BUDOWNICTWO z. 6

P.3344/62

JÓZEF ANDRZEJ GŁOMB

NIEKTÓRE PROBLEMY DYNAMIKI MOSTÓW DROGOWYCH

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
ZESZYT NAUKOWY Nr 42 – GLIWICE 1962

SPIS TREŚCI

Str.

1. Wstęp 3

Rozdział I: ELEMENTY CHARAKTERYSTYKI DYNAMICZNEJ MOSTU. 7

1. 1. Specyfika obliczenia dynamicznego mostów mniejszych rozpiętości 7

1. 2. Drgania i ugięcia (Wpływ rodzaju konstrukcji na drgania i ugięcia) 10

1. 3. Niektóre problemy tłumienia drgań w mostach . . . 18

Rozdział II: DZIAŁANIE OBCIĄŻENIA NA MOSTY DROGOWE 27

2. 1. Obciążenia mostów drogowych 27

2. 2. Działanie samochodu na most 29

2. 3. Naciski dynamiczne osi pojazdu 41

Rozdział III: WSPÓŁPRACA DYNAMICZNA MOSTU I OBCIĄŻENIA 51

3. 1. Uwagi o wpływie rozwiązania konstrukcyjnego na przeciążenie dynamiczne mostu 51

3.2. Wpływ nierówności nawierzchni na zjawiska dynamiczne w mostach 53

3. 3. Drgania belki mostowej pod obciążeniem samochodowym 62

3. 3. 1. Działanie obciążenia na środek belki 62

3. 3. 2. Związki między masą pojazdu a masą układu pojazd — most 66

3. 3. 3. Równania ruchu środka belki 74

3. 3. 4. Rozwiązanie równania ruchu belki charakterystycznego dla mostów mniejszych betonowych ($10\,m < l < 20 - 25\,m$) 78

3. 3. 5. Przybliżonie rozwiązanie równania ruchu belki charakterystycznego dla mniejszych mostów stalowych ($10\,m < l < 25 - 30\,m$). 85

3. 3. 6. Określenie wielkości wychylenia belki 90

4. Bibliografia 97

Załącznik:

Niektóre sposoby określania wielkości liczbowych wychylenia dynamicznego mostów 102

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 42

JÓZEF ANDRZEJ GŁOMB

P. 3344/62

NIEKTÓRE PROBLEMY DYNAMIKI MOSTÓW DROGOWYCH

PRACA HABILITACYJNA Nr 9

Data otwarcia przewodu habilitacyjnego
na Wydziale Inżynierii Budowlanej
Politechniki Warszawskiej 25. VI. 1961 r.

GLIWICE 1962

REDAKTOR NACZELNY ZESZYTÓW NAUKOWYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Andrzej Grossman

Dział Nauki — Sekcja Wydawnictw Naukowych — Politechniki Śląskiej

Oddano do wyk. 15. IX. 1961 Zam. 1191 25.VII. 62 N-8 Ark. druk. $7^{12}/_{16}$ Ark. wyd. $7^{2}/_{16}$
Papier offsetowy kl. V, 70×100, 70 g Nakład 300+55 Cena zł 8,90

Zakład Produkcji Pomocy Naukowych Politechniki Śląskiej w Gliwicach

Wstęp

Obciążenie użytkowe mostu jest nie tylko ruchome, ale również zmienne w czasie. Powoduje to powstanie szeregu efektów, które zwiększają wytężenie konstrukcji w porównaniu do działania obciążenia statycznego.

Współczesne sposoby obliczania mostów charakteryzują się dość znacznym rozwinięciem metod określania naprężeń statycznych. Natomiast bardzo złożone wpływy dynamiczne wprowadzane są w obliczenia w postaci sumarycznego dodatku dynamicznego, którego wielkość jest określana na podstawie przypadkowych wzorów. Ponadto brak jest jednolitości poglądów na sposób wyznaczania wpływu dynamicznych właściwości obciążenia a stosowane powszechnie pojęcie "współczynnik dynamiczny" nie jest jednoznaczne, nie uwzględnia w dostatecznym stopniu charakterystyki mostu i w związku z tym może być miarą wpływu dynamicznego jedynie z poważnymi zastrzeżeniami i po dokładniejszym sprecyzowaniu.

Za najogólniejszą miarę wpływu dynamicznego uznaje się obecnie stosunek wielkości wyznaczonej przy dynamicznym działaniu obciążenia do tej samej wielkości wyznaczonej przy obciążeniu statycznym. Tak rozumiany współczynnik dynamiczny może być wyznaczany jako stosunek różnych wielkości, a więc sił, naprężeń, odkształceń, ugięć i kolejnych pochodnych ugięcia.

Ta ogólna definicja ma jednak dwa braki:

a) nie wydziela w dostateczny sposób specyfiki działania obciążeń mostowych, a zwłaszcza obciążeń mostów drogowych,

b) współczynnik dynamiczny jest różny nie tylko w różnych przekrojach belki, ale nawet w poszczególnych punktach tego samego przekroju.

Dlatego też konieczna jest realizacja dążenia aby obliczenie dynamiczne - na równi z obliczeniem statycznym - stało się podstawą określania wymiarów konstrukcji mostów[x)].

---

x) Postuluje to prof. Zb. Wasiutyński w pracy [1].

Współczynnik dynamiczny byłby w takim przypadku wielkością kontrolną i precyzja jego wyznaczenia nie miałaby istotnego znaczenia.

Analizując problemy dynamiki mostów konieczne jest oddzielne rozpatrzenie obciążeń kolejowych (szynowych) i obciążeń drogowych, co wiąże się z zasadniczymi różnicami w ich wielkości i sposobie działania. W ogólności badanie dynamiczne mostów drogowych (zwłaszcza mniejszych) jest bardziej złożone niż w mostach kolejowych. Wynika to z zazwyczaj bardziej skomplikowanego układu ustroju nośnego, trudności dokładnego określenia nacisków na poszczególne belki główne oraz różnych rodzajów obciążenia działającego dowolnie na szerokości mostu.

Wspomniano poprzednio, iż znajomość statycznych problemów pracy konstrukcji mostowych wyprzedzała znacznie umiejętność właściwego uwzględnienia wpływów dynamicznych. Przyczyną tego jest - być może - niezadowalający stan dotychczasowej wiedzy o przeciążeniu mostów pod wpływem obciążeń ruchomych. W nieco lepszym położeniu znajdują się tutaj mosty kolejowe, na które zwracano więcej uwagi tak pod względem teoretycznym jak i doświadczalnym [2][3][4][5]. Natomiast mostom drogowym poświęcono jedynie pewną liczbę prac przeważnie pomiarowych, które jednak mimo swego dość szerokiego zakresu nie mogły stanowić podstawy do poważniejszych uogólnień. Wynika to z wielkiej różnorodności konstrukcji, a także z trudnych do zdefiniowania warunków ruchu pojazdu. Bowiem miarodajne wyniki można uzyskać jedynie wtedy, jeśli się przeprowadzi równoczesne pomiary na pojeździe i na moście. A warunek ten często nie był spełniony.

W ostatnich latach ukazało się szereg publikacji, które zajmują się złożonymi problemami dynamiki mostów. Wymienić tutaj należy w pierwszym rzędzie prace V. Kolouška, A.Goldenblata, J.Naleszkiewicza i J.Kazieja [6][7][8][9]. Mimo tego w posiadanym materiale dotyczącym mostów drogowych występują znaczne luki tak badawcze jak i teoretyczne.

Istnieje - na przykład - cały wachlarz nierozwiązanych problemów łączących się z ustaleniem korelacji między rodzajem konstrukcji (schemat statyczny, ukos, podparcie, stężenia itp.) a dynamiczną charakterystyką mostu. W mostach żelbetowych ważne jest również określenie wpływu rys i obciążenia ciężarami powodującymi odkształcenia pozasprężyste, na sztywność i inne parametry dynamiczne.

Wiele problemów badawczych nastręczają nowe materiały (beton sprężony, aluminium) i nowsze rozwiązania konstrukcyjne. Wiadomo również, że badania jak i teoria obliczenia

konstrukcji sprężonych pracujących na obciążenia statyczne - są dość znacznie rozwinięte. Natomiast praca mostów sprężonych pod działaniem obciążeń ruchomych jest zbadana niedostatecznie, a nieliczne doświadczenia [10][11][12] nie pozwalają wyrobić sobie jasnego sądu nawet o zasadniczych parametrach dynamicznych tych konstrukcji.

Rozległość i wieloplanowość problematyki badań dynamicznych mostów zmusza do wydzielenia zagadnień najważniejszych, których rozwiązanie warunkuje dalszy postęp w tej dziedzinie.

Przedmiotem niniejszej pracy będą niektóre z wymienionych wyżej podstawowych problemów z zakresu dynamiki belkowych mostów drogowych mniejszych rozpiętości. Taki zakres pracy obejmuje zdecydowaną większość obiektów mostowych znajdujących się na naszych drogach.

W szczególności omawiane zostaną:

a) problemy specyfiki przeciążenia dynamicznego mostów mniejszych rozpiętości. Dotychczasowy materiał doświadczalny dotyczył przeważnie mostów dużych, mimo że wpływ obciążeń ruchomych jest największy w mostach małych,

b) charakter i struktura parametrów tłumienia (a zwłaszcza tłumienia konstrukcyjnego),

c) pomiary nierówności nawierzchni jako podstawowego czynnika powodującego przeciążenie dynamiczne mostów mniejszych rozpiętości. Wykonane pomiary są podstawą propozycji odnośnie istotnej zmiany charakteru krzywej przeciążenia dynamicznego dla mniejszych mostów drogowych,

d) warunki działania samochodu na konstrukcję nośną. Uwzględniony zostanie wpływ tłumienia pojazdu pobudzonego do drgań przez nierówności nawierzchni,

e) rodzaj i wielkość drgań belek pod obciążeniem samochodowym różnych rodzajów mostów i różnych rozpiętości.

Rozdział I

ELEMENTY CHARAKTERYSTYKI DYNAMICZNEJ MOSTU

1.1. Specyfika obliczenia dynamicznego mostów mniejszych rozpiętości

Mosty mniejsze są najbardziej narażone na wpływy dynamiczne obciążenia użytkowego, a zastosowanie właściwych metod obliczenia może dać tutaj znaczne efekty gospodarcze.

W związku z tym celowe jest uwypuklenie specyfiki tych mostów uwydatniającej się szczególnie przy rozpatrywaniu następujących zagadnień:

a) zależność między masą mostu a obciążenia,
b) stosunek szerokości do rozpiętości,
c) rodzaj, wielkość i rozłożenie sił dynamicznych decydujących o przeciążeniu konstrukcji.

Wiadomo, że obliczenie dynamiczne nie uwzględniające autonomicznego współdziałania masy pojazdu jest niedokładne. Stopień tej niedokładności zależy od stosunku mas mostu i obciążenia, a to z kolei wynika z rodzaju materiału, z jakiego most jest zbudowany oraz typu obciążenia.

W dalszym ciągu pracy (w rozdziale 3.3.2) przedstawione zostaną wykresy obrazujące związek między masą obciążenia a masą układu tak dla mostów drogowych jak i kolejowych. Wskazują one m.in. na możliwość wydzielenia - dla poszczególnych rodzajów mostów - pewnych zakresów, w których wpływ masy pojazdu nie ma istotnego znaczenia dla pracy dynamicznej mostu.

Ustalając tzw. sprowadzoną masę układu przy prostych formach ustroju nośnego możliwe jest wykorzystanie znanych rozwiązań teoretycznych. W mostach drogowych mamy jednak często do czynienia z bardziej złożonym układem konstrukcyjnym ustroju nośnego i wtedy korzystanie z wzorów ustalonych dla idealnego schematu może nie być wystarczające.

Podział między mostami małymi a dużymi można przeprowadzić nie tylko analizując udział masy obciążenia w całości

masy drgającego układu, ale również porównując stosunek szerokości do rozpiętości ($\frac{b}{l}$).

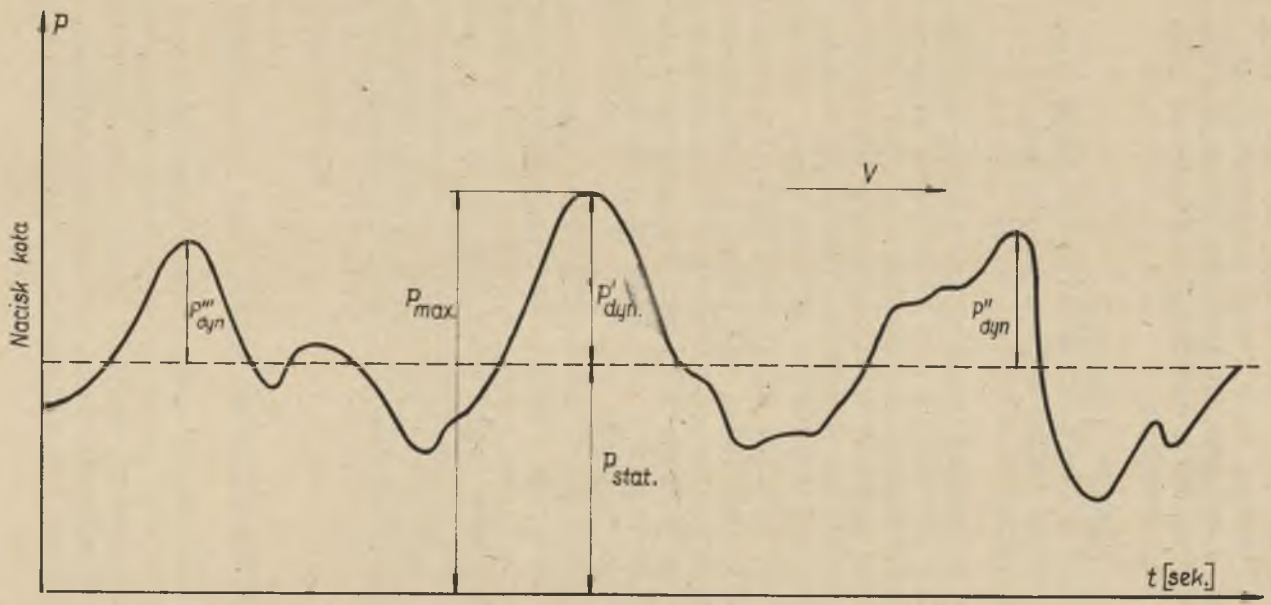
W mostach dużych rozpiętości stosunek $\frac{b}{l} < \frac{1}{10}$, a w mostach mniejszych "b" i "l" są tego samego rzędu. Oczywiście podział ten ma charakter orientacyjny i może znaleźć zastosowanie tylko w mostach drogowych. W mostach kolejowych odpowiednikiem tego kryterium jest stosunek długości mostu do obwodu koła napędowego parowozu. Jeśli te wielkości zbytnio od siebie nie odbiegają, tzn. na długości mostu nie przekazuje się więcej niż 3-4 impulsy od niewyrównania mas, to możemy powiedzieć, że most jest mały.

Z rozgraniczenia między mostami małymi i dużymi wynikają ważne konsekwencje w zakresie ustalania miarodajnego obciążenia obliczeniowego. Dla mostów małych dominujące są obciążenia maksymalne, a więc pojedyncze najniekorzystniejsze działania koła wzgl. osi (P_{max}). Natomiast dla mostów większych pojedyncze obciążenia składają się na podlegający analizie statystycznej obraz nacisków. Różnicę tę bliżej obrazuje fragment wykresu nacisków koła przy przejeździe przez most (rys.1).

Obciążenia obliczeniowe w mostach większych mogą być bardziej wyidealizowane, a pewne przypadkowe wpływy (uwzględniając małe prawdopodobieństwo ich wystąpienia oraz to, że ich intensywność jest zmniejszona przez wpływ dużej masy mostu) - mogą być pominięte.

W związku z tym obraz wzajemnego współdziałania obciążenia i mostu jest tutaj bardziej prosty niż w mostach małych. Ponadto ze wzrostem rozpiętości rola obciążeń użytkowych w obliczeniu belek głównych szybko maleje, a wzrasta wpływ innych czynników (np. porywy wiatru, zjawiska reologiczne itp.), które w mostach mniejszych mają niewielkie znaczenie.

Z tych wszystkich względów wyniki badań przeciążenia dynamicznego mostów większych (np. [13] [14]) nie mogą stać się podstawą do szerszych uogólnień, a w szczególności do wyciągania wniosków odnośnie pracy dynamicznej mostów małych.



Rys.1. Fragment wykresu nacisków osi pojazdu

1.2. Drgania i ugięcia. (Wpływ rodzaju konstrukcji na drgania i ugięcia)

1.2.1. Formy drgań mostów drogowych

Rodzaj i charakter drgań zależy od sztywności podłużnej i poprzecznej mostu, jego formy konstrukcyjnej (ukos, sposób podparcia itp.) oraz od sposobu działania obciążenia.

W mostach drogowych dominujące znaczenie mają następujące formy drgań podstawowych:

a) drgania pionowe jednolite,
b) drgania pionowe niejednolite (drgania poszczególnych dźwigarów głównych różnią się fazą),
c) drgania skrętne.

W mostach mniejszej rozpiętości silnie stężonych poprzecznie (np. mosty płytowe) z obu form drgań związanych ze zginaniem mostu w płaszczyźnie pionowej istotne znaczenie mają jedynie drgania jednolite; drgania niejednolite nie są duże i mogą być pominięte. Natomiast w mostach o mniejszej sztywności poziomej - niezależnie od form wyżej wymienionych - występują różne rodzaje drgań poziomych poprzecznych. Nie osiągają one jednak tutaj tak znacznych wielkości jak w mostach kolejowych (zwłaszcza kratowych większych rozpiętości) tym bardziej że poziome siły wzbudzające są w mostach drogowych znacznie mniejsze i działają jedynie wyjątkowo (przy zmianie kierunku jazdy).

W czasie pracy mostu pod obciążeniem użytkowym czyste formy drgań występują rzadko. Na otrzymywany z intrumentu pomiarowego zapis ruchu jakiegoś punktu belki składają się nie tylko różne rodzaje drgań podstawowych (np. pionowe i skrętne) ale również różne harmoniczne tych drgań. Stwarza to przy analizie wykresów (jeśli uwzględnimy przy tym pewną nieuniknioną nieregularność działania obciążenia) - znaczne trudności.

1.2.2. Drgania swobodne układu most - obciążenie

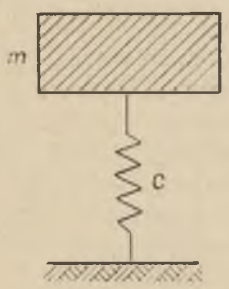
Bez względu na to, na czym polegałoby obliczenie dynamiczne belki (określenie przedziałów rezonansowych, amplitud czy też naprężeń) - główną najważniejszą charakterystyką pozostanie częstość drgań swobodnych lub mówiąc ogólniej widmo częstości. Dlatego też określenie tych wielkości (i związa-

nych z tych form drgań) jest najważniejszym zadaniem sprawdzenia dynamicznego mostu.

Pierwsza forma nietłumionych drgań swobodnych belki nieobciążonej (sprowadzonej do układu jak na rys.2) da się przedstawić zależnością:

$$T_m = \frac{2\pi}{\omega} = 2\sqrt{\frac{m}{c}}\ [\text{sek}] \qquad (1)$$

przy czym " $\omega = \frac{c}{m}$" oznacza minimalną częstość kątową; "m" - masę sprowadzoną do środka belki, a "c" pionową sztywność mostu, tj. siłę która powoduje w środku mostu ugięcie równe jedności.



Rys.2. Zastępczy układ belki mostowej

Z wzoru (1) widać, że częstość drgań swobodnych $n = \frac{1}{T}$ zależy od sztywności giętnej pionowej i wielkości masy sprowadzonej. Jest rzeczą oczywistą, że im większy most, tym większe wykazuje ugięcia pod obciążeniem i tym łatwiej go rozkołysać.

Orientacyjne wielkości współczynnika "c", którego wymiar wynosi t/cm wzgl. t/m i innych parametrów obliczenia dynamicznego zestawione zostały dla różnych rodzajów mostów wolnopodpartych w tabeli nr 2 i 3.

Zwrócić należy uwagę, że jeśli w mostach występują elementy zamocowania ustroju nośnego, to charakterystyka sztywności c zwiększa się, co prowadzi do obniżenia okresu drgań własnych.

Wielkość masy sprowadzonej do środka rozpiętości można przedstawić wzorem:

$$m_{red} = \alpha \frac{Q}{g} \qquad (2)$$

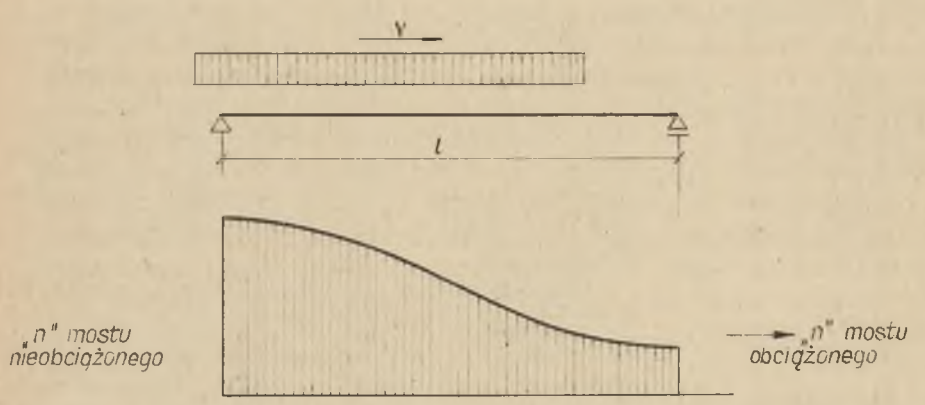
gdzie Q - ciężarem ustroju nośnego mostu, a "g" przyspieszeniem siły ciężkości.

Współczynnik α zależny jest od sposobu podparcia belki oraz od charakteru założonej linii ugięcia i zmienia się w granicach od 1/3 do 1/2. Najczęściej spotykana w litera-

turze wartość $\alpha = \frac{17}{35}$ wyliczona jest dla linii ugięcia jako paraboli trzeciego stopnia przy sile ustawionej w środku belki wolnopodpartej. Przyjęcie $\alpha = 0,5$ (co odpowiada dla belki o stałym przekroju - linii ugięcia jako sinusoidy pod obciążeniem równomiernie rozłożonym) jest również często stosowane.

Dla blachownic, w których cała masa elementu długości ma praktycznie to samo ugięcie co włókna w osi obojętnej - bardziej właściwa jest wartość druga (1/2) natomiast w kratownicach raczej pierwsza (1/3).

Ogólny wpływ zmieniającej się (przy wjeździe obciążenia użytkowego) masy belki na częstość drgań ilustruje rys.3.



Rys.3. Charakter zmiany częstości drgań układu belka-obciążenie

Wraz ze wzrostem masy belki okres "T" zwiększa się, a częstość "n" maleje.

Całe postępowanie obliczeniowe dla określenia masy wprowadzonej ma jak widać charakter przybliżony, ale może być z powodzeniem zastosowane dla większości mostów o prostym podparciu i konstrukcji. Ale w mostach drogowych, które charakteryzują się bardziej złożonym układem ustroju nośnego niekiedy spotykamy się z konstrukcjami, dla których schemat idealny belki prostej byłby przybliżeniem zbyt grubym. Odnieść się musimy w takim przypadku do metod doświadczalnych [15], z których najprostszą jest metoda impulsowa.

Nad okresami drgań swobodnych mostów przeprowadzone zostały przez Bernhardta [16] i Bernsteina [17] liczne badania, które wykazały, że dla mostów stalowych można wypisać proste zależności między rozpiętością a wartościami T_x, T_y i T_{xy}. Np. dla mostów kolejowych wzory Bernsteina przedstawiają się następująco:

$$T_y = 80 \cdot 10^{-4}\, l$$

$$T_x = 38 \cdot 10^{-4}\, l \qquad (3)$$

$$T_{xy} = 40 \cdot 10^{-4}\, l$$

Okresy T otrzymuje się w (sek) przy wstawianiu l w (m).

Niestety, dla mostów drogowych, które są bardziej złożone konstrukcyjnie, wyprowadzenie takich orientacyjnych wzorów jest prawie niemożliwe. Warunki pracy statycznej poszczególnych belek rusztu są różne, co wynika z charakteru stężeń, ewent. skosu i rodzaju podparcia. Istotne znaczenie ma również sposób i miejsce pomiaru. Dlatego też w mostach drogowych zwłaszcza masywnych, częstość drgań własnych określamy najchętniej na drodze doświadczalnej, co wiąże się również z koniecznością określenia wyższych harmonicznych drgań mostu dla porównania z drganiami osi pojazdu.

Wspomniano poprzednio, że określenie częstości drgań swobodnych mostu bez obciążenia nie zawsze jednak jest dla obiektów mniejszych i średnich rozpiętości - wystarczające. Okresy drgań swobodnych układu most - obciążenie (T_1) różnią się nieraz dość poważnie od okresu drgań swobodnych mostu bez obciążenia (T).

Gdy obciążenie stałe (p) da się potraktować jako jednostajnie rozłożone na długości, to możemy napisać zależność

$$T_1 = T\sqrt{1 + \frac{q_1}{p}} \qquad (4)$$

Wielkość q_1 oznacza tutaj ekwiwalentne (wyliczone z momentu dla środka rozpiętości) równomiernie rozłożone obciążenie od obciążenia użytkowego.

Po przekształceniu wzór*) ten można napisać w postaci

$$T_1 = T\sqrt{1 + \beta f}$$

$$f \cong \frac{5}{8} \frac{q_1^{\,l}}{c}; \qquad \beta \cong 1{,}6 \frac{c}{Q}$$

f = ugięcie statyczne od obciążenia ruchomego traktowanego jako równomiernie rozłożone

Q = ciężar ustroju nośnego.

Trzeba nadmienić, że dla obciążeń drogowych zależności powyższe mają charakter wyłącznie orientacyjny, gdyż obciążenie ruchome nie jest położone na belce bezpośrednio, lecz za pośrednictwem opon i resorów, co zmienia charakter działania dynamicznego i wpływa na okres T_1.

