad \begin{aligned} u_0 &= U_0 (A \cos \lambda t + B \sin \lambda t) \\ \alpha_0 &= A_0 (A \cos \lambda t + B \sin \lambda t) \end{aligned}$$

gdzie:

$$U_0, A_0 - \text{nie zależą od czasu /stałe/ } A_0 = \frac{V_0}{r_0}$$

A, B - stałe, które można wyznaczyć z warunków początkowych ruchu

λ - częstość kątowna drgań układu.

Podstawiając wyrażenia 8.6 do równań 8.5 i upraszczając przez funkcję czasu otrzymamy:

$$8.7 \quad \begin{aligned} -\lambda^2 U_0 + \lambda_x^2 U_0 - \lambda_x^2 h_0 A_0 &= 0 \\ -\gamma \lambda^2 A_0 + [\lambda_\alpha^2 + (1-\gamma) \lambda_x^2] A_0 - \lambda_x^2 (1-\gamma) \frac{U_0}{h_0} &= 0 \end{aligned}$$

Po przekształceniach układ 11.7 przyjmie postać:

$$8.8 \quad \begin{aligned} (\lambda_x^2 - \lambda^2) U_0 - h_0 \lambda_x^2 A_0 &= 0 \\ \lambda_x^2 (1-\gamma) \frac{1}{h_0} U_0 + [\lambda_\alpha^2 (1-\gamma) \lambda_x^2 - \gamma \lambda^2] A_0 &= 0 \end{aligned}$$

Aby otrzymać rozwiązanie na U różne od zera i $A \neq 0$ wyznacznik główny tego układu winien być równy zeru, czyli

$$\begin{vmatrix} \lambda_x^2 - \lambda^2 & (-\lambda_x^2 h_0) \\ -\lambda_x^2 (1-\gamma) \frac{1}{h_0} & \lambda_\alpha^2 + (1-\gamma)\lambda_x^2 - \gamma\lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

Rozwiązując ten wyznacznik otrzymamy równanie częstości

$$8.9 \quad \gamma\lambda^4 - (\lambda_x^2 + \lambda_\alpha^2)\lambda^2 + \lambda_x^2 \lambda_\alpha^2 = 0$$

z którego można wyznaczyć częstości drgań własnych układu

$$8.10 \quad \lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2\gamma} [\lambda_x^2 + \lambda_\alpha^2 \mp \sqrt{(\lambda_x^2 + \lambda_\alpha^2)^2 - 4\gamma\lambda_x^2 \lambda_\alpha^2}]}$$

Przyjmując kolejne wartości na S_x i S_α wyznaczyć można wszystkie częstości drgań swobodnych układu od podstawowej do wyższych harmoniczych.

Literatura

1. J.Naleszkiewicz; Rozważania nad siłami wzbudzającymi drgania fundamentów maszyn. Archiwum Mechaniki Stosowanej Gdańsk, 1949.
2. J.Kisiel: Dynamika Fundamentów pod maszyny, 1957.
3. J.Pałka: Drgania cylindrów współśrodkowych na wspólnej sztywnej płycie i podłożu sprężystym, Praca doktorska 1957.
4. R.Piętkowski: Mechanika Gruntów, Warszawa 1957.
5. P.L.Pasternak: Osnowy nowego mietoda rasczota żestkich gibkich fundamentów na uprugom osnowanii. Sbornik Trudow Nr 14 Moskwa 1956.
6. J.W.Rayleigh: Theory of Sound, 1878.
7. O.A.Sawinow: Fundamienty pod maszyny, Leningrad 1955.