W takim przypadku przyjmując dla mostu schemat wg rys.2 i zakładając, że układ most - pojazd tworzy liniowy sprzężony układ bez tłumienia (rys.4) można napisać wzór na częstości tego układu:

$$\omega_{I,II} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}\right)^2 + \frac{c_2^2}{m_1 m_2}}} \qquad (5)$$

gdzie:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m_1}}; \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}$$

Jeśli przyjąć $m = m_2$ to najwolniejsza częstość własna wyniesie

$$\omega_2' = \sqrt{\frac{c_1 c_2 (c_1 + c_2)}{m_2}}$$

---

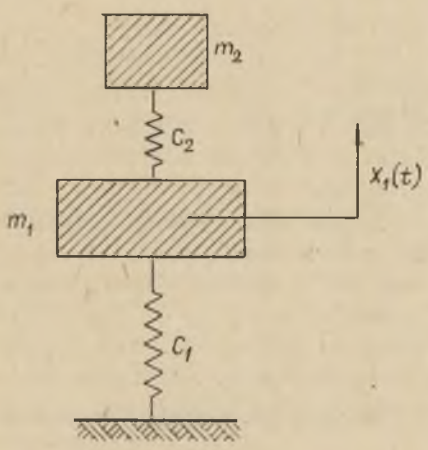
*) Obszerne uzasadnienie badawcze wzoru (4) podaje J.Iljasiewicz [5].

Przykładowo dla mostu żelbetowego

$$l = 22 \text{ m}; \quad c_1 = 7330 \text{ t/m}; \quad m_1 = 10{,}5 \text{ t.sek}^2/\text{m}$$

i pojazdu

$$m_2 \sim 1{,}5 \text{ t.sek}^2/\text{m}; \qquad c_2 = 105 \text{ t/m}$$



Rys.4. Schemat zastępczy układu most - obciążenie

otrzymamy:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{7330 + 105}{10{,}5}} = 26{,}6 \left[1/\text{sek}\right];$$

$$n_1 = \frac{26{,}6}{2\pi} = 4{,}24 \text{ Hz}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{105}{1{,}5}} = 8{,}34 \left[1/\text{sek}\right];$$

$$n_2 = \frac{8{,}34}{2\pi} = 1{,}33 \text{ Hz}$$

$$\omega_{I,II} = \sqrt{\frac{26{,}6^2 + 8{,}34^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{26{,}6^2 - 8{,}34^2}{2}\right)^2 + \frac{105^2}{10{,}5 \cdot 1{,}5}}} = \sqrt{389{,}5 \pm 321}$$

$$\omega_I = 26{,}7 \left[1/\text{sek}\right]; \qquad n_I = \frac{26{,}7}{2\pi} = 4{,}26 \text{ Hz}$$

$$\omega_{II} = 8{,}26 \left[1/\text{sek}\right]; \qquad n_{II} = \frac{8{,}26}{2\pi} = 1{,}32 \text{ Hz}$$

Podobnie sprawa przedstawia się w innych mostach drogowych. W mostach kolejowych różnice są zwykle znacznie większe, ale częstości układu mieszczą się zawsze na zewnątrz częstości składowych.

Rozważania dotychczasowe nie uwzględniały wpływu tłumienia na okres drgań swobodnych. Po uwzględnieniu tego czynnika równanie na okres drgań przyjmie znaną postać

$$T_m = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \varrho^2}} \tag{1a}$$

Wzór na T_m możemy również po przekształceniach napisać w postaci

$$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{2(c - k)}} \text{ sek} \tag{1b}$$

Wartości ϱ i k charakteryzujące tłumienie zostaną omówione niżej.

1.2.3. Ugięcia a okres drgań

Częstość drgań pionowych jest funkcją pionowej sztywności tj. funkcją ugięcia mostu.

Jeśli $c = \frac{48\ EJ}{l^3}$, a ugięcie środka rozpiętości od obciążenia $p = \frac{Q}{l}$ wynosi $f = \frac{5}{384} \cdot \frac{pl^3}{EJ}$ to po przekształceniach możemy napisać

$$T_m = 2\sqrt{\frac{384 \cdot f}{480 \cdot g}} = 1{,}795\sqrt{f} \tag{1c}$$

wobec tego

$$f = 0{,}31\ T_m^2$$

Można zatem stwierdzić, że okres drgań swobodnych nietłumionych jest proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z ugięcia (obliczeniowego) od obciążenia stałego. Ponieważ

nie zawsze wykonujemy obliczenie, a najczęściej mierzymy ugięcie od obciążenia użytkowego, to wychodząc z zależności

$$f_q = f \cdot \frac{q}{g} \text{ otrzymamy}$$

$$T_m = 1{,}795 \sqrt{\frac{g}{q} f_q} \qquad (1d)$$

gdzie q jest obciążeniem użytkowym, a f_q ugięciem od tego obciążenia.

Stwierdzić trzeba, że wzory (1c) i (1d) są bardzo przydatne w praktyce, gdyż z wystarczającą technicznie dokładnością i szybko pozwalają wyliczyć pierwsze przybliżenie okresu drgań własnych dla większości mostów.

Pewien wyjątek stanowią tutaj jednak mosty sprężone. Ze względu na skąpy materiał doświadczalny z tego zakresu, brak jest danych dla jednoznacznego określenia sztywności dynamicznej ustroju nośnego, co utrudnia dokładne ustalenie ugięć. W związku z tym obserwuje się niekiedy poważne różnice między obliczonym a pomierzonym okresem drgań swobodnych. W cytowanych poprzednio badaniach G.Kuźniecowa [12] wyznaczono stosunek

$$\frac{\omega_{obl}}{\omega_{pom}} = \frac{1{,}0}{0{,}7} = 1{,}43$$

Różnica ta świadczyć by mogła o większej niż się zwykle przyjmuje - sztywności konstrukcji sprężonych. Jednak zakres tych badań był zbyt mały i z wydaniem ostatecznego sądu trzeba jeszcze zaczekać do zakończenia badań będących w toku.

1.2.4. Wpływ czynników konstrukcyjnych na częstość drgań swobodnych mostów

Istnieje duża zbieżność między wynikami obliczeń, a wielkościami uzyskanymi z pomiaru w zakresie ustalenia częstości drgań swobodnych mostów kolejowych belkowych względnie płytowych (o dużym stosunku rozpiętości do szerokości). Natomiast w mostach drogowych, gdzie ustrój nośny jest bardziej złożony, stwierdzono kilkakrotnie w czasie badań poważne różnice w charakterystyce dynamicznej belek głównych

w zależności od ich położenia w ruszcie. Odchylenia pomierzonych częstości od średniej dla poszczególnych belek mogą przekraczać 10 - 20%.

Różnice te wynikają prawdopodobnie z niemożności rachunkowego ujęcia różnych warunków pracy konstrukcyjnej i statycznej poszczególnych belek ustroju nośnego.

Wymienić tutaj należy:

a) wpływ poprzecznego rozdziału obciążenia między belkami rusztu co wiąże się ze sztywnością i układem stężeń poprzecznych oraz ewent. ukosem i warunkami podparcia mostu,

b) wpływ ortotropii w mostach płytowych i gęstych rusztach,

c) odchylenia materiału od modelu Hooke'a oraz zmienność dynamicznego modułu odkształcenia i zmienność przekroju belki żelbetowej.

Wiadomo, że obciążenia ruchome działające na most pulsująco zmniejszają sztywność konstrukcji. (Wraz ze wzrostem i ilości cykli obciążenia zwiększają się ugięcia). Wynika to ze zmniejszenia się modułu odkształcenia, zwiększenia się ilości i wielkości rys oraz zmniejszenia współudziału partii rozciąganej w pracy całości belki.

Przy mostach sprężonych wyłania się dodatkowy problem uwzględnienia wpływu sprężenia. Wprawdzie badania Denkhausa i Dücka [18] wykazały że wielkość sprężenia nie wpływa w zasadzie na amplitudy drgań i częstość rezonansową, ale częstość naturalna wyraźnie rośnie wraz ze wzrostem siły sprężającej co wiąże się z powiększeniem sztywności. Przy pojawieniu się rys częstość drgań wyraźnie spada *).

1.3. Niektóre problemy tłumienia w mostach

1.3.1. Miary tłumienia

Ważnym parametrem obliczenia dynamicznego mostu jest wielkość tłumienia charakteryzująca zdolność konstrukcji do stopniowego wygaszania drgań. Ubywanie kolejnych amplitud

---

*) Wszystkie te problemy wpływu konstrukcji na parametry dynamiczne wymagają dalszych szerokich badań ze względu na skąpy i niejednokrotnie sprzeczny ze sobą [19][20] dotychczasowy materiał doświadczalny z tego zakresu.

wiąże się ze stopniową utratą energii na pokonywanie różnorakich oporów ruchu.

Przed przystąpieniem do uwag na temat poszczególnych składników tłumienia konieczne jest ustosunkowanie się do miary tłumienia sumarycznego. W literaturze brak jest w tym zakresie jasności, co na równi z brakiem jednolitości oznaczeń utrudnia należyte wykorzystanie dotychczasowych badań. Ze spotykanych kilkunastu w różny sposób powiązanych miar tłumienia wymienione zostaną jedynie najbardziej rozpowszechnione.

W dotychczasowych rozważaniach prawie zawsze traktowano tłumienie w mostach jako zjawisko jednolite przyjmując, że jest proporcjonalne do prędkości. Jeżeli zgodzimy się z tym uproszczonym założeniem - wprowadzamy do podstawowego równania ruchu belki czynnik "k", który jest rozumiany jako siła oporu występująca przy szybkości drgań równej jedności. Wielkość "k" określa się zwykle w tonach na jednostkę prędkości (m/sek).

Często zamiast wartością "k" posługujemy się tzw. współczynnikiem drgań ustroju nośnego $\varrho = \frac{k}{2m}$ względnie bezwymiarową wielkością

$$\beta = \frac{k}{\sqrt{mc}}$$

Współczynnik ϱ powiązany jest z logarytmicznym dekrementem tłumienia δ znaną zależnością

$$\delta = \varrho \cdot T$$

Wynika z tego, że δ jest zależne od częstości drgań obiektu. Biorąc jednak pod uwagę, że w mostach częstości zmieniają się w stosunkowo niewielkich granicach, możemy uznać δ jako stałą związaną z materiałem i rodzajem konstrukcji.

Oprócz δ stosowany jest również współczynnik tłumienia D

$$D = \frac{2\pi}{\omega} \cdot \varrho = \frac{k\pi}{\sqrt{mc}}$$

Jest on w zakresach, z którymi mamy do czynienia w mostownictwie bliski logarytmicznemu dekrementowi tłumienia. I tak gdy

$$\varrho_1 = \frac{\varrho}{\omega} \leqslant 0{,}2$$

z dostateczną dla celów praktycznych dokładnością można przyjmować

$$D \sim \delta$$

Zwrócić jednak trzeba uwagę, że stosowana w piśmiennictwie niemieckim bezwymiarowa miara tłumienia D oznacza coś innego

$$D' = \frac{k}{2\,m\sqrt{\frac{c}{m}}} = \frac{k}{2\sqrt{mc}} = \frac{\beta}{2}$$

Wobec tego $D = \frac{\pi}{2} \cdot D' = 1{,}57\ D'$.

Ponadto dla naszego zestawienia będą miały znaczenie następujące zależności

$$\varrho_1 = \frac{D}{2\pi} \sim \frac{\delta}{2\pi}; \qquad k = \frac{m\omega}{\pi}\delta$$

Niezależnie od wyżej wymienionych, używana jest niekiedy tzw. miara tłumienia właściwego ψ.

Jeżeli stosunek kolejnych amplitud tego samego znaku oznaczymy przez ε to możemy napisać

$$\varepsilon = \frac{a_n}{a_{n+1}}; \qquad \varepsilon = e^{\delta} = e^{\varrho \cdot T}$$

Porównując dalej wykładnik potęgowy przy "e" otrzymamy:

$$T = \frac{k\,T}{2\,m} = \frac{2\pi\,k\sqrt{\frac{m}{c}}}{2\,m} = k\pi\,\frac{1}{\sqrt{cm}}$$

ponieważ "k" wymiarowo stanowi wielokrotność $\sqrt{mc}$ można napisać

$$k = \beta\sqrt{mc}$$

gdzie β jest bezwymiarowym współczynnikiem liczbowym mniejszym od jedności ($\beta < 1$).

Wobec tego

$$\frac{\pi k}{\sqrt{mc}} \sim \pi\beta \qquad \text{czyli} \quad \delta = \pi \cdot \beta$$

względnie

$$\frac{1}{\beta} = \frac{\pi}{\delta}$$

1.3.2. Wielkość tłumienia

Wielkości omówionych wyżej miar tłumienia dla różnych typów wolnopodpartych mostów drogowych mniejszych i średnich rozpiętości - zestawione są w tabeli nr 1. Wartości w poszczególnych rzędach uzyskiwane są nie z wzajemnych przeliczeń, lecz z badań.

Miary tłumienia podane w tabeli 1 są wartościami średnimi. W licznych przypadkach w czasie badań uzyskiwano wartości odbiegające od zamieszczonych w tabeli.

W szczególności rozbieżności rosły dla mostów małych ($l < 10$ m) gdzie tłumienie rośnie gwałtownie ze względu na dominujący wpływ czynników kontrukcyjnych (podparcie, sposób rozwiązania połączenia ustroju nośnego z przyczółkami itp.). Dlatego też w tym obszarze dane pomiarowe są bardzo niejednolite (duży rozrzut wyników).

W tabeli 1 zawarte są również dane odnośnie tłumienia mostów sprężonych, zestawione na podstawie badań wykonanych w kraju oraz badań zagranicznych [19] [10] [21] [22] *).

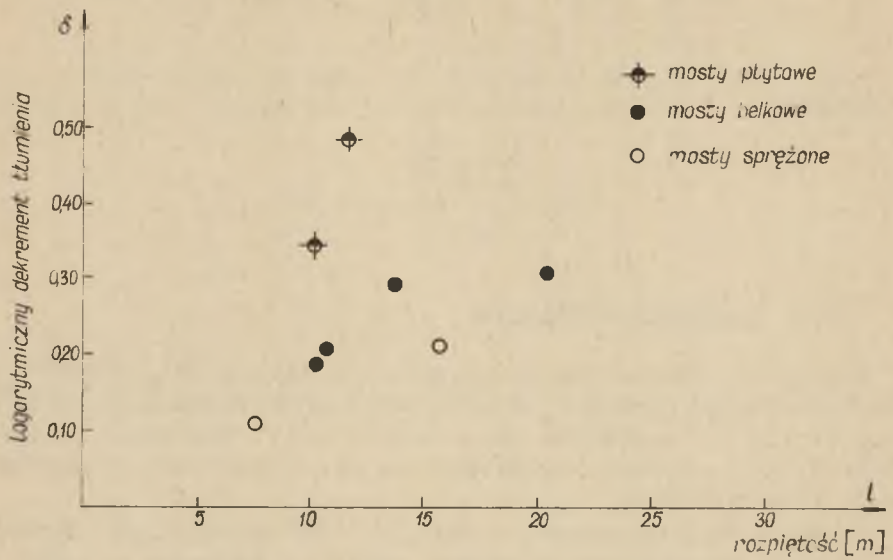
Zwrócić jednak trzeba uwagę, że na wyniki pomiarów tłumienia niewątpliwy wpływ wywiera sposób przeprowadzenia badań. Zestawienie dane pochodzą z różnych pomiarów i w związku z tym wzajemny stosunek nie zawsze ściśle odpowiada podanym poprzednio zależnościom teoretycznym. W szczególności np. źródła niemieckie podają $D' > \frac{2}{\pi} D$.

Z uzyskanych danych wynika, że wielkość tłumienia w mostach sprężonych są bliższe wartościom charakteryzującym mosty stalowe niż żelbetowe. Wynika to z zastosowania betonu wysokiej jakości.

---

*) Korzystano również z trzech niepublikowanych pomiarów EMPA-Zurich (co zostało zaznaczone w tabeli nr 2).

Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia pomierzone przez autora na mniejszych mostach betonowych zestawione są na wykresie (rys.5).



Rys.5. Tłumienie (całkowite) w mostach żelbetowych

Parametry obliczenia dynamicznego tych mostów zestawione są w tabeli nr 2. Dla porównania podano również dane z badań pięciu mostów za granicą (poz. 5,8,9,11 i 12).

Największa pomierzona wartość δ wynosiła 0,49. Dotyczyła ona mostu płytowego wykonanego z betonu o stosunkowo niskiej wytrzymałości (R_w ~ 160 - 190 kG/cm^2). Warunki podparcia tego mostu nie gwarantowały w pełni swobodnych odkształceń ustroju nośnego.

Jak wynika z badań B.Weinblata [23] a także innych wcześniejszych doświadczeń - dekrement logarytmiczny tłumienia dla betonu marki 400 wynosił ok. 0,1, a dla betonu marki "150" wzrósł około 0,25 - 0,30. Wiąże się to ze zmianą wartości E [24][25]. Zwrócić trzeba uwagę, że pomiary tłumienia przeprowadzone na małych elementach pracujących w innych niż w mostach stanach napięcia nie mogą być dla mostów żelbetowych miarodajne. Wiąże się głównie z wpływem rys na tłu-

Tabela 1

Bezwymiarowe miary tłumienia[x)] dla belkowych mostów drogowych o rozpiętościach 10-40 m

Rodzaj konstrukcji mostu		Współczynniki bezwymiarowe					
		ψ	$\varepsilon = \frac{a_n}{a_{n+1}}$	$\delta \sim D$			$\beta = \frac{k}{\sqrt{mc}}$
				l ~ 10-15 m;		l = 30-40 m	
Żelbetowe	płytowe	~ 0,15-0,25	1,38	0,41	(0,32)	0,22	0,20
	belkowe		1,23	0,31	(0,22)	0,15	0,12
Sprężone	płytowe	ψ = 0,10	1,195	0,28	(0,17)	0,10	0,095
	belkowe		1,155	0,20	(0,14)	0,063	0,065
Stalowe	z żelbetową płytą współpracującą	-	1,130	0,163	(0,121)	0,072	0,064
	blachownica	ψ ~ 0,07	1,105	0,120	(0,090)	0,050	0,046
	kratownice		1,052	0,063	(0,05)	0,015	0,022

x) W tabeli podane są wartości uważane za przeciętne. W poszczególnych przypadkach odchylenia mogą być znaczne.

Parametry obliczenia dynamicznego betonowych mostów drogowych
(zestawienie przykładowe dla mostów wolnopodpartych)

Lp.	Rodzaj	Schemat konstruk.	Rozpiętość l (m)	Stosunek $\frac{h}{l}$	Ciężar stały p (t/mb)	Masa sprowadzona $m = \frac{17 \cdot p \cdot l}{35\ g}$	Sztywność pionowa $C = \frac{1}{v}$ (t/m)	Częstość pionowych drgań swobodnych Hz (sek^{-1})	Współczynniki tłumienia δ	ϱ (sek^{-1})	k $\frac{(t \cdot sek)}{m}$	Uwagi
1	ŻB	I	10,40	$\frac{1}{14,1}$	23,20	11,70	33000	8,6	0,34	2,88	67,4	przekrój pełny $\alpha = 78^{\circ}30'$ (Szombierki)
2	ŻB	B	10,50	$\frac{1}{10,8}$	18,60	9,45	11780	5,6	0,182	1,02	19,3	5 belek głównych (Będzin)
3	ŻB	B	10,60	$\frac{1}{11,0}$	9,84	5,02	35800	13,50	0,202	2,70	27,2	5 belek głównych (Kozłowa Góra)
4	ŻB	P	11,80	$\frac{1}{15,7}$	24,70	14,15	20250	6,1	0,49	2,95	83,4	przekrój pełny 2 wsporn. (Będzin)
5	ŻB	P	12,00	$\frac{1}{14,1}$	19,60	11,40	64000	12,05	0,192	2,29	52,2	przekrój pełny (Hügelsheim)
6	ŻB	B	13,65	$\frac{1}{11,7}$	9,76	6,49	13160	7,24	0,29	2,08	27,0	4 belki główne; skos (Świętochłowice)
7	BS	B	16,00	$\frac{1}{20,0}$	7,85	6,28	6860	5,31	0,123	0,64	7,79	Chorzów 2x4 belki główne
8	BS	P	17,80	$\frac{1}{29,7}$	9,78	8,39	6500	4,4	0,099	0,442	7,41	przekrój z otworami (Saane-EMPA)
9	BS	P	19,40	$\frac{1}{29,0}$	8,05	7,41	7810	5,0	0,190	0,945	14,95	przekrój z otworami (EMPA)
10	ŻB	B	20,02	$\frac{1}{12,5}$	11,80	11,48	8140	4,30	0,310	1,31	30,1	4 belki główne; skos (Gliwice)
11	BS	P	27,75	$\frac{1}{26,5}$	18,20	25,20	18000	4,25	0,022	0,094	4,71	przekrój z otworami (Bleibach)
12	BS	B	35,0	$\frac{1}{22,6}$	10,80	18,90	7250	3,1	0,110	0,334	12,98	przekrój jednoskrzynkowy (Lustenau-EMPA)

ŻB-żelbetowy BS-sprężony P-płytowy B-belkowy

Tabela 3

Parametry obliczenia dynamicznego stalowych mostów drogowych
(zestawienie przykładowe)

Lp.	Schemat konstr.	Układ pomostu	Rozpiętość l (m)	$\frac{h}{l}$	Ciężar stały p (t/mb)	Masa sprowadzona m ($t \cdot sek^2 m^{-1}$)	Sztywność pionowa $c = \frac{1}{(t/m)v}$	Częstość pionowych drgań swobodnych Hz (sek^{-1}) obl.	pom.	Współczynniki tłumienia δ	ϱ (sek^{-1})	k ($\frac{t \cdot sek}{m}$)	Uwagi
1.	Blachownice spawane z żelb. płytą wsp.	górą	13,52	$\frac{1}{14,0}$	7,22	5,05	13370	8,27	10,26	0,121	0,923	9,32	5 belek główn. Lipiny
2.	jw.	jw.	12,00	$\frac{1}{12,4}$	7,22	4,50	18990	9,91	11,19	0,161	1,66	14,98	jw.
3.	Blachownice nitowane	jw.	11,50	$\frac{1}{9,1}$	8,26	4,62	23540	8,70	10,03	0,095	0,818	7,56	2 belki główne Biskupice
4.	jw.	wgłębiony	20,35	$\frac{1}{10,5}$	9,84	9,99	13170	5,85	6,16	0,076	0,14	2,75	2 belki główne Bobrek
5.	jw.	jw.	15,70	$\frac{1}{8,0}$	7,42	5,65	19600	9,46	8,73	0,082	0,77	8,67	2 belki główne Skoczów
6.	Kratownice nitowane	dołem	24,0	$\frac{1}{7,4}$	8,00	7,68	5720	4,39	4,89	0,061	0,263	4,04	Ligota
7.	jw.	jw.	24,0	$\frac{1}{7,4}$	12,00	11,51	3130	2,65	-	-	-	-	Gliwice

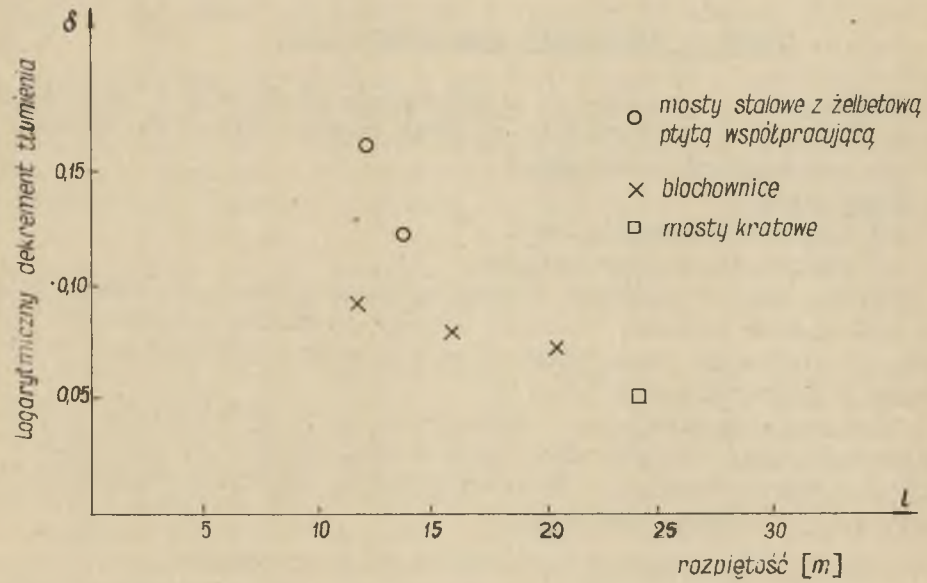
mienie. Jest oczywiste, że zarysowania zwiększają wartość δ Różnice są poważne i wynoszą przykładowo [21]:

belka żelbetowa przed zarysowaniem $\delta = 0,145$
po zarysowaniu $\delta = 0,357$
belka sprężona przez zarysowaniem $\delta = 0,136$
po zarysowaniu $\delta = 0,204$

Z powyższych rozważań wynika, że dla przeciętnych warunków pracy mniejszych betonowych mostów drogowych ($l < 15$ m) określić można wielkość δ na 0,25 - 0,30. Oznacza to, że po ok. 8 wahnięciach ustroju nośnego wytłumione jest ponad 80% energii i amplituda staje się około 6 razy mniejsza niż jej wartość początkowa (od impulsu jednostkowego).

W związku z tym stwierdzić należy, że pomijanie zjawiska tłumienia konstrukcji przy analizie obliczeniowej drgań małych mostów może prowadzić do poważnych nieścisłości.

Niezależnie od badań nad tłumieniem mostów betonowych przeprowadzono pomiary tłumienia na stalowych mostach drogowych.



Rys.6. Tłumienie w drogowych mostach stalowych

Rezultaty tych badań przedstawia rys.6. Parametry obliczenia dynamicznego tych mostów zestawione są w tabeli nr 3.

Z tebeli i wykresów widać, że współczynniki tłumienia mostów drogowych są w zasadzie wyższe niż w mostach kolejowych. Aczkolwiek znane są przykłady [26] pomierzenia nawet na stalowych mostach kolejowych bardzo wysokiego tłumienia, to jednak należy to znać za zjawisko wyjątkowe, które można wytłumaczyć bardzo małymi rozpiętościami badanych przęseł (l = = 3,90 m i 6,10 m) i napewno specjalnymi warunkami lokalnymi.

Większe tłumienie mostów drogowych wynika z ich większej szerokości i na ogół mniej starannie wykonanego systemu podparcia. Ze względu na mniejsze reakcje - łożyska wykonane są z mniejszą dbałością o sprowadzenie do minimum tarcia niż ma to miejsce w mostach kolejowych. Przy mniejszych rozpiętościach łożyska są styczne, a ponadto ze względu na szerokość jest ich więcej niż w mostach kolejowych. Nie trzeba dodawać, że styczne łożyska bardzo zwiększają tłumienie w stosunku do wałkowych.

Ponadto przy mostach szerokich, które nie mają łożysk dwukierunkowych (tj. umożliwiających również przesuw poprzeczny) tłumienie zwiększa się wyraźnie.

1.3.3. Uwagi o tłumieniu konstrukcyjnym

Omówienie wpływu tarcia w łożyskach wiąże się z podziałem sumarycznej miary tłumienia na dwie części składowe zgodnie z ich przyczynami powstania.

Mamy tutaj:

a) tłumienie materiałowe,

b) tłumienie konstrukcyjne.

Oprócz tego w mostach większych rozpiętości spotykamy się ze zjawiskiem wymiany energii między pojazdem a ustrojem nośnym, co nazywane jest tłumieniem pozornym. Zwrócił na to uwagę J.Naleszkiewicz [8].

Tłumienie wynikające z wewnętrznego niesprężystego oporu materiału jest zbadane dość dokładnie, natomiast znacznie mniej wiemy o tłumieniu konstrukcyjnym, na które wpływają następujące główne przyczyny:

- rodzaj konstrukcji ustroju nośnego i podpór,
- rodzaj nawierzchni a zwłaszcza jej własności sprężyste,
- opór połączeń związany z tarciem między łączonymi częściami (styki, nity itp.),
- tarcie w łożyskach i przegubach oraz ewent. wpływ współdziałania podpór,

- inne czynniki (np. niesprężysty opór szyn na podporach przeciwko obrotowi drgającego ustroju nośnego).

Rozdzielenie poszczególnych składników tłumienia i ustalenie ich wpływu na wartość sumaryczną ma duże znaczenie ze względu na ich różny sposób działania na drgania. W przybliżeniu przyjmuje się, że tłumienie materiałowe działa proporcjonalnie do prędkości, a tłumienie konstrukcyjne ma właściwie charakter stały.

Dlatego właśnie przyjęcie współczynnika k jako proporcjonalnego do prędkości odkształcenia jest nieścisłe. Błąd jednak maleje wraz z rozpiętością, gdyż wraz z jej wzrostem zmniejsza się rola konstrukcyjnego składnika tłumienia. Pogląd ten potwierdzają doświadczenia H.Bay'a [19] na moście sprężonym o rozpiętości $l = 43,36$ m.

W mostach bardzo małych ($l < 10$ m) w których konstrukcyjne składniki tłumienia dominują współczynnik "k" (i pochodne) nie powinien mieć jednak zastosowania.

W świetle powyższych uwag wartość "k" okazuje się czynnikiem zastępczym reprezentującym obydwa zasadnicze elementy tłumienia w mostach. Zastosowanie tak rozumianego współczynnika "k" ma pewne uzasadnienie w tym, że upraszcza obliczenia.

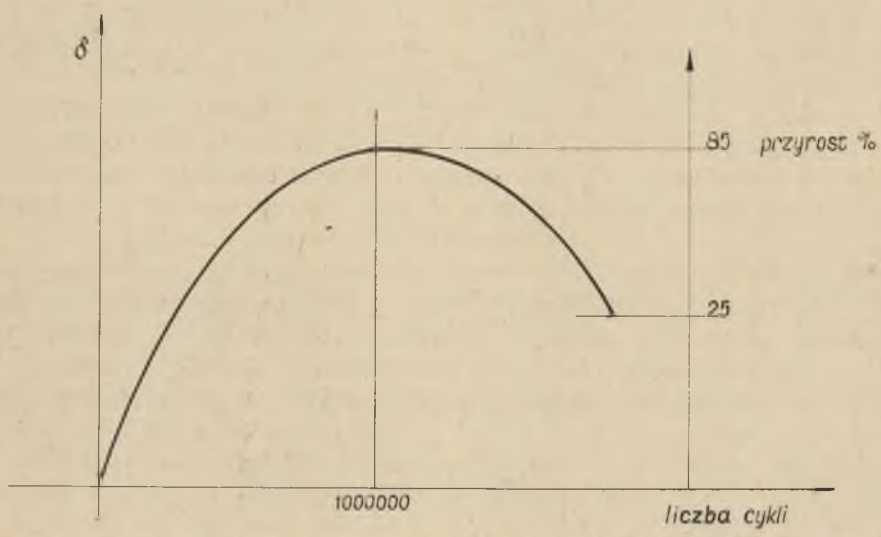
Jednoznaczne określenie wielkości tłumienia konstrukcyjnego a zwłaszcza jego głównej części pochodzącej od tarcia na łożyskach nastręcza znaczne trudności badawcze, a ponadto wymaga przeprowadzenia pomiarów na znacznej ilości obiektów. Dotychczasowe pomiary wykazują, że wpływ ten przy mniejszych a szerokich mostach ($l \cong 12$ m) - zwłaszcza żelbetowych może przekraczać nawet 50% całkowitej miary tłumienia. Wartość średnia dla zbadanych pięciu mostów (łożyska styczne) wynosiła $\delta_k = 0,179$.

Oczywiście oprócz bezpośredniego pomiaru jest jeszcze możliwość pośredniego określenia całości tłumienia konstrukcyjnego przez wykorzystanie na ogół dobrze zbadanych wielkości tłumienia materiałowego. Ograniczanie się jednak do uwzględnienia tłumienia materiałowego jest jednak w mostach małych i średnich niewystarczające i prowadzi do błędnej oceny stanu wytężenia konstrukcji, zwłaszcza w obszarze rezonansowym i przy uderzeniu.

Badania przeprowadzone nad tłumieniem, a zwłaszcza tłumieniem konstrukcyjnym mają nie tylko znaczenie teoretyczne, lecz również duże znaczenie techniczne, gdyż miara tłumienia może być cennym wskaźnikiem świadczącym o ogólnym stanie mostu. Zaznaczyć jednak trzeba, że obecny stan badań nie pozwala jeszcze wykorzystać jej do tego celu.

1.3.4. Tłumienie pierwotne i "robocze"

W mostach, które podlegają zmęczeniowemu działaniu pulsacji następuje z czasem w odróżnieniu od zwyczajnych konstrukcji budowlanych zmiana charakterystyki dynamicznej, a w tym również współczynników tłumienia. Problem ten nie został jeszcze dokładnie zbadany, ale na podstawie dotychczasowych pomiarów przeprowadzonych w kraju [28] i za granicą [29] można stwierdzić, że belki sprężone pod działaniem obciążenia pulsującego zwiększają poważnie współczynnik tłumienia (w pewnej fazie nawet do 85% wartości pierwotnej). Przeciętnie można liczyć jednak na wartości mniejsze (rzędu 20 - 25%). Badania Troickiego w tym zakresie ilustruje rys.7.



Rys.7. Wpływ pulsacji na tłumienie w belkach sprężystych

Natomiast tłumienie w belkach żelbetowych ulega w takim przypadku zmniejszeniu o ok.20%. W mostach stalowych różnice nie przekraczają kilku procent.

Rozdział II

DZIAŁANIE OBCIĄŻENIA NA MOSTY DROGOWE

2.1. Obciążenia mostów drogowych

Różnorodność obciążeń działających na mosty drogowe jest większa niż w mostach kolejowych, a sposób ich działania jest bardziej zawikłany, co wynika z mniejszej regularności ich działania. Z tego stanowiska obciążenia ruchome mostów drogowych mniejszych i średnich rozpiętości możemy poszeregować następująco:

pojazdy samochodowe,
tramwaje,
ciągniki gąsienicowe,
inne rodzaje obciążenia (walce, wozy konne, tłum itd.).

Wraz z upływem lat zmienia się zarówno wielkość nacisków jak i charakter działania wymienionych rodzajów obciążenia. Mosty drogowe kilkadziesiąt lat temu obciążone były nieznacznie i to siłami, które tylko w wyjątkowo niekorzystnych okolicznościach mogły spowodować znaczniejsze dynamiczne przeciążenia. Obecnie wraz z wprowadzeniem ciężkich samochodów i obciążeń gąsienicowych jadących z dużymi prędkościami, wpływ dynamiczny wzrósł istotnie tak, że mosty drogowe stały się samodzielnym problemem pod względem obliczenia dynamicznego.

W latach trzydziestych w ZSRR zostały przeprowadzone szerokie badania zmierzające do ustalenia wpływu różnych form obciążenia tłumem i wozami konnymi na współczynnik dynamiczny [30]. Rola tych obciążeń obecnie radykalnie zmalała tak, że mimo zmiany form konstrukcyjnych mostów dalsze badania nad tym problemem nie znalazłyby usprawiedliwienia. Podkreślić jednak należy, że jeszcze dzisiaj na niektórych mostach zaobserwować można, że obciążone pojazdy konne (z kołami posiadającymi obręcze stalowe) dają na nierównym bruku

współczynniki dynamiczne większe niż obciążenia samochodowe (i sięgające 1,9 - 2,0)*).

Obciążenia tłumem mają istotny wpływ jedynie na wymiarowanie drugorzędnych elementów ustroju nośnego. Tylko przy projektowaniu kładek dla pieszych rozważa się niekiedy wpływ dynamiczny tego rodzaju obciążenia. Jak wynika z badań Rabinowicza, nacisk nóg człowieka posiada okresy drgań wynoszące:

przy marszu $T_1 \sim 0,4 - 0,5$ sek

przy biegu $T_2 \sim 0,3 - 0,4$ sek.

Naciski te można uważać za sinusoidalnie zmienne. Zaznaczyć należy, że drgania swobodne kładek żelbetowych mają okresy tego samego rzędu.

Współczesne ciężkie pojazdy samochodowe poruszają się z dużymi prędkościami (nawet do 80 km/godz.) co zwiększa ich wpływ dynamiczny w pierwszym rzędzie ze względu na uderzeniowe działanie nierówności. Problem ten będzie w dalszym ciągu przedmiotem rozważań.

Znaczne prędkości osiągają również ciągniki gąsienicowe (do 60 km/godz.) a zwłaszcza czołgi. Wpływ dynamiczny jest tutaj bardzo znaczny zarówno przy obciążeniach pojedynczymi pojazdami jak i kolumnami. Można to stwierdzić jednoznacznie aczkolwiek materiał doświadczalny z tego zakresu jest skąpy. Rodzaj wpływu dynamicznego jest tutaj zupełnie inny niż przy obciążeniach samochodowych ze względu na inne parametry dynamiczne pojazdu i odmienny sposób działania.

Dynamiczne działanie obciążeń tramwajowych jest również zależne w pierwszym rzędzie od prędkości, które jednak w naszych warunkach nie przekraczają 30 km/godz. Problematyka jest tutaj bliska badaniom nad wpływem dynamicznym innych pojazdów szynowych (np. pociągi elektryczne). Podkreślić jednak należy, że nawierzchnia tramwajowa jest zazwyczaj gorzej utrzymana i w związku z tym wpływ nierówności jest większy.

Jak widać z powyższego zestawienia problematyka działania obciążeń drogowych na mosty jest bardzo rozległa i nie może być wyczerpana w jednym opracowaniu. Dlatego też w dal-

---

*) Podobne zjawisko występuje przy przejeździe walców drogowych powodując mimo stosunkowo dużej powierzchni docisku kół i małej prędkości znaczne wartości przeciążenia dynamicznego.

szym ciągu ograniczymy się do rozpatrzenia działania najważniejszego i najczęstszego rodzaju obciążenia - obciążenia samochodowego.

2.2. Działanie samochodu na most

2.2.1. Ogólne aspekty

Zwiększenie wytężenia elementów konstrukcyjnych ustroju nośnego na skutek dynamicznego działania obciążenia ruchomego na most drogowy mniejszej rozpiętości - może mieć w ogólności dwie przyczyny:

a) zmiana położenia sił na belce,
b) nierówności nawierzchni.

Problem pierwszy zostanie omówiony na innym miejscu, a określenie działania dynamicznego musi być poprzedzone analizą drgań pojazdu.

Drgania pojazdu drogowego mogą być wywołane przez przyczyny zewnętrzne i wewnętrzne. Do przyczyn zewnętrznych zaliczamy nierówności nawierzchni oraz wszelkie inne czynniki związane z charakterem konstrukcji mostu, natomiast mówiąc o przyczynach wewnętrznych mamy na myśli głównie pracę silnika w powiązaniu z układem konstrukcyjnym pojazdu.

Drgania samochodu są wypadkową tych czynników i mają w ogólności dwojaki charakter:

- wolne (stosunkowo) drgania całości nadbudowy (1 - 3 Hz)
- szybsze drgania osi (kół). Ich częstość wynosi ok. 9 - 15 Hz.

Charakter wykresu drgań samochodu przedstawiony jest na rys.8 [37].

W pewnych przypadkach może wystąpić zbieżność między częstościami drgań osi, a częstościami drgań swobodnych niektórych rodzajów małych mostów wzgl. innych belek o małej masie (np. elementy pomostu).

Zwykle jednak największe znaczenie mają drgania pierwszej grupy (1 - 3 Hz), gdyż okres drgań belek głównych większości mostów jest tego samego rzędu co okres drgań nadwozia.

Przy przejeździe przez nierówność następuje zmiana toru ruchu środka ciężkości samochodu, nadbudowa zaczyna drgać

i pojazd poczyna działać na nawierzchnię mostu szeregiem impulsów ginących z czasem na skutek tarcia wewnętrznego samochodu oraz tarcia na styku kół z nawierzchnią.

Rys.8. Schemat zależności P - ω dla samochodu ciężarowego

Ten właśnie szereg impulsów stanowi najważniejsze obciążenie dynamiczne mostów drogowych mniejszych rozpiętości.

2.2.2. Schemat dynamiczny i drgania samochodu

Pojazd samochodowy przedstawia ze stanowiska obliczenia dynamicznego układ drgający składający się z następujących głównych części składowych:

- nadwozie (z ramą, silnikiem i ewent. ładunkiem)
- resory i amortyzatory,
- masy nieuresorowane (osie, elementy zawieszenia i koła),
- elastyczne opony.

Ponadto jeśli mamy do czynienia z zespołem pojazdów (ciągnik i przyczepy), układ komplikuje się o dynamiczną pracę połączenia.

W ogólności pojazd drogowy, którego nadwozie traktujemy jako sztywne, posiada sześć stopni swobody. Są to przesunięcia w trzech kierunkach i skręcenia w trzech płaszczyznach.

Praktycznie wystarczy jednak wziąć pod uwagę trzy formy drgań [32]:

a) drgania pionowe - ω_p,

b) drgania skrętne podłużne - ω_s (wokół osi prostopadłej do kierunku jazdy, a przechodzącej przez punkt ciężkości),

c) drgania skrętne poprzeczne (wokół idealnej osi podłużnej wozu).

Ta ostatnia forma drgań występuje zazwyczaj przy zmianie kierunku jazdy oraz jako następstwo wpływów przypadkowych (jednostronnie działające nierówności). Jej wpływ na dynamiczne przeciążenie mostu jako całości jest niewielki i może nie być brany pod rozwagę.

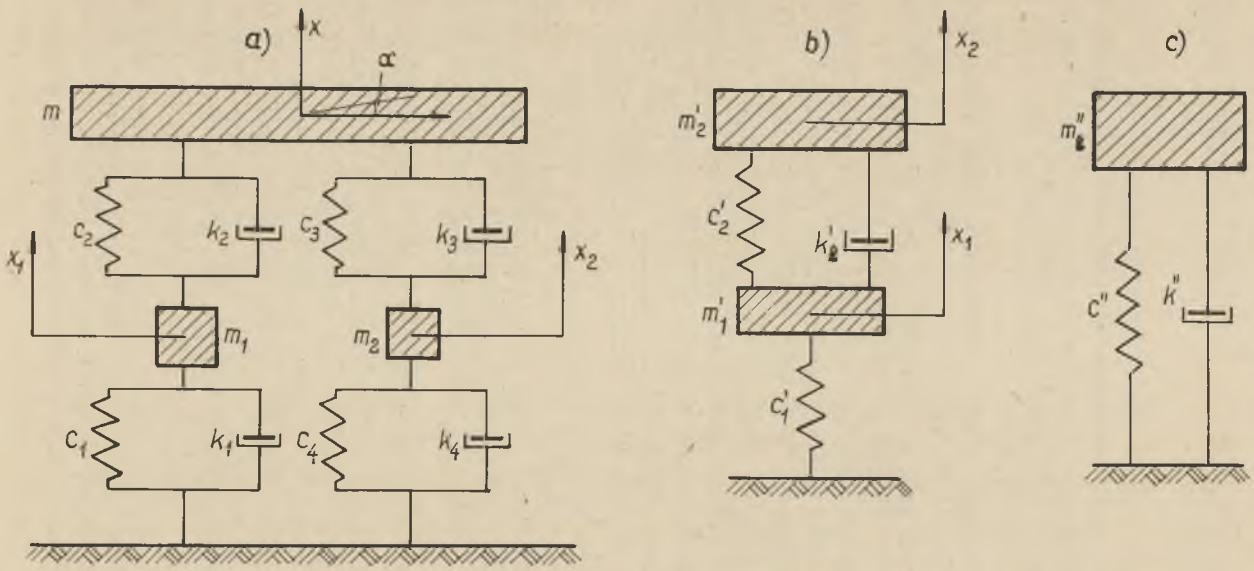
Dążenie do określania drgań pionowych oraz skrętnych podłużnych (galopowanie), a także drgań drugiego rzędu obu osi na drodze analitycznej - prowadzi nas do założenia modelu teoretycznego przedstawionego na rys.9a.

Jednak zastosowanie takiego modelu dobrze uwzględniającego rzeczywiste warunki pracy dynamicznej zmusza do bardzo skomplikowanych obliczeń, a próby wykorzystania do tego celu analizatorów analogowych względnie innych maszyn elektronowych są jeszcze w stadium początkowym (Włochy, Japonia).

Dlatego też stosowane są zwykle modele mniej dokładne (rys.9b i 9c), a przy obliczaniu zawieszenia samochodu korzysta się jeszcze w znacznej mierze z doświadczeń i danych statystycznych [33].

Model zastępczy (rys.9b) oparty jest na przybliżonym założeniu, że rozkład mas na długości jest równomierny (tzn. że można skoncentrować całą masę pojazdu w jego środku ciężkości), oraz że można zastąpić zawieszenie w czterech punktach przez układ wypadkowy.

We współczesnych samochodach stosunek masy nieuresorowanej do podwieszonej masy nadwozia wynosi 10 - 20%. Uwzględniając, że sprężystość ogumienia jest znacznie większa niż sprężystość zawieszenia (co przy wysokim ciśnieniu w oponach jakie występuje w samochodach ciężarowych - jest w pełni słuszne) można w niektórych przypadkach nieuresorowaną masę osi pominąć bez wprowadzania poważnych błędów w obliczenie. Analiza Gelfgata [37] wykazuje, że nieuwzględnienie masy nieuresorowanej (tzn. zastąpienie schematu 9b przez 9c) bardzo nieznacznie wpływa na wyliczone częstości podstawowe (błąd



Rys. 9. Schematy zastępcze samochodu.

a) układ o czterech stopniach swobody (ruch pionowy m_1, m_2, m oraz ruch skrętny α), b) układ o dwóch stopniach swobody (x_1 i x_2), c) układ o jednym stopniu swobody

wynosi 5 - 7%) a może zmieniać jedynie przyspieszenia. Oczywiście wartość c" wynosi w takim przypadku:

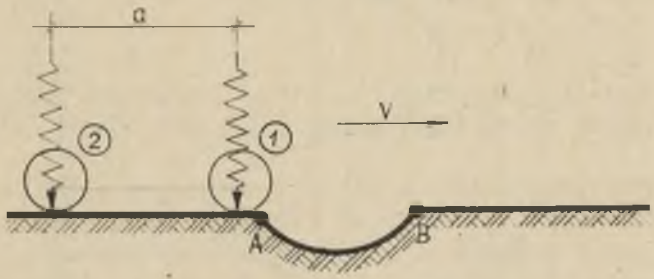
$$c'' = \frac{m_z}{f_1 + f_2} = \frac{c_2\, c_1}{c_1 + c_2}$$

przy czym f_1 oznacza ugięcie sprężyny c_1 pod działaniem siły $Q = (m_1 + m_2)g$ a f_2 dotyczy ugięcia sprężyny c_2 pod tą samą siłą ($f_2 = \frac{Q}{c_2}$).

Wyłania się zagadnienie, jaki stopień uproszczenia niesie ze sobą założenie, że rozkład mas na długości jest równomierny, tzn. że zastępujemy schemat 9a schematem 9b (rys.9).

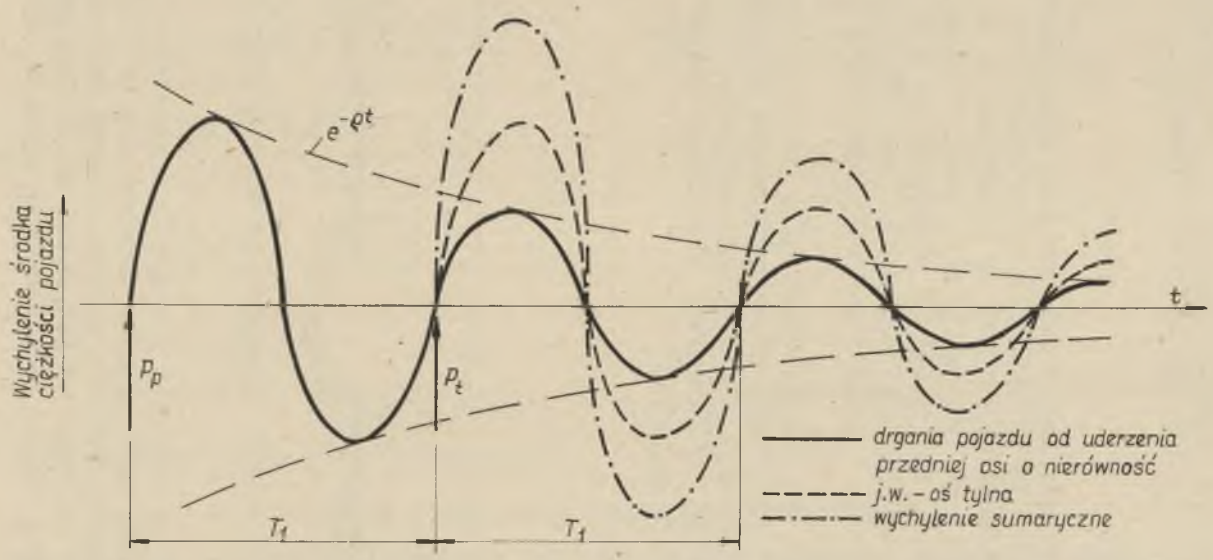
Jest oczywiste, że tak jak płaski model 9a pomija drgania skrętne poprzeczne, tak model 9b względnie 9c nie uwzględnia drgań skrętnych podłużnych. Konieczne jest zatem ustalenie sposobu występowania i wzajemnego stosunku drgań pionowych i skrętnych podłużnych.

Można wykazać, że rodzaj drgań jaki powstaje w dwuosiowym pojeździe przy przejeździe przez nierówność bruzdową jest w przybliżeniu zależny od odległości wzajemnej osi i prędkości ruchu. Natomiast na parametry tych drgań wpływa charakterystyka dynamiczna pojazdu.



Rys.10. Przejazd samochodu przez nierówność

W chwili gdy oś pierwsza wchodzi na przeszkodę "A" (rys.10), oś druga musi jeszcze przebyć odcinek "a", który jest równy odstępowi osi. Na przebycie tego odcinka potrzebny jest czas t_a (zależny od prędkości v). W tym czasie występują obie formy drgań, ale dominują drgania skrętne podłużne.



Rys.11. Wychylenia pojazdu, gdy obie osie działają w fazie (dominacja drgań pionowych)

W zależności od stosunku t_a do T_p (częstość drgań swobodnych pojazdu) wyróżnić możemy następujące dwie skrajne możliwości oraz całą gamę przypadków pośrednich:

a) jeśli $t_a = nT_p$ (rys.11) drgania pojazdu będą jednolite tj. występować będą jako główna forma drgania pionowe. Prędkość pojazdu, przy której te drgania wystąpią jest równa

$$V_p = \frac{a}{T_p}$$

Przykładowo dla samochodu, którego częstość drgań nadbudowy wynosi 2,0 Hz a odstęp osi 4,0 m otrzymamy:

$$V'_p = \frac{4,0}{0,5} = 8 \text{ m/sek} = 28,8 \text{ km/godz.}$$

$$V''_p = 57,6 \text{ km/godz.}$$

b) jeśli $t_a = \frac{T_p}{2}$ (rys.12) wtedy dominującą formą drgań powinny być drgania podłużne skrętne. Odpowiednia prędkość wynosi

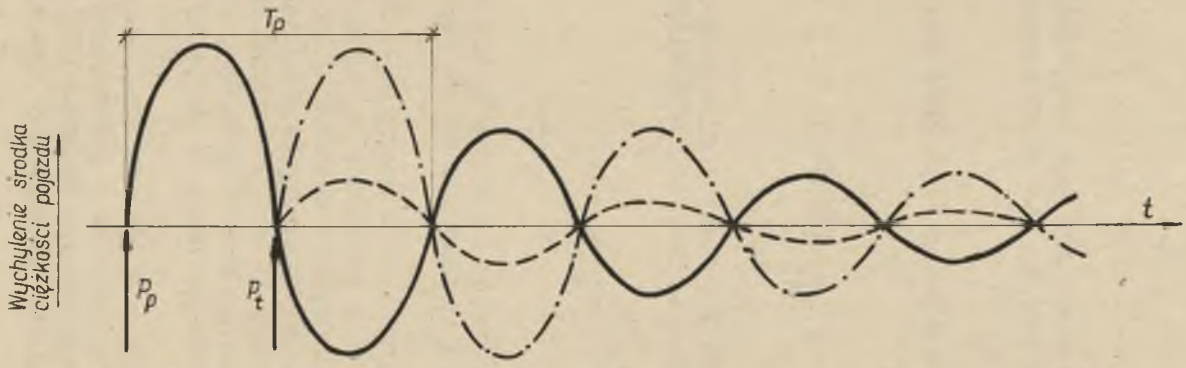
$$V_s = \frac{2a}{T_p}$$

Między przypadkiem (a) i (b) występują liczne możliwości pośrednie, które nie będą jednak dla mostu najniekorzystniejsze.

Jak widać z rysunków 11 i 12 - amplitudy, które warunkują naciski największe będą dla prędkości V_p (dla n = 1).

Mimo, iż rozumowanie powyższe zawiera w sobie poważne uproszczenia, z których najważniejszym jest założenie równości okresów $\omega_p = \omega_s$ (oraz $T_1 = T_p$) - można uznać, że najniekorzystniejsze obciążenie mostu występuje wtedy, gdy wszystkie elementy pojazdu działają w fazie tj. gdy występują drgania pionowe.

Ze względu na wspomniane trudności analitycznego wyznaczania częstości drgań samochodów - prowadzone były za granicą (głównie w Niemczech) liczne badania [35] [36] [37] [13], które pozwoliły określić charakterystyki dynamiczne szeregu



Rys.12. Wychylenie pojazdu gdy obie osie działają w przeciwfazie (dominacja drgań skrętowych)

pojazdów samochodowych. Ponieważ dla celów mostowych wystarczające jest określenie jaki rząd wielkości mają drgania pionowe pojazdów - wydaje się możliwe ograniczenie realizacji ze wspomnianych wyżej badań do stwierdzenia, że częstość podstawowa drgań nadwozia ciężkich pojazdów samochodowych ciężarowych zmienia się w niewielkich granicach i wynosi od 1,3 do 2,0 - 2,4 Hz.

2.2.3. Pomiary drgań samochodów ciężarowych Škoda i Star.

Dla określenia w jakim zakresie cytowane wyżej badania mogą być miarodajne w naszych warunkach (dla samochodów ciężarowych używanych w naszym kraju) przeprowadzone zostały przez autora pomiary podstawowych (dla badań mostowych) parametrów dynamicznych samochodów ciężarowych Škoda - Liberec i Star 21. Dane charakterystyczne badanych pojazdów zestawione są w tabeli nr 4.

Tabela nr 4

	Polewaczka Škoda-Liberec	Wywrotka na podwoziu Star 21
Ciężar własny	8,00 t	4,1 t
Ciężar całkowity	15,32 t	8,1 t
Oś przednia	4,72 t	2,7 t
Oś tylna	10,60 t	5,4 t
Odstęp osi	4,40 m	2,6 m
Ciśnienie opon w tylnych kołach	6,25 atm	4,25 atm

Pomiary przeprowadzono zarówno przy działaniu pojedynczych impulsów jak i w czasie ruchu z różnymi prędkościami na nawierzchniach kostkowej i asfaltowej.

Stan obu nawierzchni określić można jako bardzo dobry. Wielkość przypadkowych nierówności nie przekraczała ±2 cm. Pomiar drgań przeprowadzono za pomocą odpowiednio przystosowanych aparatów Geigera umieszczonych z przodu i z tyłu na razie samochodów na osi podłużnej.

W toku badań określono:

a) częstość drgań pionowych (metodą impulsową i przez przejazd nierówności z prędkością krytyczną),

Tabela nr 5

Rodzaj pomiaru	Samochody							
	Škoda				Star 21			
	Ilość pomiarów	Częstości Odczyty skrajne max	Częstości Odczyty skrajne min	Średnio	Ilość pomiarów	Częstości Odczyty skrajne max	Częstości Odczyty skrajne min	Średnio
Drgania pionowe Hz								
Pomiar w czasie ruchu	12	1,56	1,39	1,47	10	2,76	2,52	2,61
Pomiar metodą impulsową	6	1,62	1,31	1,40	-	-	-	-
Drgania skrętne Hz								
Pomiar metodą impulsową	6	1,52	1,31	1,43	4	3,01	2,62	2,73
Tłumienie								
(Wartość minimalna) $\varepsilon_p = \frac{a_1}{a_2}$	5	2,06	1,91	2,00	9	-	-	1,79

b) częstość drgań podłużnych skrętnych (metodą impulsową),
c) tłumienie pojazdów,
d) wpływ prędkości na charakter drgań.

Zasadnicze wyniki pomiarów drgań obu samochodów ciężarowych zestawione są w tabeli nr 5. Dodatkowo stwierdzić można, że w granicach stosowanych w czasie badań prędkości (5 - - 30 km/godz.) częstości drgań podstawowych mierzone na samochodzie Škoda zmieniały się jedynie (włączając już błąd pomiaru) w granicach ± 7% (tabela 6).
Również przejazd przez nierówności nie powodował istotnych odchyleń od wartości uzyskanej metodą impulsową.

Na ilustracjach (rys.13a, b i 14a, b) zamieszczone zostały charakterystyczne taśmy z badań samochodu Škoda-Liberec i Star 21.

Tabela nr 6

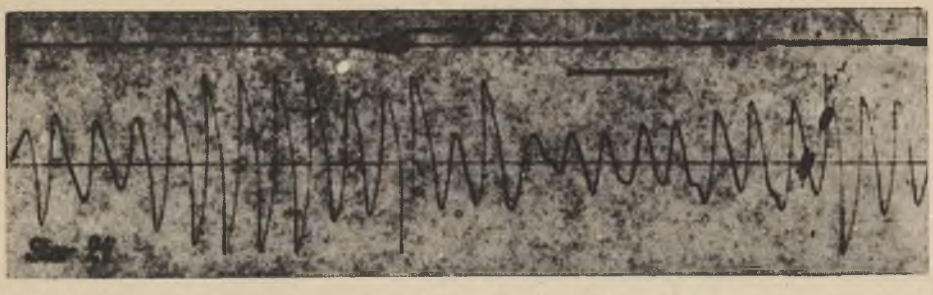
Prędkości samochodu km/godz.	5	10	20	30	-
Ilość pomiarów	4	3	3	2	-
Częstości drgań podstawowych Hz	1,44	1,47	1,46	1,56	1,47 ***)

Z powyżej przedstawionych pomiarów można wysnuć ostateczny wniosek, że w czasie ruchu po przeciętnie gładkiej (kostkowej i asfaltowej) nawierzchni, samochody ciężarowe pulsowały z częstością pionową, która zróżniła się jedynie nieznacznie od częstości naturalnej. Da się to wytłumaczyć tym, że odstęp impulsów (nierówności) był w zasadzie rzadszy niż podstawowa długość tłumienia.

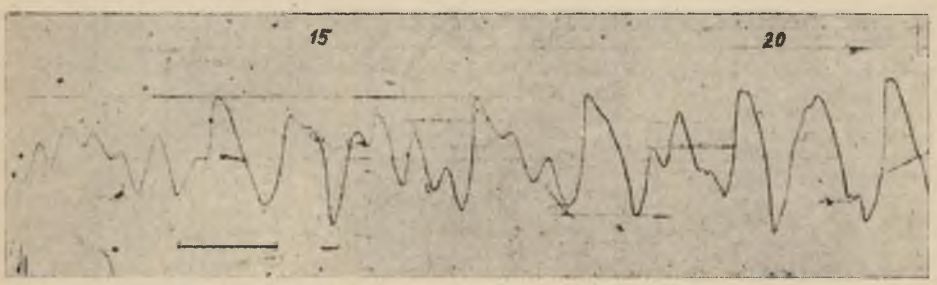
---

*) Pomiary wykonywano na dwóch aparatach

***) Wartość przeciętna dla całego badania (średnia z 12 pomiarów)



Rys.13a. Drgania nadwozia samochodu Star przy przejeździe z prędkością v = 10-20 km/godz.



Rys.13b. Drgania nadwozia samochodu Škoda-Liberac przy przejeździe ze stopniowo malejącą prędkością

Rys.14. Wytłumienie drgań samochodu Škoda:
a) drgania pionowe, b) drgania skrętne

2.3. Naciski dynamiczne osi pojazdu

2.3.1. Wyniki doświadczeń

Podstawowym problemem z punktu widzenia dynamiki mostu jest określenie wielkości najniekorzystniejszego nacisku pionowego koła (osi) samochodu.

Przy określaniu obciążenia mostu stosujemy więc inne kryteria niż przy ustaleniu obciążenia drogi. W tym drugim przypadku - jak wiadomo - decydujący jest tzw. "kolektyw obciążeniowy" ustalony statystycznie, a więc pewnego rodzaju wartość średnia (średnia z różnych P_{max}) a nie wartości szczytowe.

W ogólności opona - stwarzając połączenie między jezdnią a pojazdem - przenosi reakcję skośną R_k, ale dwie składowe leżące w płaszczyźnie nawierzchni na konstrukcję mostu mają wpływ nieznaczny i w naszym rozważaniu mogą być pominięte.

Najistotniejsza - dla określenia dynamicznego przeciążenia konstrukcji - składowa pionowa P_{max} zawiera w sobie wszelkie obciążenia (ciężar, siły hamowania i napędowe itp.) działające na pojazd. Zawiera ona również zmiany obciążenia od różnego rodzaju nierówności, wiatru itp.

Dla dalszej analizy decydujący jest stosunek

$$\frac{P_{stat} + P_{dyn}}{P_{stat}} = \frac{P_{max}}{P_{stat}} = k_n$$

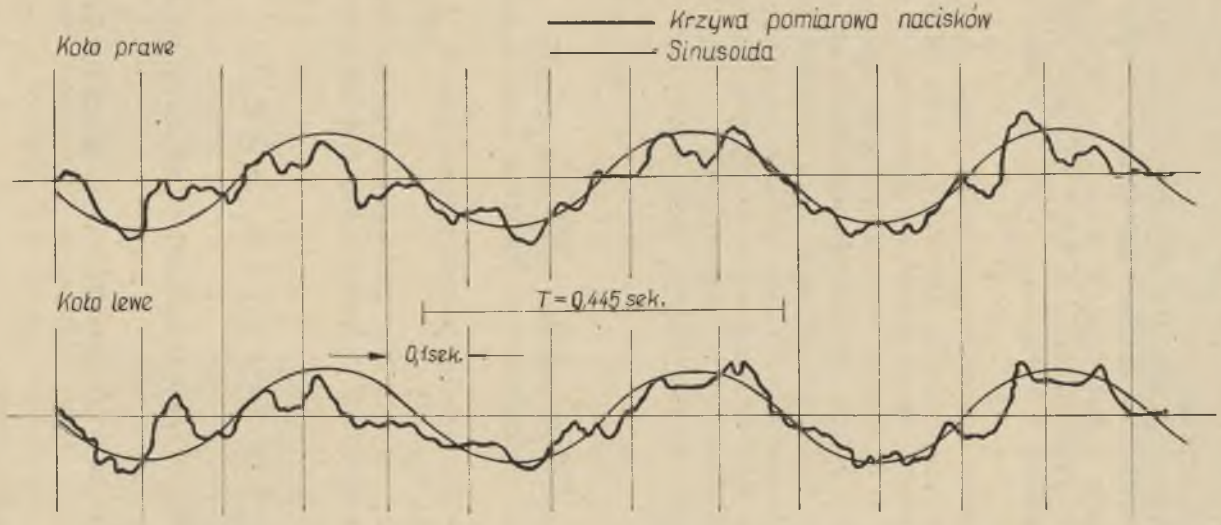
Charakterystyczny wykres krzywej nacisków P_{max} [38] przedstawiony został na rys.15.

Wykres uzyskany został dla samochodu (wg modelu 1b) - przez pomiar przyspieszeń i wstawienie pomierzonych wartości do wzoru

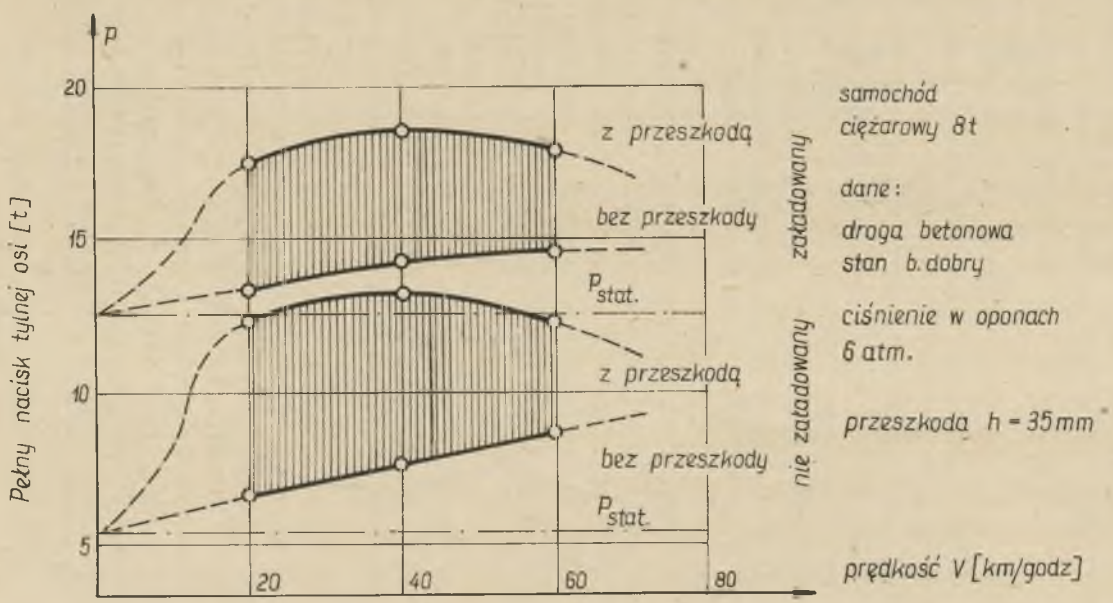
$$P_{max} = m_2 (g + \ddot{x}_2) + m_1 (g + \ddot{x}_1)$$

Współczynnik "k_n" jest w ogólności zależny od następujących czynników:

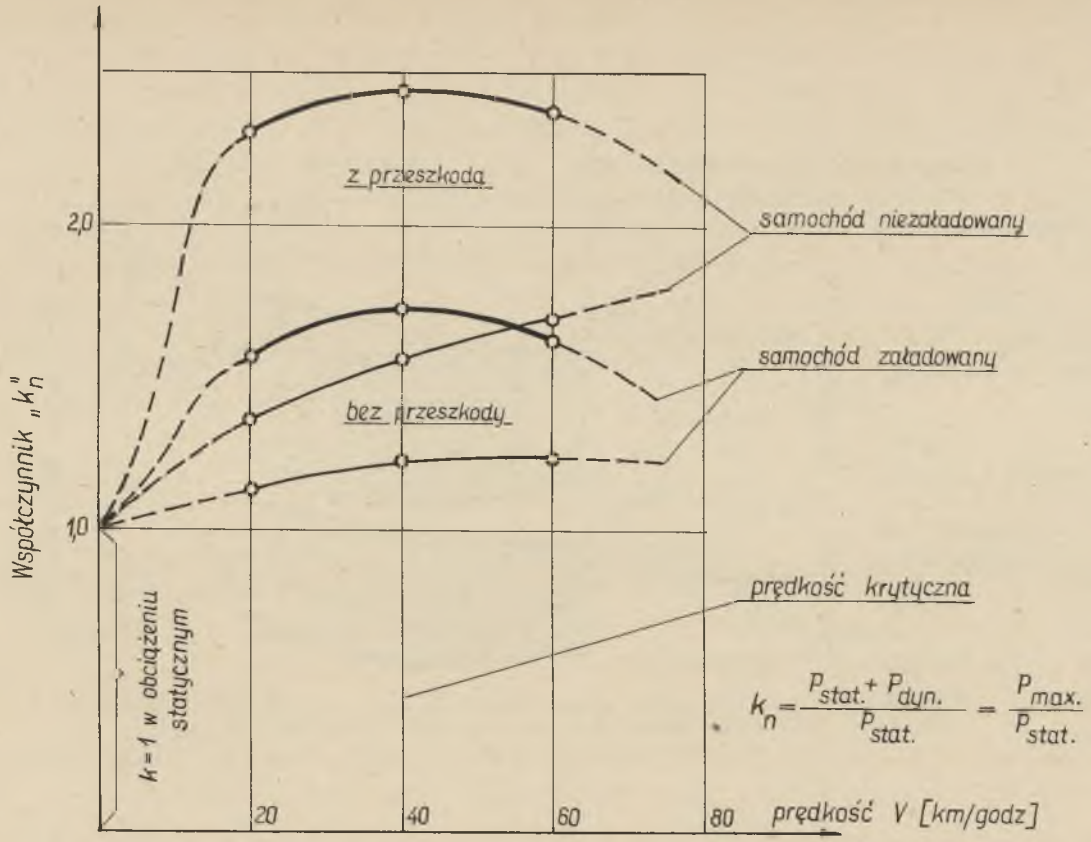
a) rodzaju i własności dynamicznych pojazdu. Szczególnie duży wpływ ma tutaj ciśnienie w oponach oraz rodzaj zawieszenia,
b) prędkości samochodu,
c) charakteru i wielkości nierówności oraz od sztywności mostu.



Rys.15. Wykres sumarycznych nacisków osi pojazdu



Rys.16. Zależność P-v dla samochodu ciężarowego



Rys.17. Zależność k_n-v wg rys.16

Wiadomo, że mniejsze ciśnienie w oponach umożliwia większą i spokojniejszą jazdę choć powoduje ich większe zużycie. Współczynnik sprężystości opon "c_1" jest zależny od ciśnienia i wynosi od 200 - 800 kg/cm [37]. Wartości te zmieniają się od 400 - 500 kg/cm (dla 4 atm) do 150 - 300 (dla 2 atm).

Z podanych danych można wysunąć wniosek, że bardziej miękkie opony zmniejszają nacisk. Tak jest istotnie. Niestety konstrukcja opon oparta jest na względach praktycznych (dążenie do zwiększenia trwałości) i ten czynnik determinuje wyższe ciśnienie.

Charakterystyka opon nie jest liniowa, a tłumienie nie ma poważnego znaczenia. Max.log. dekrement wynosi δ_o = = 0,10 - 0,20. Ma to poważny wpływ na wielkość następnych impulsów (P', P") przekazywanych na most przez pojazd.

Zależność między prędkością "v" a współczynnikiem "k_n" (dla stałych pozostałych czynników) obrazują rys.16 i 17 [39].

O wielkości współczynnika "k_n" można również wnioskować na podstawie pomiarów ugięć dynamicznych przęsła mostowego.

Wyznaczony przez autora na tej pośredniej drodze współczynnik "k_n" kształtował się następująco (rys.18).

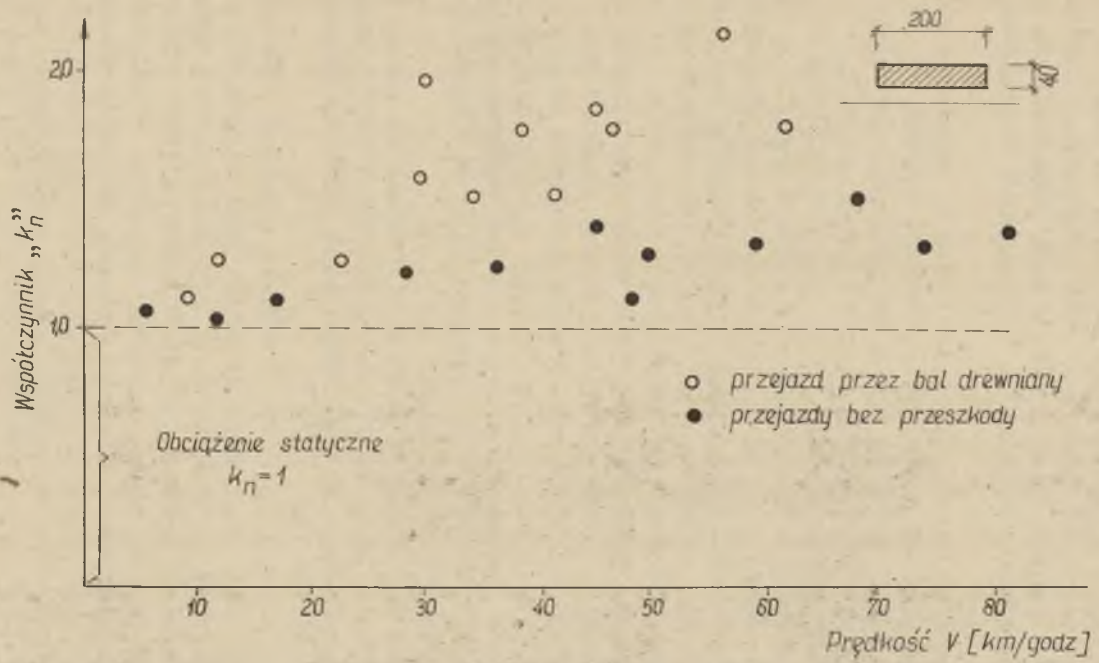
Wykonano również pomiary na moście stalowym z żelbetową płytą współpracującą, którego ustrój nośny składał się z 4 wolnopodpartych przęseł. Charakterystyka obiektu podana jest w tablicy 3 poz.1 i 2. Badano ugięcia dynamiczne przęseł skrajnych (równej rozpiętości) pod wpływem obciążenia samochodem ciężarowym o ciężarze 15,0 t. Charakterystyka pojazdu podana jest w tabeli 4.

Przy wjeździe na jednym z badanych przęseł (o nawierzchni kostkowej) wykonana była nierówność. Drugie przęsło posiadało nawierzchnię gładką. Wyniki sumaryczne przejazdów zamieszczone są na rys.19.

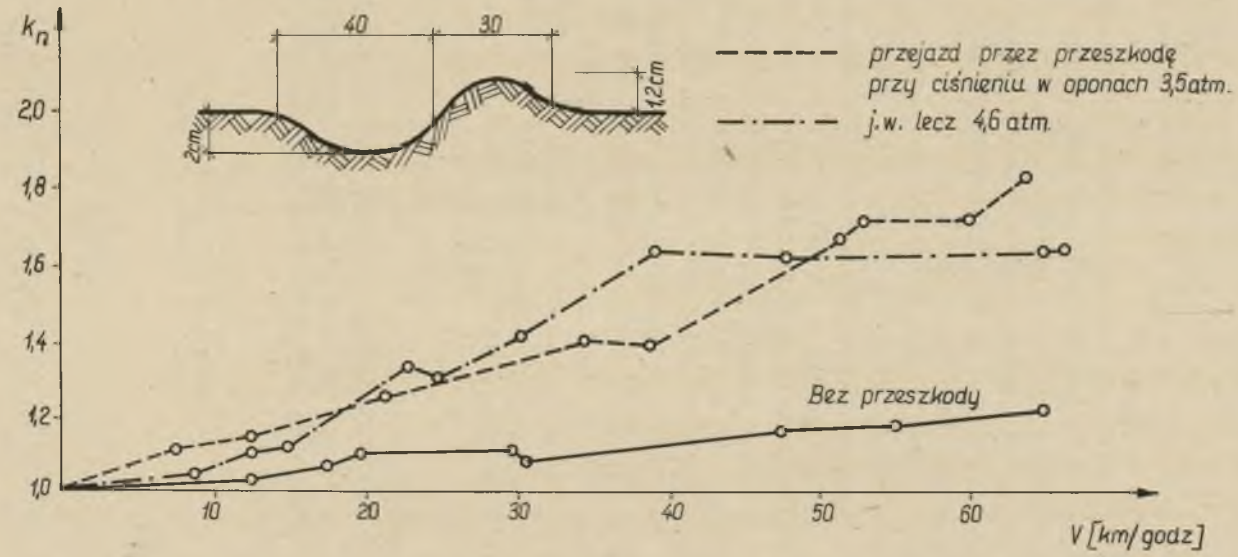
Pewien wpływ na wielkość "k_n" wywiera również charakter ustroju nośnego, a w pierwszym rzędzie jego sztywność.

Energia impulsu pierwotnego będącego następstwem uderzenia osi o nierówność progową (wjazd na most) jest wchłonięta przez ustrój nośny, opony i resory pojazdu. W związku z tym można przypuszczać, że most sztywny przyjmie większy nacisk niż most wiotki, który łatwiej może się odkształcać.

Analiza wszystkich dostępnych danych pomiarowych, zarówno obcych [36][38][40] jak i własnych (rys.18 i 19) pozwala wysunąć pewne wnioski odnośnie liczbowej wartości współczynnika "k_n".



Rys.18. Zależność k_n-v dla polewaczki "Škoda-Liberec" o charakterystyce podanej w tabelach Nr 4, 5 i 6 przy przejeździe przez bal o grubości 40 mm (i szerokości 200 mm) ułożony na nawierzchni kostkowej gładkiej. Ciśnienie w oponach 6,2 atm



Rys.19. Wpływ nierówności nawierzchni na ugięcia przęsła mostowego w zależności od prędkości przejazdu

Najważniejszym parametrem jest tutaj jakość nawierzchni. Jej wpływ wyraża się zmianą wartości k_n, która dla nawierzchni oznaczonej jako "złe" wzgl. "b.złe"*) osiąga:

dla pojazdów nieobciążonych ok. 2,0 (do 2,4)
dla pojazdów obciążonych ok. 1,4 - 1,8 (do 2,0)

Można przyjąć w przybliżeniu, że P_{dyn} samochodu nieobciążonego jest tak wielkie jak P_{stat} samochodu z pełnym ładunkiem. Obrazuje to rys.16.

Wpływ prędkości jest różny, ale dla większości pomiarów można wyraźnie wyznaczyć prędkość krytyczną przy osiągnięciu której współczynnik k_n nie rośnie. Prędkość ta odpowiada dominacji drgań pionowych nad innymi formami drgań nadwozia. Problem ten wiąże się na mostach z współbrzmieniem rezonansowym pojazdu i konstrukcji.

Wpływ opon został omówiony wyżej. Zaznaczyć tutaj należy jedynie, że pojazdy o największym ciśnieniu w oponach (np. autobusy) wykazują b.wysoką wartość k_n nawet na dobrej nawierzchni. Współczynnik k_n dla przyczep utrzymuje się w podobnym zakresie co dla samochodów ciężarowych.

Dla nawierzchni znajdujących się w dobrym i bardzo dobrym stanie wartości k_n są znacznie niższe i wynoszą: dla samochodów ciężarowych bez ładunku 1,3 do 1,8. Dla samochodów zakładowych ok. 1,1 do 1,3. Wskazują na to wyczerpujące badania niemieckie [39]. Zbierając powyższe uwagi można stwierdzić, że w niekorzystnych warunkach współczynnik k_n przekracza wartość 2,0. Oznacza to, że w takich przypadkach opona pojazdu traci kontakt z jezdnią (odskakuje od nawierzchni). Dotyczy to jednak bardzo złych nawierzchni.

Zdecydowana większość pomiarów współczynnika k_n utrzymuje się między 1,5 a 1,8**). Opona pozostaje tutaj w stałym kontakcie z jezdnią.

Dla ustalenia obciążenia mostu istotne jest nie tylko określenie wartości k_n ale również następnych impulsów P'_{max} P''_{max} itd., które ze względu na tłumienie pojazdu związane są zależnością

$$P_{max} > P'_{max} > P''_{max}$$

---

*) Wg klasyfikacji prof. Essersa [39].

**) Wnioski powyższe pokrywają się również w zasadzie z wynikami wcześniejszych pomiarów F.Meistera [41].

Na wielkości $k'_n = \frac{P'_{max}}{P_{stat}}$; $k''_n = \frac{P''_{max}}{P_{stat}}$ wpływ ma tłumienie pojazdu, które jest zależne głównie od:

a) tarcia wewnętrznego pojazdu a zwłaszcza rodzaju konstrukcji nadwozia oraz stanu technicznego wozu,
b) wielkości i rozłożenia ładunku,
c) amortyzatorów.

Największe znaczenie dla tłumienia energii uderzenia mają amortyzatory. W nowoczesnych pojazdach są one tak dobrane, aby w ciągu jednego okresu drgania można było wytłumić nawet 90% energii. Oznacza to, że amplitudy kolejnych następujących po sobie okresów zmniejszają się 2-3-krotnie.

Z drugiej strony wiadomo jednak, że amortyzatory tłumią b.szybko (wg Gelfgata w ciągu 0,15 - 0,20 sek) drgania wysokich częstości (nieprzyjemne dla użytkowników pojazdu) natomiast drgania podstawowe o niewielkich przyspieszeniach są wytłumiane wolniej.

W każdym razie nie budzi wątpliwości stwierdzenie, że w ciągu 3 - 5 okresów drgania zanikają.

Analiza współzależności poszczególnych czynników wpływających na sumaryczną wartość tłumienia wykracza poza ramy niniejszych rozważań. Wystarczy jedynie stwierdzić, że wartość k_t (odpowiadająca współczynnikowi tłumienia k dla mostu wynosi

$$k_t = 0,3 - 0,7 \left[\frac{kg \cdot sek}{cm}\right] [36] [42]$$

Potwierdzają to pomiary autora. Przykładowe krzywe tłumienia nadwozia dla omówionego poprzednio samochodu pomiarowego Škoda-Liberec przedstawiają rys.13a i 13b.

Kolejne amplitudy drgań pionowych w przybliżeniu:

$$\varepsilon_p = \frac{a_1}{a_2} \cong \frac{1}{0,5} = 2,0$$

wobec tego logarytmiczny dekrement tłumienia

$$\delta_p \sim l_n\, 2 = 0,6932 \sim 0,70$$

2.3.2. Obliczeniowe wyznaczanie współczynnika "k_n"

Nad rachunkowym wyznaczaniem maksymalnego nacisku pojazdu P_{max} przeprowadzono w ostatnim czasie szereg badań [43] [44]. Opierając się na informacjach Wedemeyera [45] opracowane metody obliczenia znajmują się jednak tylko nierównościami periodycznie zmiennymi (falowymi) o regularnym łagodnym charakterze i o niewielkim stopniu nagłości uderzenia. W związku z tym w przeliczeniach dynamicznych mogą znaleźć jedynie bardzo ograniczone zastosowanie.

Z porównawczych przeliczeń Klöppela i Mopperta wynika np., że dla nierówności o wysokości 1 cm otrzymuje się dla prędkości 50 km/godz. - przyrost nacisku 34% (k_n = 1,34). Ponieważ nierówności progowe, z którymi mamy do czynienia w obliczeniu dynamicznym mostów są dużo większe, przyrost siły P_{max} będzie oczywiście znacznie większy.

Rozdział III

WSPÓŁPRACA DYNAMICZNA MOSTU I OBCIĄŻENIA

3.1. Uwagi o wpływie rozwiązania konstrukcyjnego na przeciążenie dynamiczne mostu

Na powstawnie sił dynamicznych w konstrukcji mostu przy przejeździe obciążenia, wpływa kilkadziesiąt czynników o różnym znaczeniu. Najważniejsze z nich dadzą się podzielić na trzy grupy:

a) wpływy regularne i periodycznie zmienne przy przejeździe obciążenia przez most "idealny". Zaliczamy tutaj: efekt wjazdu (Timoszenki), efekt Zimmermanna ("odśrodkowy") oraz efekty działania parowozu,

b) wpływ niektórych czynników konstrukcyjnych na przeciążenie dynamiczne (efekt "poprzecznicowy", efekt przegubów i in.),

c) nierówności nawierzchni i inne wpływy nieregularne przy obciążeniach samochodowych i szynowych.

Przeprowadzony podział ma charakter roboczy, gdyż ze względu na różnorodne aspekty każdego z wpływów i ich wzajemne powiązanie istnieje trudność ścisłego zaszeregowania.

Na temat pierwszej grupy przyczyn powodujących przeciążenie dynamiczne mostu istnieje dość obszerna literatura*), ale mimo to problem trudno uznać za wyczerpany. Ponieważ jednak wpływy te w mostach drogowych (zwłaszcza mniejszych) nie mają większego znaczenia - nie będą bliżej omawiane.

Natomiast istotny wpływ na naprężenia dynamiczne ma charakter konstrukcji ustroju nośnego, a zwłaszcza sposób podparcia i połączenia z przyczółkiem.

---

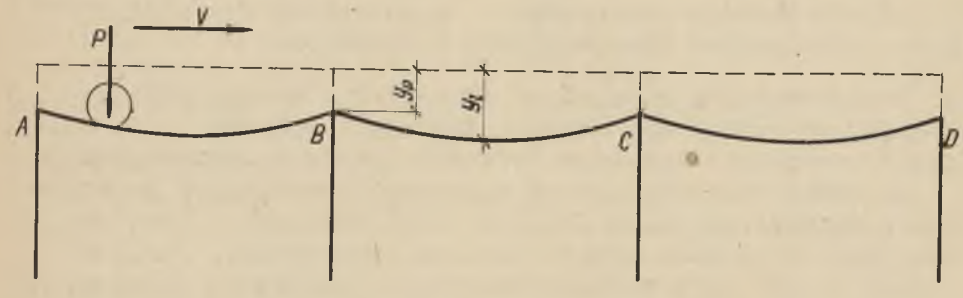
*) W ostatnim czasie ogłoszono z tego zakresu prace [46][47].

Wiadomo, że przy przejeździe granicy dwóch ośrodków o różnej charakterystyce sprężystej (np. przyczółek - przęsło) - efekt uderzeniowy jest wyraźnie wyczuwalny. To samo można w zasadzie powiedzieć o wszelkich załamaniach linii ugięcia nawet nie wiążących się ze zmianą sztywności dynamicznej konstrukcji (np. przegub kluczowy sklepienia trójprzegubowego).

Zjawisko to można ująć bardziej ogólnie w stwierdzeniu, że wszelkie rozwiązania konstrukcyjne, które dopuszczają do załamań toru środka ciężkości pojazdu, przyczyniają się do wzrostu naprężeń dynamicznych. Takie załamania toru mogą wystąpić w zasadzie na podporach, na linii przegubów oraz na poprzecznicach.

Wolne od tych zjawisk są przepusty i inne konstrukcje z nadsypką, a niewielkie wartości efekty te osiągają w masywnych mostach małych rozpiętości (np. płyty żelbetowe).

W mostach stalowych obciążenie użytkowe przenosi się na belki główne za pośrednictwem dźwigarów pomostu, tj. podłużnic i poprzecznic. Te poprzecznice tworzą dla poruszającej się osi sztywne linie w stosunku do bardziej podatnych podłużnic. Punkt ciężkości masy pojazdu opisuje, na skutek tej zróżnicowanej podatności, linię falistą o licznych punktach przecięcia i szybko zmieniającej się krzywiźnie (rys. 20) co powoduje periodyczne wahania obciążenia podobnie jak we wspomnianym poprzednio efekcie parowozowym.



Rys.20. Schematyczne przedstawienie efektu nierównomiernej podatności pomostu

Efekt nierównomiernej podatności pomostu występuje wyraźnie nie tylko przy obciążeniu parowozem, ale również przy innych rodzajach lokomotyw (spalinowe, elektryczne i in.). Swe maksymalne wartości osiąga on w mostach kratowych znaczniejszych rozpiętości. Jego wielkość zależy również od wy-

rażenia $(y_l - y_p)$.l oraz od sposobu połączenia podłużnic i poprzecznic.

Omawiany efekt jest nieznaczny w mniejszych mostach stalowych kolejowych. Natomiast w mostach drogowych zwłaszcza o konstrukcji masywnej, jest niezauważalny.

Wartości liczbowe wpływu nierównomiernej podatności pomostu [48] są w niekorzystnych przypadkach tego samego rzędu co efekt parowozowy, a więc osiągają bardzo duże wartości.

Jak wspomniano, wszelkie nieciągłości konstrukcji powodujące załamania linii ugięcia są powodem zakłóceń w ruchu pojazdu i tym samym przyczyna powiększania nacisków dynamicznych. W mostach kolejowych już kąt między linią szyny z jednej i drugiej strony nieciągłości, wynoszący 20 - 30" powoduje - niezależnie od zmęczeniowego przeciążenia szyny - poważną nierównomierność ruchu pojazdu, która (szczególnie przy pojazdach ze sztywną ramą względnie kotłem) daje znaczne zwiększenie wpływów dynamicznych.

Z licznych badań, a zwłaszcza z równoległych-ostatnio przeprowadzonych-badań AREA i ASCE [49] wynika wyraźnie, że mosty ciągłe przegubowe wykazują tak wielką podatność na drgania (przejawiającą się w szybkim przyroście amplitud i naprężeń dynamicznych), że nie nadają się do stosowania przy obciążeniach szynowych.

Poważny wpływ na wielkość naprężeń przy uwzględnieniu przeciążenia dynamicznego ma również podatność podpór mostu. Naprężenia w przęsłach opartych na wysokich palowych podporach (filtrach) są znacznie mniejsze niż w przęsłach skrajnych tego mostu, opartych na sztywnych przyczółkach [50]. Spostrzeżenie to dotyczy jednak w zasadzie mostów stalowych znaczniejszych długości, których pośrednie ażurowe podpory posiadają znaczniejszą wysokość.

W mostach mniejszych, które są obiektem zainteresowania w niniejszej pracy - przyrost naprężeń na skutek podatności podpór może zostać pominięty.

3.2. Wpływ nierówności nawierzchni na zjawiska dynamiczne w mostach

3.2.1. Omówienie

Nierówności nawierzchni na dojazdach i na moście są jedną z istotnych przyczyn zwiększenia wytężenia elementów konstrukcyjnych ustroju nośnego mostów mniejszych rozpiętości.

Ze względu na różnorodne przyczyny i warunki powstania (wady ułożenia, osiadanie nasypu między skrzydłami przyczółków, wpływ eksploatacji, szkody górnicze itp.) - charakter i wielkość nierówności są różne i w związku z tym bardzo trudne jest znalezienie jednolitego kryterium klasyfikacyjnego tym bardziej, że nieprzydatne są tutaj tzw. współczynniki nierówności (ustalone dla celów drogowych za pomocą pomiarów viagrafem). Współczynniki nierówności stanowią informację o stanie drogi ważną ze stanowiska użytkownika i świadczą o rodzaju współpracy w układzie nawierzchnia - pojazd, natomiast nas interesuje układ nawierzchnia - pojazd - most, gdzie pojazd jest jedynie pośrednikiem (przenośnikiem impulsów).

Patrząc z tego stanowiska i uznając za kryterium podziału skutki działania nierówności nie na pojazd a na konstrukcję mostu - można (dla celów roboczych) podzielić występujące w rzeczywistości niejednorodności nawierzchni na trzy grupy:

a) nieregularne nierówności (ostre występy wzgl. zagłębienia) o mniejszych wymiarach, na które pojazdy ogumione nie reagują. Efekt ruchu pojazdu o sztywnych obręczach da się tutaj zastąpić efektem spadku ciężaru z pewnej wysokości.
Nierówności tej grupy ("spadkowe") działają na most przez pojazdy o stosunkowo małej wadze i prędkości (zaprzęgi konne) i dlatego nie mają poważniejszego znaczenia (za wyjątkiem mostów na drogach podrzędnych) i nie będą w dalszym ciągu brane pod uwagę,

b) nierówności większych rozmiarów o bardziej regularnym charakterze (o łagodniejszych krawędziach). Przejazd pojazdu samochodowego powoduje w tym przypadku powstanie oscylacji (ruchu drgającego) którego następstwem jest zmienność nacisków kół. Do tej grupy zaliczamy tzw. nierówności progowe, które występują bezpośrednio za murem tarczowym przyczółka, a spowodowane są w pierwszym rzędzie przez osiadanie nasypu.
Nierówności progowe są podstawową przyczyną przeciążenia dynamicznego mniejszych mostów drogowych. Charakter przybliżonego wykresu obciążenia w takim przypadku przedstawiony jest na rys.21,

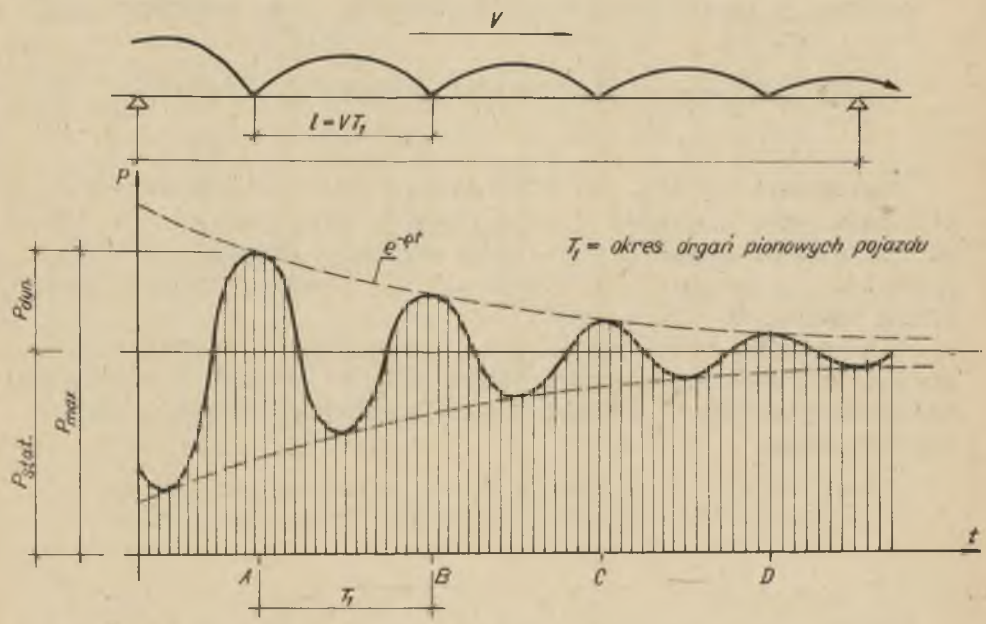
c) na drogach o nawierzchni zagęszczonej przez walcowanie występują niekiedy dość płaskie nierówności o podobnym profilu i charakterze. Ten typ niejednorodności nawierzchni (tzw. nierówności falowe) występuje tylko na

dojazdach (a nie na samym moście), ale winien być niekiedy uwzględniony ze względu na możność pobudzenia pojazdu do drgań o poważnej amplitudzie.

Z badań Wedemeyera [45] wynika, że odstęp fal x wynosi około 1,5 m, a zagłębienia h_3 około 1 - 2 cm.

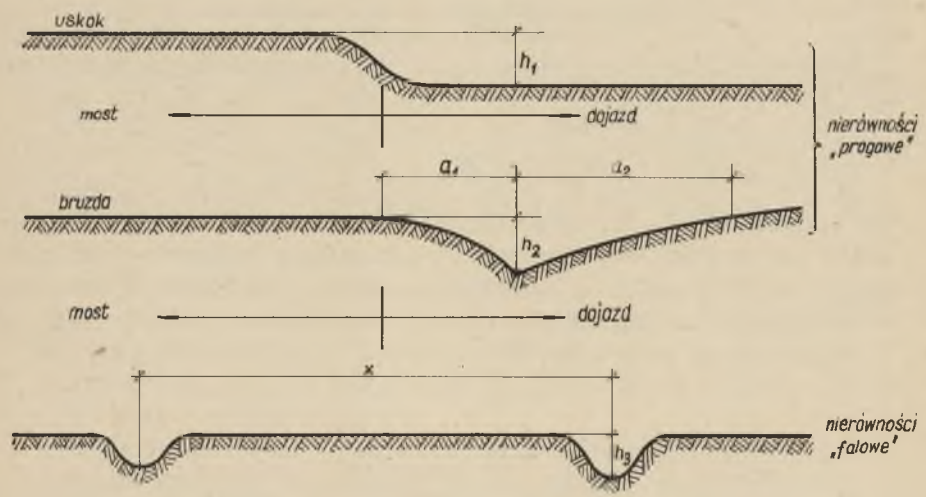
Schematy nierówności progowych i falowych przedstawione są na rys.22.

Wyżej przeprowadzony podział rozpatruje nierówności biorąc pod uwagę ruch środka ciężkości pojazdu. Nierówności grupy pierwszej ("spadkowe") znoszone są w pojazdach samochodowych przez działanie opon przy ewentualnym współdziałaniu resorów; tor ruchu środka ciężkości ze względu na bezwładność masy nadwozia nie ulega praktycznie zmianie. Natomiast nierówności grupy drugiej ("odśrodkowe") i trzeciej ("falowe") wywołują pionowe ruchy środków mas sprowadzonych nadwozia. Oczywiście wielkość wychyleń zależy dla danego pojazdu od prędkości. Natomiast charakter krzywej jaką zakreśla środek ciężkości nadwozia jest od prędkości niezależny i może być aproksymowany sinusoidą. Wskazują na to wyraźnie doświadczenia nad charakterem zmienności nacisków [38].



Rys.21. Schemat "skaczącego" działania pojazdu i charakteru wykresu obciążenia belki

Z przedstawionego na rys.15 przykładowego pomiaru widać, że przyjęcie zmiast sinusoidy innej krzywej (np.cykloidy) nie stanowiłoby lepszego przybliżenia do warunków rzeczywistych, a utrudniałoby rozwiązanie równania ruchu belki.



Rys.22. Schematy nierówności progowych i falowych

Stwierdzić należy, że dla każdego rodzaju nierówności istnieje taka prędkość ("krytyczna"), przy której tor "środka" ciężkości pojazdu pozostaje poziomy, innymi słowy ta prędkość krytyczna charakteryzuje się prawie płynnym przejściem samochodu przez most.

Dla naszych celów współpraca dynamiczna nawierzchnia - obciążenie może być rozpatrywana przy założeniu nieodkształcalności podłoża i niekonieczne jest uwzględnianie jego współdrgania.

3.2.2. Określenie rodzaju i rozmiaru nierówności na podstawie pomiarów w terenie

Dla określenia rodzaju i wielkości nierówności nawierzchni występujących na mostach i na dojazdach, przeprowadzone zostały pomiary w terenie*).

Niezależnie od pomiarów na szeregu mostach rozrzuconych na Śląsku - przeprowadzono systematyczne pomiary stanu nawierzchni na wszystkich mostach drogi Zabrze - Bytom oraz autostrady k.Gliwic na odcinku Maciejów - Taciszów. W sumie poddano obserwacji 83 mosty i wiadukty o rozpiętościach od 7 do 33 m, a szczegółowe pomiary objęły 34 obiekty.

Występowanie nierówności progowych obu typów (rys.22) stwierdzono na 71 obiektach (tj. 85,5%). Dokładniejsze wyniki pomiarów zestawione zostały w tabeli nr 7.

Podane w w/w tabeli głębokości, pomierzone zostały na osi głównych pasm ruchu. Występująca przy nierównościach bruzdowych długość zagłębienia $a = a_1 + a_2$ była bardzo różna. Rząd wielkości można określić na od kilkudziesięciu (80 - 90) cm do kilku (2 - 3) metrów. Mająca duży wpływ na siłę uderzenia wielkość a_1 była bardziej regularna i wynosiła zazwyczaj od 0,40 do 1,2 m.

Zaznaczyć należy, że wyraźny był wpływ rodzaju nawierzchni na charakter nierówności, a zwłaszcza nierówności progowych. Nawierzchnia kostkowa dawała nierówności o bardziej regularnym charakterze i łagodniejszych stokach.

Na rys.23a i b przedstawione są charakterystyczne dla obu rodzajów nierówności profile podłużne dwóch badanych mostów.

Wymiary nierówności nawierzchni na moście (grupa "b") były różne i trudno jest ująć je w jakiś schemat. Można jednak ogólnie stwierdzić, że ich wielkość była zwykle mniejsza niż nierówności progowych.

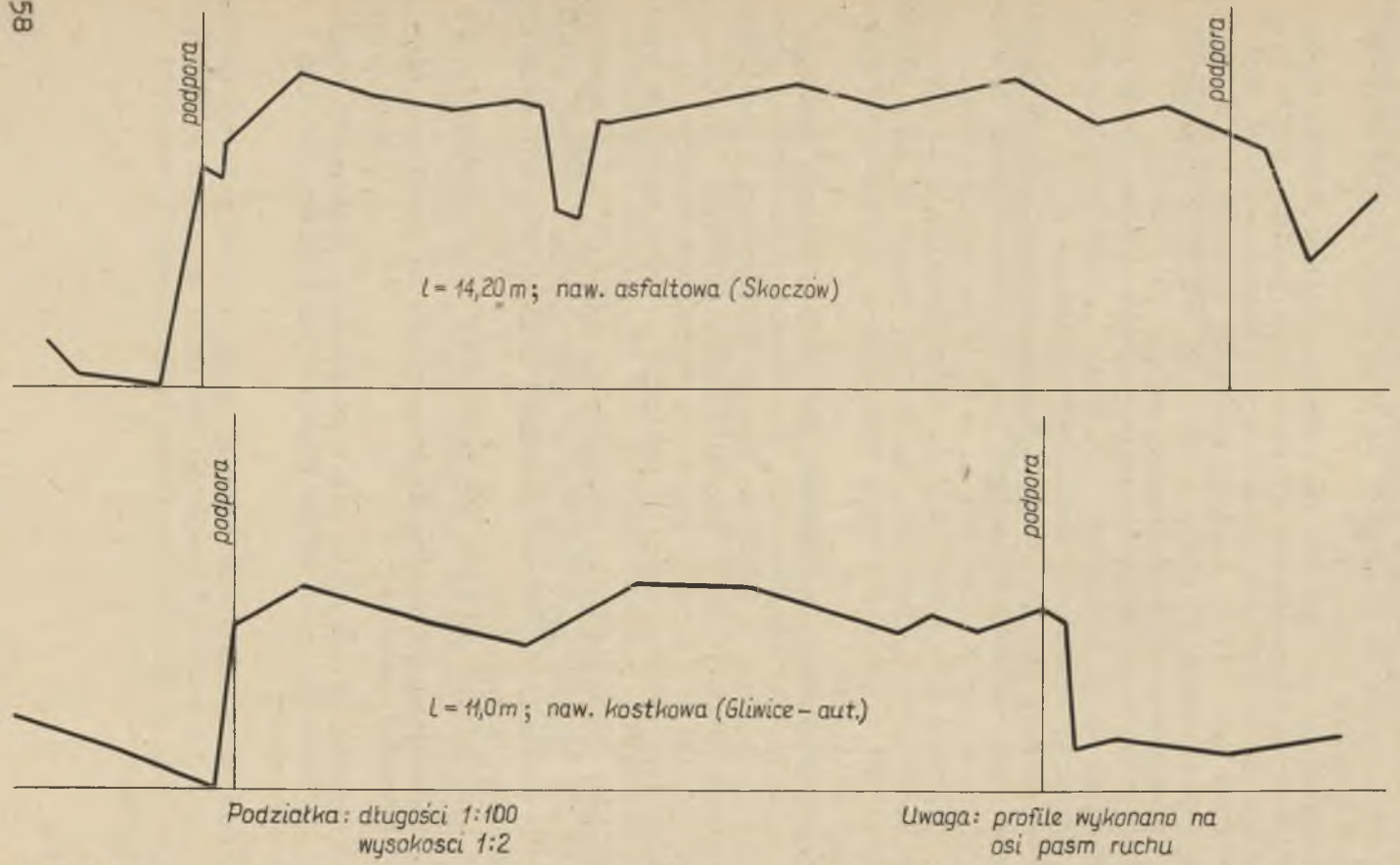
Jeśli uwzględnimy ponadto ich położenie to można uznać, że:

a) podstawową przyczyną drgań pojazdu na moście są nierówności progowe,

b) drgania te odbywają się w zasadzie z częstością drgań swobodnych, gdyż wpływ pozostałych nierówności (na

---

*) Pomiary przeprowadzone zostały przez zespół roboczy Zakładu Budowy Mostów Politechniki Śląskiej w latach 1959-61, w związku z określeniem stanu technicznego i nośności mostów.



Rys.25. Charakterystyczne profile podłużne - dla obu rodzajów nierówności progowych

moście) można uznać za mniejszego rzędu. Zresztą jeśli pominiemy wyjątkowe uszkodzenia jezdni, to stwierdzić można, że maksymalne prawdopodobieństwo dodatkowego pobudzenia pojazdu występuje tylko w bezpośredniej bliskości maksymalnego styku opony z nawierzchnią (punkty A, B, C itd.).

Tabela nr 7

Pomiary nierówności

Typ nierówności	Ilość		Głębokość nierówności [cm]			
	szt.	% całości	2	4	8	ponad 8
			ilość/%	ilość/%	ilość/%	ilość/%
bruzda (rys.22a)	78	54,9	15/10,6	39/27,5	16/11,3	8/5,6
uskok (rys.22b)	53	37,4	16/11,3	24/16,8	12/8,5	1/0,7
nieregularne	11	7,7	2/1,4	3/2,1	5/3,5	1/0,7
razem nierówności progowe	2x71 = 142	100,0	33/23,3	66/46,4	33/23,3	10/7,0

Mniejszy stosunkowo wpływ dynamiczny nierówności nawierzchni mostu w stosunku do nierówności na dojazdach wykazały również pomiary amerykańskie [51].

Nierówności falowe występują na naszych drogach rzadko. Charakter pobudzenia nie różni się w ich przypadku od działania nierówności progowej z tym, że wpływ tłumienia jest inny.

3.2.3. Wpływ nierówności na bieg pojazdu na moście

Działanie nierówności na pojazd polega na pobudzeniu go do drgań. Z poprzednio zestawionych pomiarów stanu nawierzchni wynika, że bezpośrednio przed linią podparcia ustroju nośnego (na dojazdach) występują nierówności, które dają impuls znacznie silniejszy od tych, które mogą działać na pojazd przy przejeździe przez nieregularności jezdni mostu. Wpływ normalnych nierówności na samym moście można w przybliżeniu uwzględnić przez odpowiednie ukształtowanie współczynnika tłumienia pojazdu.

Wykazano poprzednio, że z punktu widzenia dynamiki mostu, najniekorzystniejsze będzie działanie pojazdu, u którego dominującą formą drgań będą drgania pionowe (tj. gdy wszystkie elementy będą działały w fazie).

Obciążenie przejeżdża przez most z określoną - przyjmujemy że stałą - prędkością, co wpływa na wielkość nacisków P_{max} (co zostało poprzednio omówione) oraz na ich odstęp (rys.21). Ilość impulsów, jakie otrzymuje most jest zatem wielkością zmienną zależną od prędkości pojazdu.

Np. jeśli częstość drgań swobodnych pojazdu wynosi 100 na minutę, to przy prędkości 30 km/godz na most l = 25 m przypadnie

$$n = \frac{25 \cdot 100 \cdot 60}{30000} \sim 5 \text{ impulsów}$$

a uwzględniając przesunięcia fazowe obciążenia do obliczeń przyjmiemy 4 impulsy. Odstęp działania maksymalnych nacisków wyniesie w tym przypadku L = 5 m.

W mostach kolejowych (przy obciążeniu parowozowym) ilość impulsów jest zależna od ilości obrotów koła napędowego, a więc jest to wielkość zdeterminowana rozpiętością przęsła. Natomiast w mostach drogowych obroty kół nie tworzą impulsów i dlatego przy bardzo szybkim ruchu jest ich - na określonym przęśle - mniej niż przy ruchu wolnym. Obserwujemy jak gdyby "ucieczkę mostu" spod pojazdu.

Wpływ prędkości na tłumienie może być pominięty. Za mały można również uznać pośredni wpływ prędkości na drgania pojazdów obciążających. Wyniki pomiarów wcześniejszych [13] zostały potwierdzone przez wspomniane wyżej badania na samochodzie-polewaczce Škoda o ciężarze b-tto 15,35 t. Przy prędkościach 5 - 30 km/godz. okres drgań T_1 (mierzony na ramie nadwozia) zmieniał się zaledwie w granicach 6 - 7%

i praktycznie pokrywał się z częstością pionowych drgań swobodnych nadwozia.

Z przedstawionych powyżej pomiarów i rozważań można wysnuć istotne wnioski odnośnie różnic w pracy dynamicznej mostów różnych rozpiętości. Zastosowane poprzednio określenie "mosty mniejsze" (por.1.1) dotyczy tak mostów o rozpiętości 5 m jak i 20 m a charakter zjawisk dynamicznych zmienia się w tym przedziale bardzo znacznie.

Wydaje się, że w bardzo małych mostach drogowych wpływ dynamiczny obciążenia ruchomego jest nieznaczny, co wynika z następujących głównych przyczyn:

a) impulsy progowe nie powodują powiększenia naprężeń, gdyż progi są zwykle małe, a ponadto przy większych prędkościach pojazdów, pierwszy impuls przypada na końcu przęsła albo nawet za mostem,

b) mosty bardzo małe odznaczają się bardzo wysoką zdolnością pochłaniania energii drgań. Znane są przypadki powierzchnia na takich obiektach nadzwyczaj wysokiego tłumienia (logarytmiczny dekrement tłumienia był prawie równy jedności).

Pewien wpływ ma również opóźnienie odkształcenia w stosunku do działania siły.

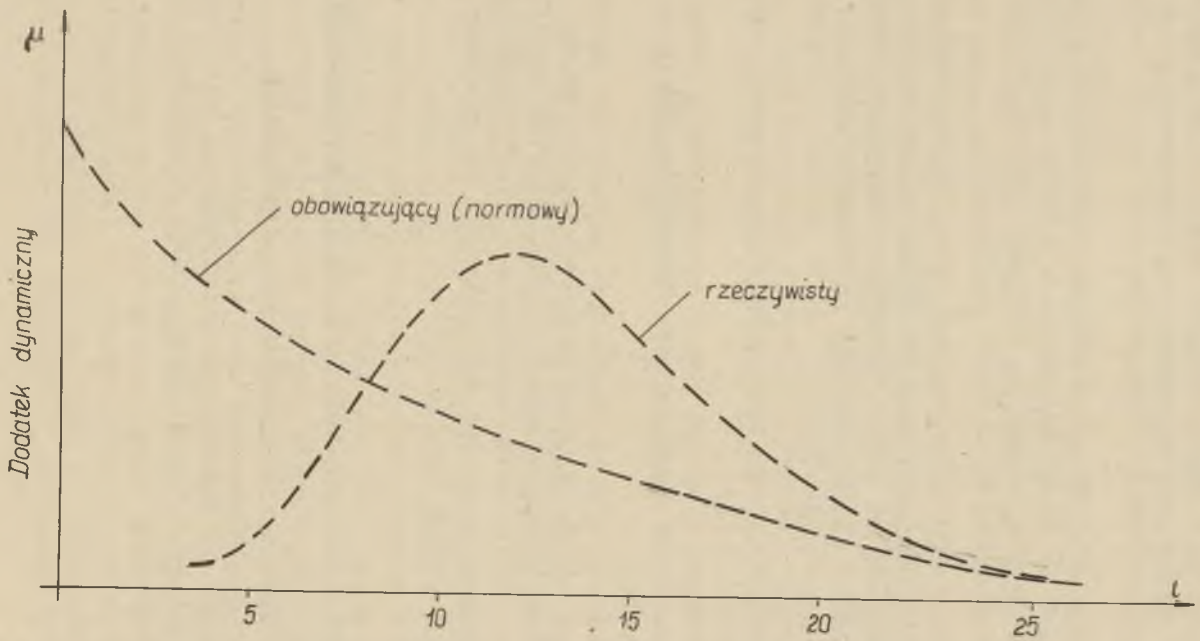
Uwzględniając powyższe uwagi - rzeczywisty charakter wykresu przeciążenia dynamicznego mostów drogowych ilustruje wykres (rys.24).

Przedstawiony wykres charakteru zależności przeciążenia dynamicznego od rozpiętości dotyczy jedynie mostów drogowych. W mostach kolejowych - nawet w tych, których rozpiętość jest mniejsza od obwodu koła napędowego - faza działania obciążenia dynamicznego może być tak dobrana, że maksimum impulsu przypadnie w środku rozpiętości.

3.3. Drgania belki mostowej pod obciążeniem samochodowym

3.3.1. Działanie obciążenia na środek belki

W działaniu obciążenia samochodowego na most wydzielić możemy dwa elementy: ruch siły stałej i złożonej siły pulsującej tłumionej.



Rys.24. Porównanie charakteru zmienności dodatku dynamicznego mostów drogowych

Jeśli rozpatrywać będziemy pionowy ruch jakiegoś punktu belki o odciętej **x**, to czynnik pierwszy możemy określić wyrażeniem

$$P_{stat}^{ruch} = A \sin \frac{\pi a}{l} \sin \frac{\pi x}{l} \qquad (3.1)$$

a = vt oznacza odległość aktualnego położenia siły od lewej podpory. Dla x = 1/2 otrzymujemy $\sin \frac{\pi x}{l} = 1$, wobec tego w połowie rozpiętości

$$P_{stat}^{ruch} = A \sin \frac{\pi v}{l} t \qquad (3.2)$$

Oczywiście wyrażenie dotyczy jedynie belek wolnopodpartych. Bardziej złożone schematy statyczne wymagają zastąpienia obciążenia rzeczywistego przez sumę obciążeń sinusoidalnych przy wykorzystaniu **więcej niż jednego wyrazu szeregu Fouriera.**

Czynnik drugi - złożoną siłę pulsującą tłumioną przesuwającą się po belce ze stałą prędkością można opisać równaniem

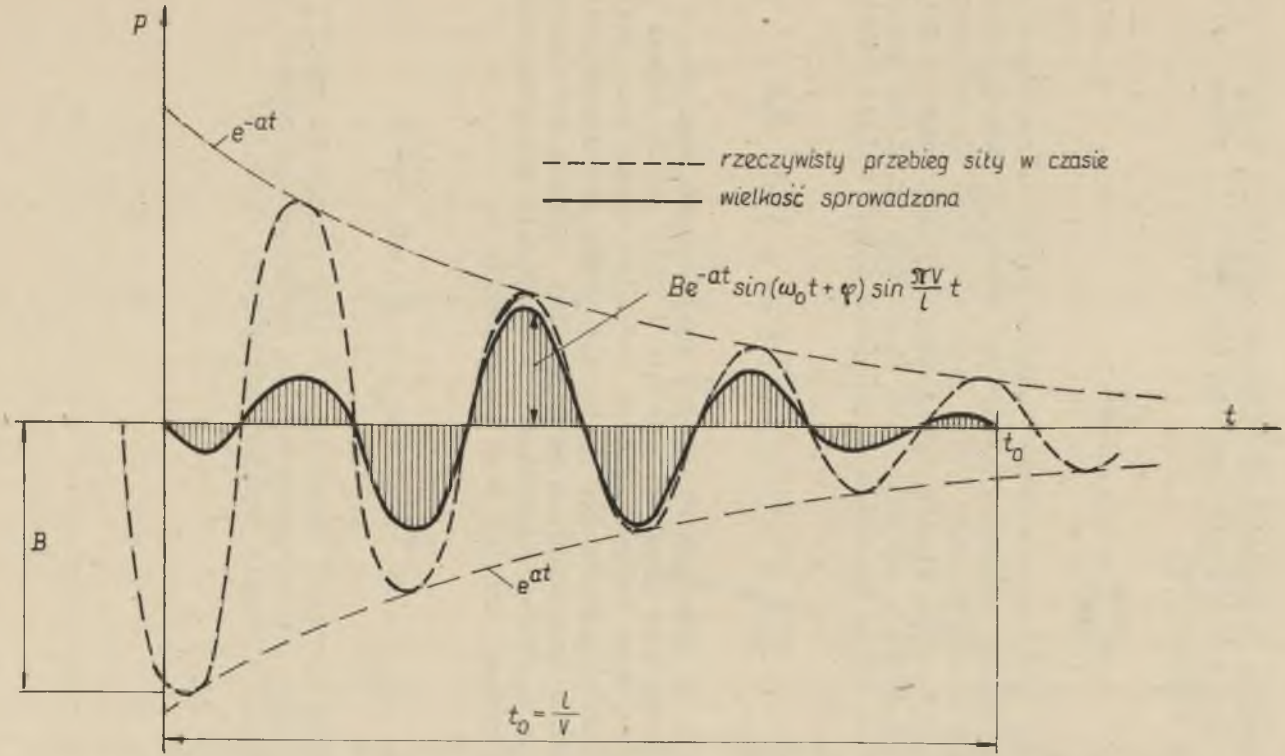
$$P_{dyn} = \sum_n B_n e^{-a_n t} \sin (n\omega t + \varphi_n) \sin \frac{\pi v}{l} t \qquad (3.3)$$

Na siłę tą składają się różne formy drgań pojazdu, a w pierwszym rzędzie drgania nadwozia i osi. Jeśli jednak uwzględnimy różną wagę poszczególnych rodzajów drgań oraz fakt, że wartości składających się na B_n nie można doświadczalnie ani analitycznie wyznaczyć, a możliwe jest jedynie doświadczalne określenie wartości sumarycznej B (w formie współczynnika k_n) - to możemy przyjąć n = 1 otrzymując

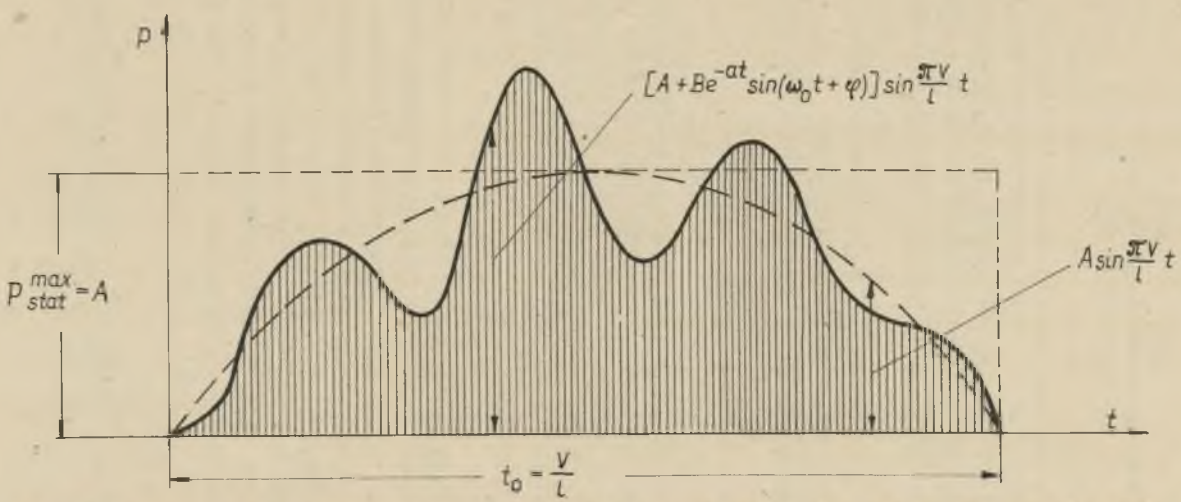
$$P_{dyn} = Be^{-at} \sin (\omega_o t + \varphi) \sin \frac{\pi v}{l} t \qquad (3,4)$$

Wykres siły opisanej równaniem (3.4) przedstawia rys.25

Wobec tego schematyczny wykres sumarycznego nacisku na środek belki w czasie będzie następujący (rys.26)



Rys.25. Wykres działania siły pulsującej na środek belki



Rys.26. Wykres sumarycznego sprowadzonego nacisku pojazdu na środek belki

3.3.2. Związki między masą pojazdu a masą układu pojazd - most

Jak wspomniano poprzednio, istotny wpływ na rodzaj i wielkość drgań mostu wywiera czynnik charakteryzujący stosunek między sprowadzonymi masami obciążenia m_p i układu most - pojazd m_u

$$\varkappa = \frac{m_p}{m_m + m_p} = \frac{m_p}{m_u} \qquad (3.5)$$

Dotychczasowe rozważania nad tym problemem miały charakter zbyt ogólny i dlatego celowe jest określenie współczynnika $\varkappa$ dla różnych rodzajów mostów drogowych, oraz - w celu uzyskania danych porównawczych - również dla mostów kolejowych.

W grupie mostów drogowych*) rozpatrywano oddzielnie mosty stalowe, mosty żelbetowe i mosty sprężone.

Wśród mostów stalowych wzięto pod uwagę dwa rodzaje konstrukcji:

mosty z pomostem niezależnym,

mosty z żelbetową płytą współpracującą.

Mosty z żelbetową płytą współpracującą okazały się nieco cięższe, ale w ogólności różnice były niewielkie i dlatego stalowe mosty drogowe potraktowano jako całość, wprowadzając średnie wartości ciężarów i wielkości pochodnych.

Jak widać z wykresu (rys.27) ciężary jednostkowe wolno rosły wraz z rozpiętością. I tak np. dla l = 10 m - g ~ 8,5 t/mb, a dla l = 30 m - g ~ 9,5 t/mb.

W mostach żelbetowych do rozpiętości l = 8 - 9 m jako podstawę do obliczenia ciężarów przyjęto przekrój płytowy a powyżej miarodajne były już rozwiązania belkowe. Ciężary jednostkowe w zakresie rozpiętości 5 - 20 m zmieniały się od 10 do 20 t/mb. (rys.28).

Mosty sprężone do rozpiętości 15 - 16 m przeliczano jako płytę pełną a powyżej jako ustrój żebrowany o przekroju poprzecznym zmieniającym się z rozpiętością. W zakresie roz-

---

*) Dane wykresów zostały opracowane dla mostów drogowych stałej szerokości b = 7,0 + 2 x 1,25 = 9,5 m. Ciężar nawierzchni g = 350 kg/m^2.

piętości 10 - 25 m - ciężary jednostkowe zmieniały się od 12 do 16 t/mb. (rys.29). Różnica ciężarów (w porównaniu do mostów żelbetowych) uwydatniała się korzystnie dopiero od rozpiętości kilkunastometrowych.

We wszystkich przypadkach dane przeliczeń porównywane były z danymi z obiektów wykonanych.

Obliczenie ciężarów jednostkowych mostów kolejowych zostało dokonane w oparciu o obiekty istniejące (jednotorowe) i obciążenie NC. Dla mostów stalowych rozpatrzono oddzielnie nawierzchnię lekką (10 obiektów) oraz nawierzchnię ciężką (7 obiektów). Wyniki przedstawia rys.31. Mosty betonowe potraktowano jako całość (31 obiektów) żelbetowych i sprężonych. Wykres ciężarów jednostkowych i wartości pochodnych przedstawia rys.30.

We wszystkich przypadkach masę sprowadzoną mostu wyliczono w zależności $m_m = \frac{17,8 \cdot l}{35g}$. Masę pojazdów drogowych określano dla niekorzystnego założenia, że po obu pasmach ruchu przejeżdżają (zgodne w fazie działania) dwa 15-tonowe pojazdy.

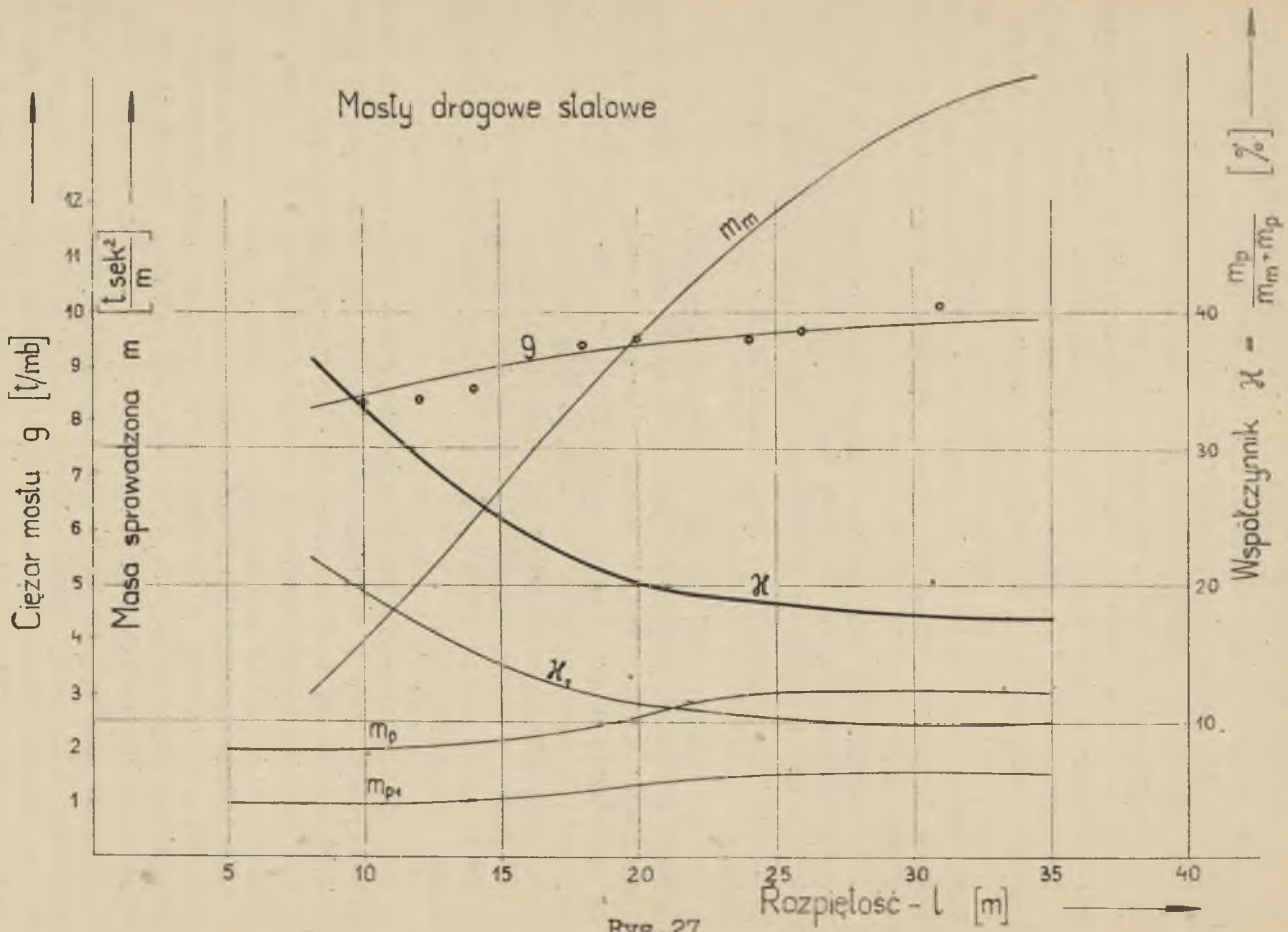
Na wykresach dla mostów drogowych (rys.27, 28 i 29) oprócz krzywych ciężarów jednostkowych oraz mas sprowadzonych mostu i obciążenia podano również krzywą $\varkappa_1$ ilustrującą zależność między masą sprowadzoną nie dwóch, a jednego pojazdu, a masą układu (co zdarza się najczęściej choć nie jest przypadkiem najbardziej niekorzystnym).

Różnice w wartościach $\varkappa$ dla mostów drogowych i kolejowych przedstawione są na rys.32. Z tego zbiorczego wykresu widać wyraźnie, że:

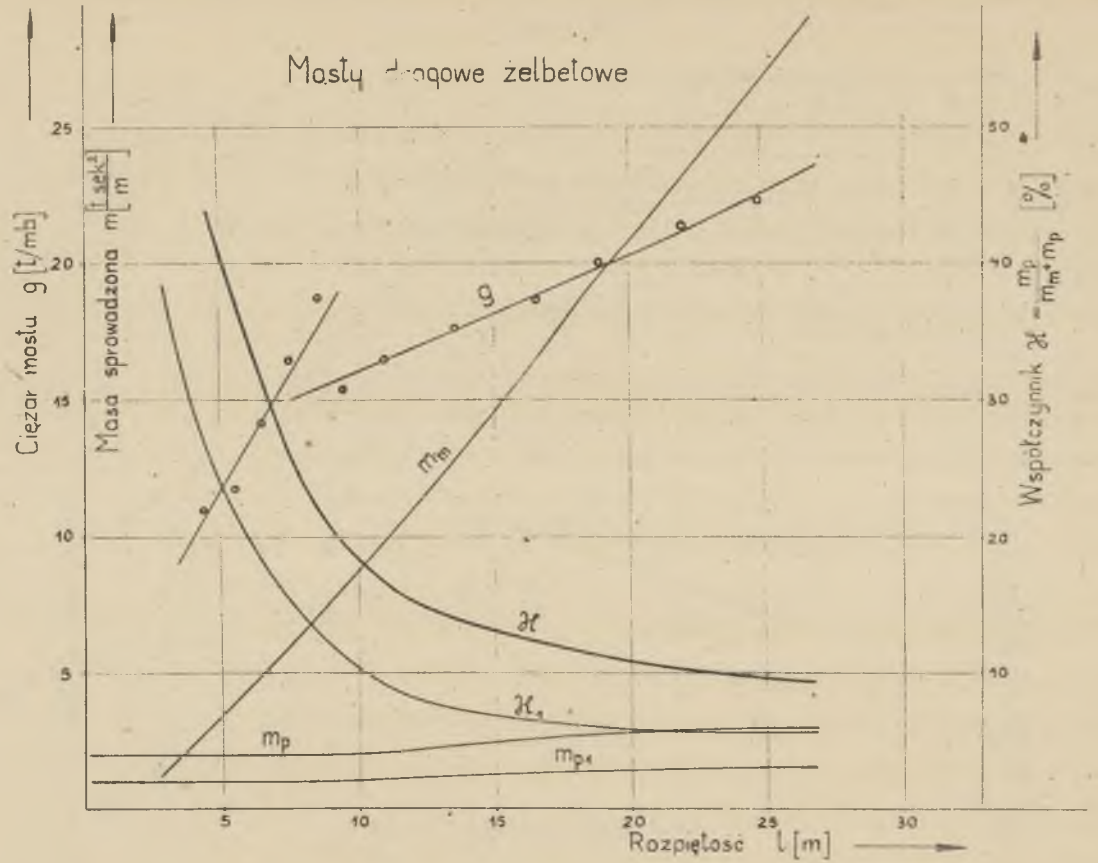
a) rząd wielkości współczynnika "$\varkappa$" jest inny w mostach drogowych a inny w mostach kolejowych. Np. dla mostów drogowych betonowych o rozpiętości 20 m - $\varkappa$ wynosi ok.10% a dla mostów kolejowych tej samej rozpiętości ok.5 razy więcej,

b) istnieją zakresy rozpiętości dla których wartości $\varkappa$ są nieduże, co nasuwa przypuszczenie, że dla tych zakresów przyjęcie masy układu m_u = const nie wpłynie istotnie na wyliczone parametry drgań.

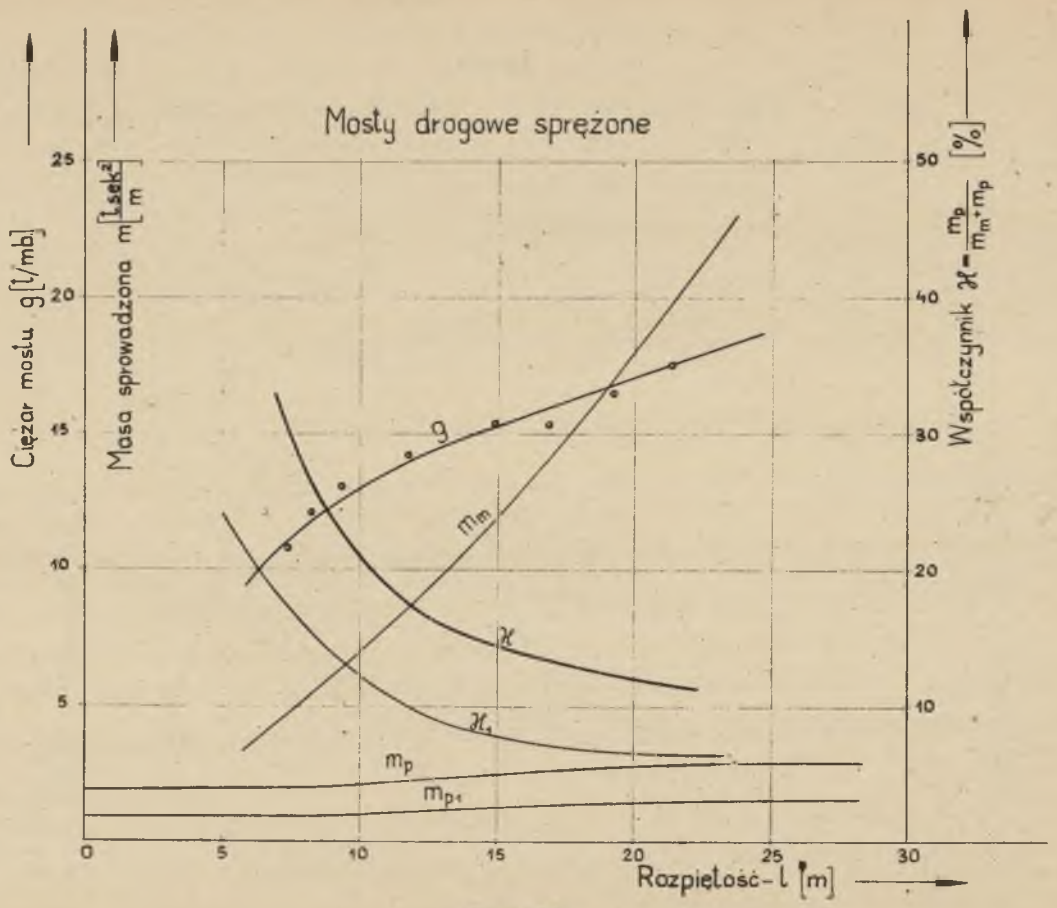
Nadzwyczaj trudno jest analitycznie ocenić wielkość błędu wyników obliczenia dynamicznego jako funkcji $\varkappa$. Wiąże się to ze znanymi trudnościami rozwiązywania parametrycznego równania ruchu belki. Dlatego na podstawie analiz porównawczych parametrów drgań uzyskanych z pomiaru i obliczenia Iljasiewicz przyjmuje, że jeśli masa obciążenia nie przekracza 10 - 15% masy mostu, to wpływ zmienności masy układu może być pominięty. Odpowiada to wartościom $\varkappa$ = 0,14 - 0,20.


Mosty drogowe stalowe
Ciężar mostu g [t/mb]
Masa sprowadzona m [t sek²/m]
Współczynnik ϰ = mp/(mm+mp) [%]
Rozpiętość - l [m]
g
mm
ϰ
ϰ1
mp
mp1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
10
20
30
40
5
10
15
20
25
30
35
40

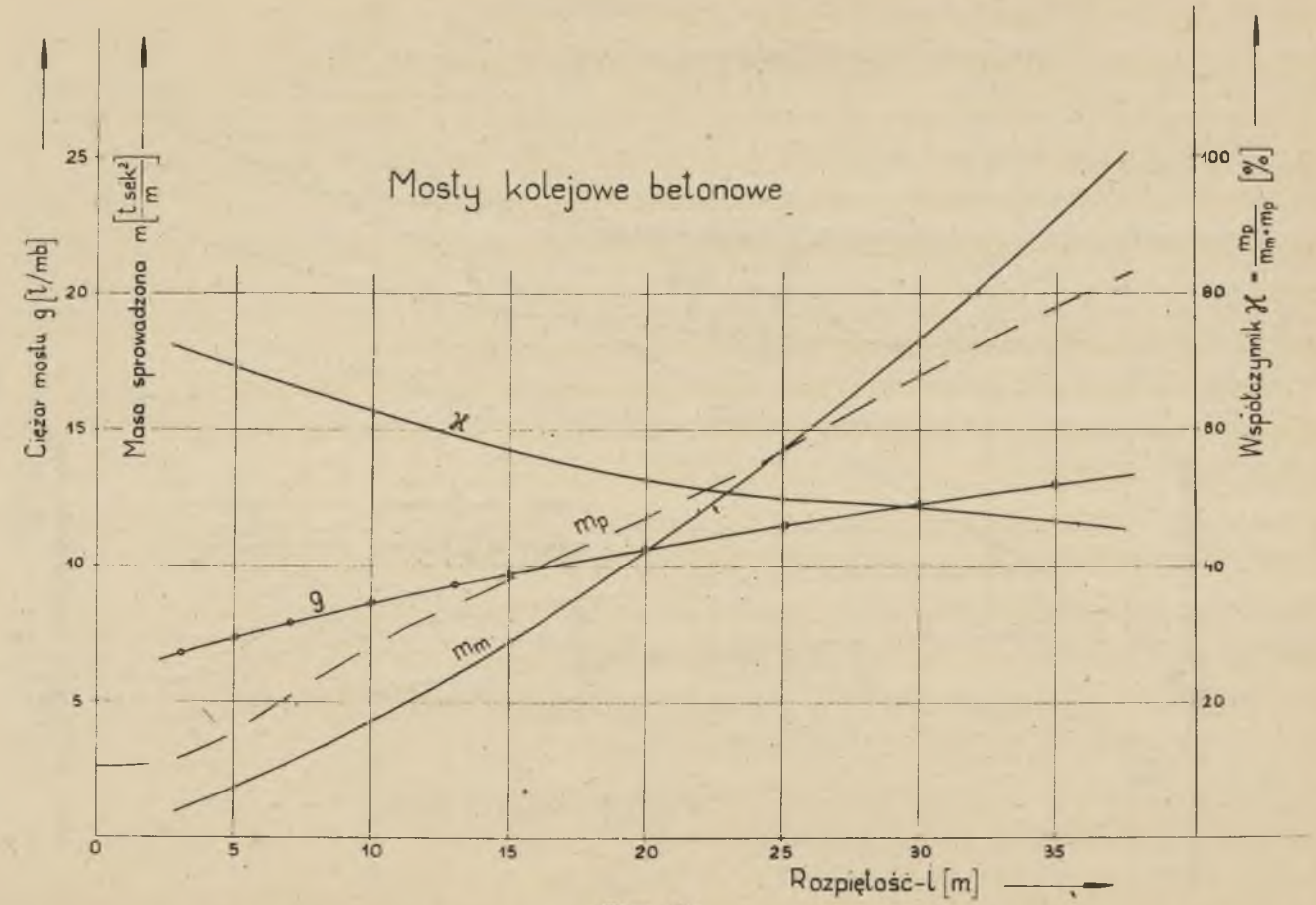
Rys. 27


Mosty drogowe żelbetowe
Ciężar mostu g [t/mb]
Masa sprowadzona m [t·sek²/m]
Współczynnik ϰ = mp/(mm+mp) [%]
Rozpiętość l [m]
g
mm
ϰ
ϰ1
mp
mp1
25
20
15
10
5
50
40
30
20
10
5
10
15
20
25
30

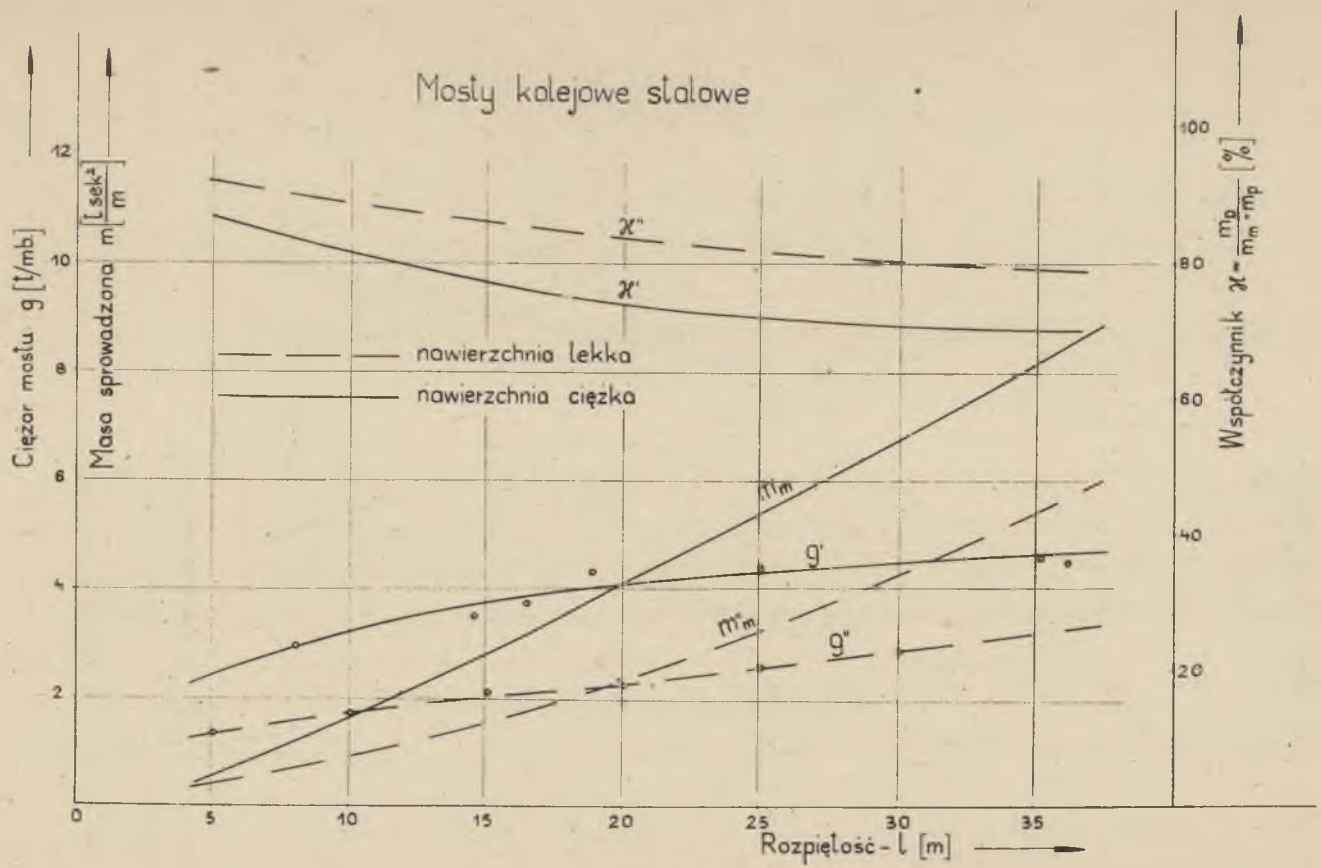
Rys.28


Mosty drogowe sprężone
Ciężar mostu g [t/mb]
Masa sprowadzona m [t·sek²/m]
Współczynnik ϰ = mp/(mm+mp) [%]
Rozpiętość - l [m]
g
mm
ϰ
ϰ1
mp
mp1
0
5
10
15
20
25
30
10
20
30
40
50

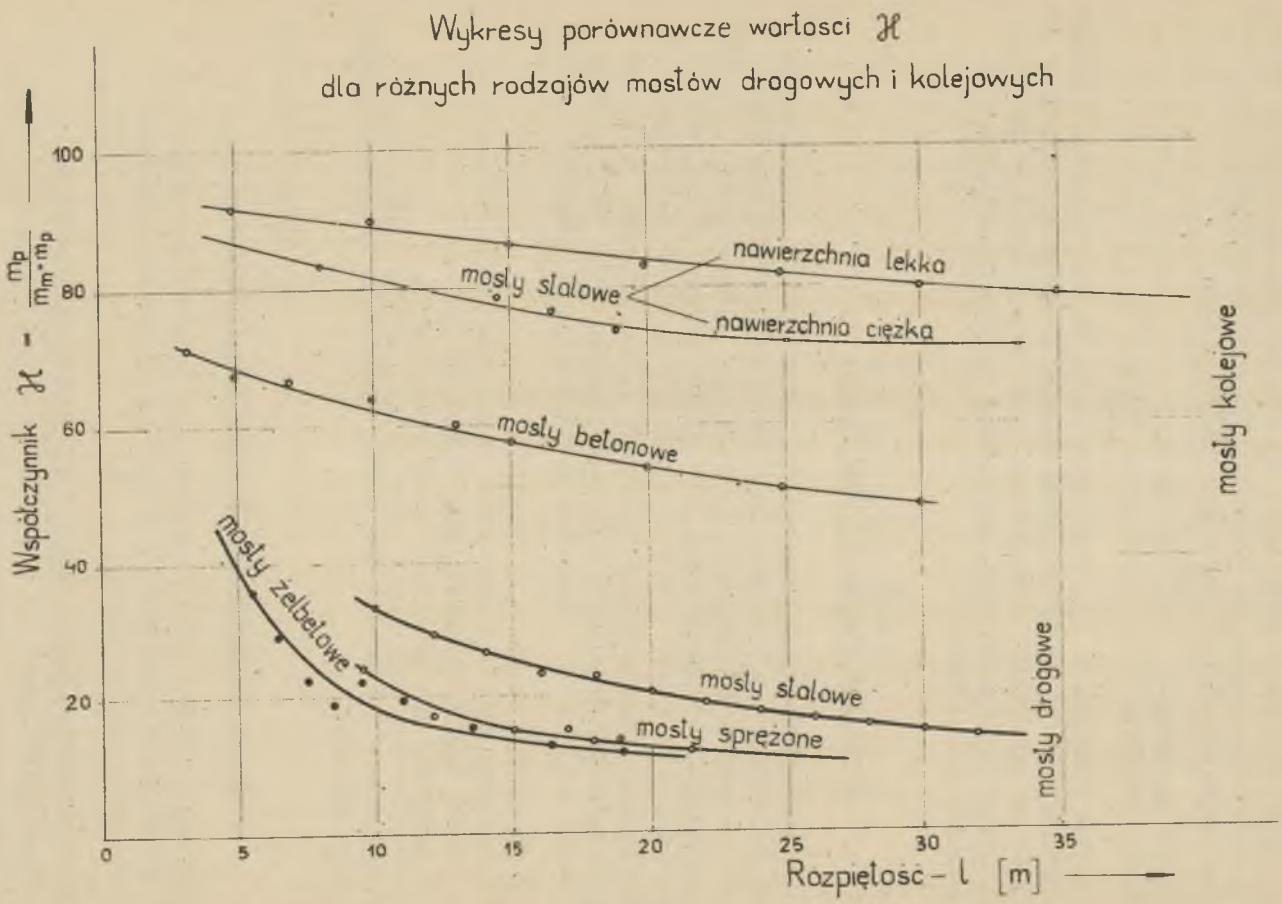
Rys. 29


Mosty kolejowe betonowe
Ciężar mostu g [t/mb]
Masa sprowadzona m [t sek²/m]
Współczynnik χ = mp/(mm+mp) [%]
Rozpiętość-l [m]
g
mp
mm
χ
0
5
10
15
20
25
30
35
5
10
15
20
25
20
40
60
80
100

Rys. 30


Mosty kolejowe stalowe
Ciężar mostu g [t/mb.]
Masa sprowadzona m [t sek²/m]
Współczynnik $\varkappa = \frac{m_p}{m_m \cdot m_p}$ [%]
nawierzchnia lekka
nawierzchnia ciężka
ϰ''
ϰ'
m'm
g'
m''m
g''
Rozpiętość - l [m]
0
5
10
15
20
25
30
35
2
4
6
8
10
12
20
40
60
80
100

Rys. 31


Wykresy porównawcze wartości $\mathcal{H}$
dla różnych rodzajów mostów drogowych i kolejowych
Współczynnik $\mathcal{H} = \frac{m_p}{m_m \cdot m_p}$
100
80
60
40
20
0
5
10
15
20
25
30
35
Rozpiętość - l [m]
nawierzchnia lekka
mosty stalowe
nawierzchnia ciężka
mosty betonowe
mosty żelbetowe
mosty stalowe
mosty sprężone
mosty drogowe
mosty kolejowe

Rys. 32

Poglądy Iljasiewicza wymagają jeszcze weryfikacji, ale gdyby znalazły potwierdzenie, to dla mostów drogowych rozwiązanie równania ruchu ze współczynnikiem funkcyjnym przy "ÿ" byłoby uzasadnione dopiero dla rozpiętości:

mosty betonowe $l < 10$ m
mosty stalowe $l < 20 - 25$ m.

Jednak również i dla tych niewielkich rozpiętości (zwłaszcza poniżej 10 - 12 m) problem wymaga dodatkowej analizy ze względu na specyfikę obciążenia (por. 3.3.3/III). W mostach kolejowych zmienność masy musiałaby być uwzględniona dla wszystkich rozpiętości.

3.3.3. Równania ruchu środka belki

Z przeprowadzonych poprzednio rozważań nad sposobem działania pojazdu oraz wpływem jego masy na sumaryczną masę układu - wynika niemożność jednolitego traktowania pod względem obliczenia dynamicznego nie tylko mostów kolejowych i drogowych, ale nawet różnych rodzajów mostów drogowych.

Ustalenie zakresów podobieństwa (tj. zakresów, wewnątrz których praca dynamiczna mostu drogowego może być opisana tym samym równaniem) musi być dokonane przy uwzględnieniu:

a) wielkości mostu (rozpiętości),
b) rodzaju mostu i odpowiadającej wartości współczynnika $\varkappa$,
c) niektórych czynników konstrukcyjnych.

W oparciu o te kryterium można wydzielić trzy następujące grupy mostów:

I. Mosty drogowe znaczniejszych rozpiętości

Zaliczamy tutaj mosty powyżej orientacyjnej granicy $l \sim 20$ m (mosty betonowe) i $l \sim 30$ m (mosty stalowe). Dla tej grupy można zauważyć że:

- współczynnik jest mały, co uzasadnia przyjęcie $m_u = \text{const}$
- tłumienie ustroju można pominąć
- waga czynnika $Be^{-at} \sin(\omega_o t + \varphi) \sin \frac{\pi y}{l}$ maleje wraz z rozpiętością wobec tego w mostach dużych może być on po-

minięty. Jest rzeczą stwierdzoną, że przyczyną pulsacji są nie tylko nierówności nawierzchni, lecz również wszelkie załamania wzgl.silniejsze zmiany krzywizny linii ugięcia występujące np. w mostach ciągłych. Ale maksymalne wielkości "B" występować będą w takim przypadku w pobliżu podpory, a ponieważ długość tłumienia czynnika $Be^{-at} \sin(\omega_o t + \varphi)$ wynosi ok.20 - 25 m - jego wpływ także przy takich mostach możemy pominąć.

- istnieje jasność charakteru pracy statycznej i warunków podparcia.

W związku z tym drgania ustroju można opisać równaniem*)

$$m_u \ddot{y} + c\,y = A \sin \frac{\pi v}{l} t \qquad (3.6)$$

Zwrócić jednak należy uwagę, że zbliżając się ku orientacyjnej granicy 1 ~ 20 m - konieczne jest (zwłaszcza w mostach betonowych) uwzględnienie tłumienia konstrukcji (przynajmniej przez wprowadzenie do lewej strony równania czynnika $k \cdot \dot{y}$).

Rozwiązanie tego równania dla różnych rodzajów mostów jest znane od dawna. Szczegółową analizę przeprowadza m.in. Inglis [4] i Iljasiewicz [5].

II. Mosty mniejszych rozpiętości

Rozpatrywać tutaj musimy oddzielnie mosty betonowe i mosty stalowe:

Mosty betonowe ($10 < l < 20$ m)

W mostach tej grupy:

- współczynnik $\varkappa$ nie przekracza 20% (nawet przy niekorzystnym założeniu równoczesnego działania dwóch pojazdów).

---

*) W rozważaniach niniejszych pominięto zjawisko, o którym jak dotychczas bardzo mało wiemy tj. tzw. "tłumienie pozorne" czyli wymianę energii między pojazdem i mostem [53]. Być może, że w niektórych typach mostów ma ono poważne znaczenie.

- konstrukcja tych mostów jest przeważnie belkowa a ponieważ stwierdzono eksperymentalnie [52], że dynamiczny rozkład obciążeń na moście pokrywa się - co do swego charakteru - ze statycznym, więc (mimo silnych zazwyczaj stężeń poprzecznych) - można zastosować schemat dynamiczny belki,
- warunki podparcia są dość jednolite,
- wpływ tłumionej pulsacji pojazdu rośnie wraz ze zmniejszaniem się rozpiętości i nie może być pominięty.

Wobec tego charakter drgań ustroju wystarczająco dokładnie opisuje równanie:

$$m_u\ddot{y} + k\dot{y} + cy = \left[A+Be^{-at}\sin(\omega_1 t + \varphi)\right] \cdot \sin\frac{\pi v}{l}t \qquad (3.7)$$

w którym m_u = const.

Ponieważ wpływ tłumionej pulsacji pojazdu na drgania mostu drogowego dotychczas nie był rozpatrywany - równanie to będzie omówione w dalszym ciągu pracy (p.3.3.4).

<u>Mosty stalowe</u> ($10 < l < 30$ m)

Mosty te różnią się od poprzednio omówionych mniejszych mostów betonowych tym, że współczynnik $\varkappa$ przybiera znaczniejsze wartości (rys.27). Wobec tego wpływ zmienności masy układu musi być uwzględniony, co prowadzi do parametrycznej formy równania ruchu:

$$\ddot{y}\left(m_m + m_p\sin^2\frac{\pi v}{l}t\right) + k\dot{y} + cy =$$

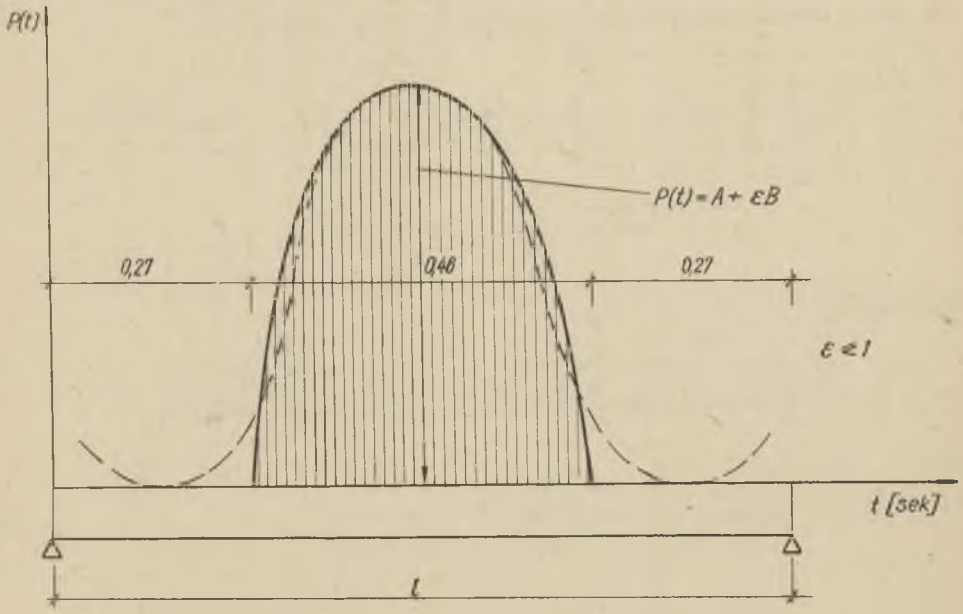
$$= \left[A + Be^{-at}\sin(\omega t + \varphi)\right]\sin\frac{\pi v}{l}t \qquad (3.8)$$

Uwagi o rozwiązaniu tego równania zostaną przedstawione w p.3.3.5.

III. <u>Mosty betonowe bardzo małych rozpiętości (dla $l<10$-12m)</u>

Dla mostów tej grupy - poprzednio przedstawiony schemat obliczenia dynamicznego jest niezadowalający, gdyż mosty te są inaczej obciążone niż obiekty większych rozpiętości.

Jeśli bowiem rozpatrujemy najniekorzystniejsze działanie pojazdu, to - ze względu na wpływ nierówności progowych - może być ono w zasadzie zastąpione przez jeden impuls. Przy określaniu parametrów decydujących o pracy dynamicznej takiego bardzo małego mostu w stosunku do mostów większych, konieczne jest uwzględnienie szeregu odrębności, które mogą mieć istotny wpływ na rezultaty obliczenia.
A więc - w pierwszym rzędzie - można zauważyć, że przy małych rozpiętościach okres drgań nadwozia samochodu jest duży w porównaniu do okresu drgań mostu i wobec tego masa nadresorowa części pojazdu nie może odpowiednio reagować na szybkie zmiany ugięcia resorów i wychylenia ustroju nośnego wywołane impulsem. Dlatego też przy analizie wpływu uderzenia należy brać pod uwagę jedynie masę samego ustroju nośnego, gdyż wpływ masy podresorowej pojazdu jest minimalny. Ponadto obliczając tę masę układu musimy brać pod uwagę, że warunki podparcia konstrukcji nośnej nie dadzą się przy tych rozpiętościach jednoznacznie określić. W każdym razie tylko w wyjątkowych przypadkach można mówić o swobodnym podparciu,



Rys. 33. Impulsowe działanie obciążenia samochodowego - na mały most

gdyż w kierunku częściowego utwierdzenia działa zarówno brak łożysk jak i ciągłość nawierzchni.
Pionowa sztywność mostu "c" winna być określona z uwzględnieniem faktu, że konstrukcja omawianych mostów jest z reguły płytowa (mostów stalowych tej rozpiętości wykonuje się mało), a stosunek boków $\frac{b}{l} \geqslant 1$.

Charakter impulsu - mający duży wpływ na wielkość pierwszego wychylenia - przedstawiony jest orientacyjnie dla najniekorzystniejszego układu obciążeń na rys.33 dla następujących parametrów ustroju $l = 10$ m; $T_p = 2$ Hz; $V_p = 10$ m/sek.

Problemem ruchu układu drgającego pod działaniem impulsów zajmowało się szereg autorów, a w szczególności J.M.Rabinowicz, A.P.Filippow i S.Ziemba. Mimo tego działanie impulsu na most mały - w podanym wyżej ujęciu-wymaga dalszej analizy.

3.3.4. Rozwiązanie równania ruchu belki charakterystycznego dla mostów mniejszych betonowych ($10 < l < 20 - 25$ m)

Wychodząc z równania 3.7., rozkładając iloczyn sinusów na sumę cosinusów oraz przyjmując oznaczenia:

$$\frac{A}{m} = \bar{A}; \quad \frac{B}{m}\cos\varphi = \bar{B}; \quad \frac{B}{m}\sin\varphi = \bar{C}; \quad \omega_1 = \frac{\pi v}{l};$$

$$\omega_o + \frac{\pi v}{l} = \omega_2; \quad \omega_o - \frac{\pi v}{l} = \omega_3$$

otrzymamy:

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} + \frac{c}{m}y = \bar{A}\sin\omega_1 t + \bar{B}e^{-at}(\cos\omega_3 t - \cos\omega_2 t) +$$

$$+ \bar{C}e^{-at}(\sin\omega_2 t - \sin\omega_3 t) \qquad (3.9)$$

Rozwiązując metodą operatorową otrzymamy:

$$L(y) = Y(s)$$

$$s^2\, Y(s) + \frac{k}{m}\, s\, Y(s) + \frac{c}{m}\, Y(s) =$$

$$= \bar{A}\,\frac{\omega_1}{s^2+\omega_1^2} + \bar{B}\,\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_3^2} - \bar{B}\,\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_2^2} +$$

$$+ \bar{C}\,\frac{\omega_2}{(s+a)^2+\omega_2^2} - \bar{C}\,\frac{\omega_3}{(s+a)^2+\omega_3^2}$$

$$Y(s)\left[s^2 + \frac{k}{m}\, s + \frac{c}{m}\right] = \bar{A}\,\frac{\omega_1}{s^2+\omega_1^2} + \frac{\bar{C}\omega_2 - \bar{B}(s+a)}{(s+a)^2+\omega_2^2} +$$

$$+ \frac{\bar{B}(s+a) - \bar{C}\omega_3}{(s+a)^2 + \omega_3^2}$$

$$s^2 + \frac{k}{m}\, s + \frac{c}{m} = (s+b)^2 + \omega_4^2; \quad b = \varrho = \frac{k}{2m}$$

$$\omega_4 = \frac{\sqrt{4\,mc - k^2}}{2\,m}$$

$$Y(s) = \frac{\bar{A}\,\omega_1}{(s^2+\omega_1^2)\left[(s+b)^2+\omega_4^2\right]} + \frac{\bar{C}\,\omega_2 - \bar{B}\,(s+a)}{\left[(s+b)^2+\omega_4^2\right]\left[(s+a)^2+\omega_2^2\right]} +$$

$$+ \frac{\bar{B}\,(s+a) - \bar{C}\,\omega_3}{\left[(s+b)^2+\omega_4^2\right]\left[(s+a)^2+\omega_3^2\right]};$$

$$\frac{1}{(s^2+\omega_1^2)\cdot\left[(s+b)^2+\omega_4^2)\right]} = \frac{A_1\, s + B_1}{(s+b)^2+\omega_4^2} + \frac{A_2\, s + B_2}{s^2 + \omega_1^2}$$

gdzie:

$$A_1 = \frac{2b}{4b^2\omega_1^2 + (-\omega_1^2 + b^2 + \omega_4^2)^2}; \qquad A_2 = -A_1$$

$$B_1 = \frac{1}{\omega_1^2}\left[1 - (b^2 + \omega_4^2)\, B_2\right]; \quad B_2 = \frac{b^2 + \omega_4^2 - \omega_1^2}{4b^2\omega_1^2 + (-\omega_1^2 + b^2 + \omega_4^2)^2}; \quad \frac{\bar{C}\,\omega_2 - \bar{B}\,(s + a)}{\left[(s+b)^2 + \omega_4^2\right]\left[(s+a)^2 + \omega_2^2\right]} =$$

$$= \frac{A_3 s + B_3}{(s+b)^2 + \omega_4^2} + \frac{A_4 s + B_4}{(s+a)^2 + \omega_2^2}$$

gdzie:

$$A_3 = \frac{1}{2(b-a)}\left[B_3 + B_4\right]; \quad B_3 = \frac{\bar{C}\,\omega_2 - \bar{B}_a}{a^2 + \omega_2^2} - \frac{b^2 + \omega_4^2}{a^2 + \omega_2^2}\, B_4; \quad A_4 = -A_3; \quad A_6 = -A_5$$

$$B_4 = \frac{2\bar{B}(a-b)\,(a^2 + \omega_2^2) - (\bar{C}\omega_2 - \bar{B}_a)\,(\omega_2^2 - b^2 - \omega_4^2 + 4ab - 3a^2)}{(a^2 + \omega_2^2 + 3b^2 - 4ab - \omega_4^2)(a^2 + \omega_2^2) - (b^2 + \omega_4^2)(\omega_2^2 - \omega_4^2 - b^2 + 4ab - 3a^2)}$$

$$\frac{\bar{B}\,(s + a) - \bar{C}\omega_3}{\left[(s + b)^2 + \omega_4^2\right]\left[(s + a)^2 + \omega_3^2\right]} = \frac{A_5\, s + B_5}{(s + b)^2 + \omega_4^2} + \frac{A_6\, s + B_6}{(s + a)^2 + \omega_3^2} \quad \text{gdzie} \quad A_5 = \frac{1}{2(a-b)}\,(B_5 + B_6);$$

$$B_6 = \frac{2\bar{B}\,(b-a)((a^2+\omega_3^2) - (\bar{B}a - \bar{C}\omega_3)\,(\omega_3^2 + 4ab - b^2 - \omega_4^2 - 3a^2)}{(a^2+\omega_3^2)(\omega_3^2 + a^2 - \omega_4^2 - 4ab + 3b^2) - (b^2+\omega_4^2)(\omega_3^2 - b^2 - \omega_4^2 - 3a^2 + 4ab)}$$

$$B_5 = \frac{\bar{B}a - \bar{C}\omega_3}{a^2+\omega_3^2} - B_6\,\frac{b^2+\omega_4^2}{a^2+\omega_3^2}$$

$$Y(s) = \bar{A}\omega_1\,\frac{A_1 s + B_1}{(s+b)^2+\omega_4^2} + \bar{A}\omega_1\,\frac{A_2 s + B_2}{s^2+\omega_1^2} + \frac{A_3 s + B_3}{(s+b)^2+\omega_4^2} + \frac{A_4 s + B_4}{(s+a)^2+\omega_2^2} + \frac{A_5 s + B_5}{(s+b)^2+\omega_4^2} + \frac{A_6 s + B_6}{(s+a)^2+\omega_3^2}$$

$$Y(s) = \frac{(\bar{A}\omega_1 A_1 + A_3 + A_5)(s+b) + \bar{A}\omega_1 B_1 + B_3 + B_5 - b\,(\bar{A}\omega_1 A_1 + A_3 + A_5)}{(s+b)^2+\omega_4^2} + \bar{A}\omega_1\,\frac{A_2 s + B_2}{s^2+\omega_1^2} +$$

$$+ \frac{A_4\,(s+a) + B_4 - A_4 a}{(s+a)^2+\omega_2^2} + \frac{A_6\,(s+a) + B_6 - a\,A_6}{(s+a)^2+\omega_3^2}$$

Oznaczenia:

$$p_1 = \bar{A}\omega_1 A_2;\ p_2 = \bar{A} B_2;\ p_3 = \bar{A} A_1\omega_1 + A_3 + A_5;\ p_4 = \frac{1}{\omega_4}\left[\bar{A}\omega_1 B_1 + B_3 + B_5 - b\,(A_1 A_1 + A_3 + A_5)\right]$$

$$p_5 = A_4;\ p_6 = \frac{1}{\omega_2}(B_4 - A_4\, a);\ P_7 = A_6;\ p_8 = \frac{1}{\omega_3}(B_6 - a\, A_6)$$

$$Y(s) = \frac{p_1 s + \omega_1 p_2}{s^2 + \omega_1^2} + \frac{p_3\,(s+b) + \omega_4\, p_4}{(s+b)^2 + \omega_4^2} + \frac{p_5\,(s+a) + \omega_2\, p_6}{(s+a)^2 + \omega_2^2} + \frac{p_7\,(s+a) + \omega_3\, p_8}{(s+a)^2 + \omega_3^2}$$

Wobec tego rozwiązanie ma postać:

$$y(t) = p_1 \cos\omega_1 t + p_2 \sin\omega_1 t + e^{-bt}(p_3 \cos\omega_4 t + p_4 \sin\omega_4 t) + e^{-at}(p_5 \cos\omega_2 t + p_6 \sin\omega_2 t) +$$

$$+ e^{-at}(p_7 \cos\omega_3 t + p_8 \sin\omega_3 t) \qquad (3.10)$$

a po wprowadzeniu dodatkowych oznaczeń:

$$P = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}, \quad \frac{p_1}{P} = \sin \varphi_1, \quad \frac{p_2}{P} = \cos \varphi_1$$

$$Q = \sqrt{p_3^2 + p_4^2}, \quad \frac{p_3}{Q} = \sin \varphi_4, \quad \frac{p_4}{Q} = \cos \varphi_4$$

$$R = \sqrt{p_5^2 + p_6^2}, \quad \frac{p_5}{R} = \sin \varphi_2, \quad \frac{p_6}{R} = \cos \varphi_2$$

$$S = \sqrt{p_7^2 + p_8^2}, \quad \frac{p_7}{S} = \sin \varphi_3, \quad \frac{p_8}{S} = \cos \varphi_3$$

$$y(t) = P \sin (\omega_1 t + \varphi_1) + Q\, e^{-bt} \sin (\omega_4 t + \varphi_4) +$$

$$+ e^{-at} R \sin (\omega_2 t + \varphi_2) + S \sin (\omega_3 t + \varphi_3) \qquad (3.9)$$

W równaniu tym $\omega_1 = \frac{\pi v}{l}$ a ω_4 jest częstością tłumionych drgań swobodnych mostu

$$\omega_4 = \frac{\sqrt{4\, mc - k^2}}{2\, m} = \sqrt{\omega^2 - b^2}$$

gdzie

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad b = \varrho = \frac{k}{2\, m}$$

Pierwszy składnik rozwiązania (3.11) obrazuje wychylenie statyczne środka belki, a drugi - drgania swobodne tłumione*) z pierwotną amplitudą Q, na którą wpływają zarówno parametry od obciążenia A sin $\omega_1 t$ jak i od obciążenia pulsującego.

Pozostałe dwa składniki o częstościach ω_2 i ω_3 związane są z działaniem pulsacyjnego składnika prawej strony równania (3.7).

Chcąc wyodrębnić rozwiązania dla poszczególnych części prawej strony równania (3.7) wystarczy z rozwiązania (3.11) wyeliminować wyrazy związane z pomijanym składnikiem.

Np. dla równania

$$\ddot{y} + 2b\dot{y} + \omega^2 y = A \sin \omega_1 t$$

rozwiązanie ma znaną postać

$$y(t) = P\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + Q_1 e^{-bt} \sin(\omega_4 t + \varphi_4)$$

gdzie P nie zmienia się w stosunku do równania (3.7) i wynosi

$$P = \sqrt{A^2 (A_2^2 \omega_1^2 + B_2^2)}$$

a Q_1 ma postać

$$Q_1 = \sqrt{A^2 \left[\omega_1^2 A_1^2 + \frac{\omega_1^2}{\omega_4^2} (B_2 - bA_1)\right]}$$

---

*) W obliczeniach dynamicznych mostów, a zwłaszcza mniejszych mostów drogowych - inaczej niż w większości pozostałych konstrukcji budowlanych - interesują nas stany nieustalone, tzn. stany przed stłumieniem drgań swobodnych. Czynnik $Qe^{-bt} \sin \omega_4 t$ nie może zatem zostać pominięty, gdyż analiza nasza dotyczy małych wartości t (czas przejazdu obciążenia jest krótki).

Do równania

$$\ddot{y} + 2b\dot{y} + \omega^2 y = \frac{B}{m} e^{-at} \sin(\omega_o t + \varphi) \sin \omega_1 t$$

czynniki związane ze stałymi R i S nie zmieniają się w stosunku równania pełnego, a ulegnie zmianie jedynie wielkość Q.

3.3.5. Przybliżone rozwiązanie równania ruchu belki charakterystycznego dla mniejszych mostów stalowych $10 < l < 30$ m

Wychodząc z wyrażeń na energię potencjalną i kinetyczną elementów układu pojazd - most - z pomocą równań Lagrange'a - prof. J.Naleszkiewicz [8] [53] wyprowadził ścisłe równanie ruchu dla belki bez tłumienia przy sile A przesuwającej się z prędkością v.

Uwzględniając składnik reprezentujący tłumioną pulsację pojazdu i tłumienie belki, a pomijając tłumienie pozorne otrzymamy z tego równania - równania 3.8.

$$\left(m_m + m_p \sin^2 \frac{\pi v}{l} t\right) \ddot{y} + k\dot{y} + cy = A \sin \frac{\pi v}{l} t +$$

$$+ Be^{-at} \sin(\omega_1 t + \varphi) \sin \frac{\pi v}{l} t \qquad (3.8)$$

Wprowadzamy zmienne niemianowane ξ, τ z zależności:

$$y = l\xi \; ; \qquad \tau = \frac{v}{l} t$$

$$\dot{\xi} = \frac{v}{l} \; ;$$

oraz oznaczenia:

$$\ddot{\xi} = \frac{d\xi}{d\tau} \; ; \qquad \dot{\xi} = \frac{d^2\xi}{d\tau^2}$$

---

*) Zob. odnośnik na str.75.

$$\dot{y} = \frac{d\,(l\xi)}{dt} = l \cdot \frac{d\xi}{d\tau}\,\frac{d\tau}{dt} = v\dot{\xi}$$

$$\ddot{y} = \frac{v^2}{l}\,\ddot{\xi}$$

Wobec tego równanie przybierze postać:

$$\frac{v^2}{l}\left[m_m + m_p\,\frac{1 - \cos 2\pi\tau}{2}\right]\ddot{\xi} + kv\dot{\xi} + c\,l\xi =$$

$$= A\sin\pi\tau + Be^{-a\frac{l}{v}\tau}\sin\left(\omega_1\frac{l}{v}\tau + \varphi\right)\cdot\sin\pi\tau \qquad (3.8a)$$

a po przemnożeniu przez $\frac{2l}{v^2\,m_p}$:

$$\left[\frac{2\,m_m}{m_p} + 1 - \cos 2\pi\tau\right]\ddot{\xi} + \frac{2}{m_p}\,\frac{k\cdot l}{v}\,\dot{\xi} + \frac{2cl^2}{v^2\,m_p}\,\xi =$$

$$= A\,\frac{2l}{v^2\,m_p}\sin\pi\tau + B\,\frac{2l}{v^2\,m_p}\,e^{a\frac{l}{v}\tau}\sin\left(\omega_1\frac{l}{v}\tau + \varphi\right)\sin\pi\tau$$

Jeżeli wprowadzimy bezwymiarowe współczynniki:

$$p_1 = \frac{2\,m_m}{m_p}; \qquad p_2 = \frac{2}{m_p}\,\frac{k\cdot l}{v}; \qquad p_3 = \frac{2\,cl^2}{v^2\,m_p};$$

$$p_4 = \frac{2Al}{v^2\,m_p}; \qquad p_5 = \frac{2Bl}{v^2\,m_p}$$

to:

$$(p_1 + 1 - \cos 2\pi\tau)\ddot{\xi} + p_2\dot{\xi} + p_3\xi = p_4 \sin \pi\tau +$$

$$+ p_5 e^{-a\frac{1}{v}\tau} \sin\left(\omega_1 \frac{1}{v}\tau + \varphi\right) \sin \pi\tau \qquad (3.8b)$$

Zastosowanie metody Galerkina do uzyskania przybliżonego rozwiązania tego równania nie dało pozytywnych rezultatów, gdyż uzyskujemy wtedy niesłychanie zawikłany układ czterech równań a ponadto nie jesteśmy w stanie oszacować wielkości błędu przy sumowaniu rozwiązań częściowych. Dlatego też zastosowano metodę "kroczków uśrednionych" wykorzystując drogę utorowaną przez prof. J.Naleszkiewicza [54].

Warunki początkowe:

$$\tau = 0; \qquad \xi(o) = 0; \qquad \dot{\xi}(o) = 0$$

Obliczamy wartości $\xi_1 \ldots\ldots \xi_n$ oraz $\dot{\xi}_1 \ldots\ldots \dot{\xi}_n$ wg schematu

$$\Delta\tau = \tau_{i+1} - \tau_i$$

$$\dot{\xi}_{i+1} = \dot{\xi}_i + \ddot{\xi}\,\Delta\tau \qquad (3.12)$$

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \dot{\xi}_i \Delta\tau + \ddot{\xi}_i \frac{(\Delta\tau)^2}{2}$$

zaś:

$$\ddot{\xi}_i = \ddot{\xi}_i(\xi_i, \dot{\xi}_i, \tau_i)$$

Wartości w równaniu o stałych współczynnikach mogłyby być w ten sposób wyliczone. Ale w przypadku równania o zmiennych współczynnikach, błąd spowodowany zmiennością współczynników w czasie może być znaczny i dlatego wyliczamy współczynniki uśrednione w obrębie $\Delta\tau$ przez całkowanie w granicach $\tau_i - \tau_{i+1}$ i podzielenie wyniku przez $\Delta\tau$.

Współczynnik przy $\ddot{\xi}$ uśredniony dla podziału ma postać

$$\bar{A}_i = \frac{1}{\Delta\tau}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (p_1 + 1 - \cos 2\pi\tau)\, d\tau =$$

$$= p_1 + 1 - \frac{n}{2\pi}\left[\sin\frac{2\pi}{n}(i+1) - \sin\frac{2\pi}{n} i\right]$$

dla n ustalonego: $\bar{A}_i = p_1 + a_{i,\ i+1}$

W dalszym ciągu: $\bar{B}_i = p_2$; $\bar{C}_i = p_3$

$$\bar{D}_i = \frac{1}{\Delta\tau}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} p_4 \sin\pi\tau\, d\tau =$$

$$= p_4 \frac{n}{\pi}\left[\cos\frac{\pi}{n} i - \cos\frac{\pi}{n}(i+1)\right]$$

$$\bar{D}_i = p_4 \cdot d_{i,\ i+1}$$

$$\bar{E}_i = \frac{1}{\Delta\tau}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} p_5\, e^{-a\frac{1}{v}\tau} \sin\left(\omega_1 \frac{1}{v}\tau + \varphi\right) \sin\pi\tau\, d\tau$$

$$\bar{E}_i = p_5\left\{ nK \sin\left[\left(\frac{c+\pi}{n}(i+1) + \psi_1\right) - \sin\left(\frac{c+\pi}{n} i + \psi_1\right)\right] + \right.$$

$$\left. + n L\left[\sin\left(\frac{c-\pi}{n}(i+1) + \psi_2\right) - \sin\left(\frac{c-\pi}{n} i + \psi_2\right)\right]\right\}$$

gdzie

$$b = -a\frac{1}{v}$$

$$c = \omega_1 \frac{1}{v}$$

$$q_1 = \frac{1}{2}\,\frac{b\sin\varphi - (c+\pi)\cos\varphi}{b^2 + (c+\pi)^2}$$

$$q_2 = -\frac{1}{2}\,\frac{b\cos\varphi + (c+\pi)\sin\varphi}{b^2 + (c+\pi)^2}$$

$$q_3 = -\frac{1}{2}\,\frac{b\sin\varphi - (c-\pi)\cos\varphi}{b^2 + (c-\pi)^2}$$

$$q_4 = \frac{1}{2}\,\frac{b\cos\varphi + (c-\pi)\sin\varphi}{b^2 + (c-\pi)^2}$$

$$K = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}\,; \qquad L = \sqrt{q_3^2 + q_4^2}$$

$$\operatorname{tg}\psi_1 = \frac{q_2}{q_1}\,; \qquad \operatorname{tg}\psi_2 = \frac{q_4}{q_3}$$

ostatecznie:

$$\bar{E}_i = p_5\,(K\,e_{i,\,i+1} + L\,s_{i,\,i+1})$$

przy czym:

$$e_{i,\,i+1} = n\left[\sin\left(\frac{c+\pi}{n}(i+1) + \psi_1\right) - \sin\left(\frac{c+\pi}{n}\,i + \psi_1\right)\right]$$

$$s_{i,\,i+1} = n\left[\sin\left(\frac{c-\pi}{n}(i+1) + \psi_2\right) - \sin\left(\frac{c-\pi}{n}\,i + \psi_2\right)\right]$$

Wobec tego nasze równanie z uśrednionymi współczynnikami przyjmie postać

$$\bar{A}_i\ddot{\xi} + \bar{B}_i\dot{\xi} + \bar{C}_i\xi = \bar{D}_i + \bar{E}_i$$

$$\bar{A}_i\ddot{\xi} = \bar{D}_i + \bar{E}_i - \bar{C}_i\xi - \bar{B}_i\dot{\xi}$$

$$\ddot{\xi} = \frac{\bar{D}_i + \bar{E}_i}{\bar{A}_i} - \frac{\bar{C}_i}{\bar{A}_i} - \frac{\bar{B}_i}{\bar{A}_i}\xi - \frac{\bar{B}_i}{\bar{A}_i}\dot{\xi}$$

Wstawiając do równań

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \dot{\xi}_i \Delta\tau + \ddot{\xi}_i \frac{\Delta\tau^2}{2}$$

$$\dot{\xi}_{i+1} = \dot{\xi}_i + \ddot{\xi}_i \Delta\tau$$

otrzymamy

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \ddot{\xi}_i \Delta\tau + \left[\frac{\bar{D}_i + \bar{E}_i}{\bar{A}_i} - \frac{\bar{C}_i}{\bar{A}_i}\xi - \frac{\bar{B}_i}{\bar{A}_i}\dot{\xi}\right]\frac{\Delta\tau^2}{2}$$

$$\dot{\xi}_{i+1} = \left[\frac{\bar{D}_i + \bar{E}_i}{\bar{A}_i} - \frac{\bar{C}_i}{\bar{A}_i}\xi_i - \frac{\bar{B}_i}{\bar{A}_i}\dot{\xi}_i\right]\Delta\tau + \dot{\xi}_i$$

i ostatecznie po uporządkowaniu:

$$\xi_{i+1} = \frac{\bar{D}_i + \bar{E}_i}{\bar{A}_i}\frac{\Delta\tau^2}{2} + \left(1 - \frac{\bar{C}_i}{\bar{A}_i}\frac{\Delta\tau^2}{2}\right)\xi_i + \left(\Delta\tau - \frac{\bar{B}_i}{\bar{A}_i}\frac{\Delta\tau^2}{2}\right)\dot{\xi}_i$$

$$\dot{\xi}_{i+1} = \frac{\bar{D}_i + \bar{E}_i}{\bar{A}_i}\Delta\tau - \frac{\bar{C}_i}{\bar{A}_i}\Delta\tau\,\xi_i + \left(1 - \frac{\bar{B}_i}{\bar{A}_i}\Delta\tau\right)\dot{\xi}_i$$

Równania końcowe pozwalają nam - po uprzednim wyliczeniu wartości $\bar{A}_i$, $\bar{B}_i$, $\bar{C}_i$, $\bar{D}_i$, $\bar{E}_i$ dla poszczególnych wartości wyjściowych i przedziałów - wyznaczyć przebieg funkcji ξ. Trudność polega na konieczności uwzględnienia znacznej ilości przedziałów (100 - 300) ze względu na nieregularność krzywej wychylenia środka belki. Wyliczenia te wykonywane przy pomocy maszyn elektronowych dla konkretnych obiektów są w toku.

3.3.6. Określenie wielkości wychylenia belki

Rozwiązanie równań ruchu belki należy uważać za etap pośredni na drodze do określania maksymalnych wielkości sumarycznych wychyleń, które są podstawą wyznaczania przeciążenia dynamicznego belki.

Na te sumaryczne wielkości wychyleń wpływają w pierwszym rzędzie częstości drgań swobodnych układu most - obciążenie ω_o oraz oscylacji pionowej pojazdu ω_1. Wpływ ma także przesunięcie fazy działania ω_o i ω_1 - φ.

Tłumienie pojazdu można uznać za stałe, gdyż dla samochodów tego samego rodzaju przybiera ono wartości podobne.

Wstępem do rozpatrzenia warunków występowania znacznych wychyleń belki powinno być zbadanie możliwości wystąpienia zjawisk typu rezonansowego.

Rezonans - i związane z nim niebezpieczeństwo nieograniczonego narastania drgań - może wystąpić jedynie wtedy, jeśli spełniony jest warunek

$$n \frac{\omega_1}{\omega_o} = 1 \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Oznacza on, że częstość działania siły wymuszającej odpowiada częstości drgań swobodnych sprężonego układu pojazd - most. Ustalmy zatem w pierwszym rzędzie charakter zmienności częstości drgań swobodnych układu w czasie.

Dla mostów kolejowych podaje tą zależność rys.34a, a dla mostów drogowych rys.34b.

Np. dla mostu betonowego o rozpiętości 20 m przy prędkości przejazdu obciążenia V = 36 km/godz. odcinek t_2 wynosi zwykle ok.60 sek a odcinki t_1 i t_3 ~ 2 sek. Na odcinku t_2 most jest na całej długości pokryty przez przejeżdżający pociąg i wtedy właśnie może wystąpić rezonans. W mostach większych rozpiętości odcinki t_1 i t_2 wydłużają się, a krzywa zmiany "n" staje się bardziej płaska. W takich przypadkach może i na odcinkach zakrzywionych (t_1 i t_3) wystąpić rezonans jeśli zmiana częstości siły wymuszającej następuje tak jak zmiana częstości "n" układu (zmiana prędkości pociągu). W mostach mniejszych i średnich rozpiętości można możliwość tę pominąć.

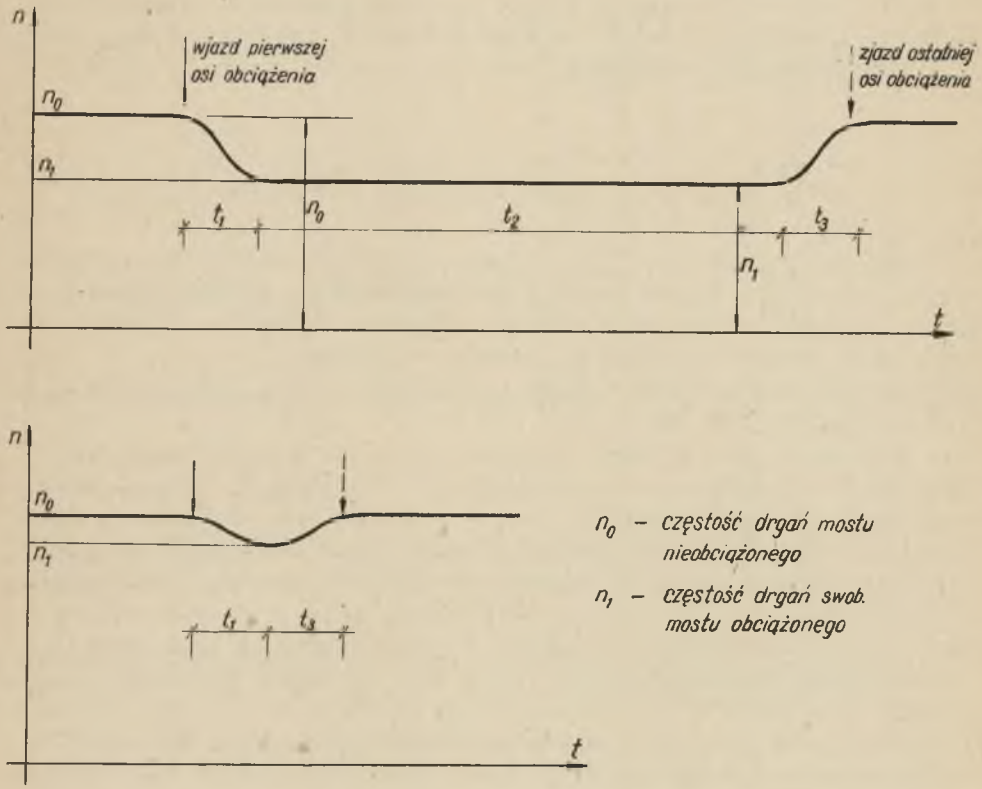
W mostach drogowych charakter wykresu n-t jest inny, co wynika z trudności zastąpienia sił skupionych przez obciążenie ciągłe oraz braku odcinka t_2 (ze względu na zwykle małą długość pojazdu w stosunku do mostu).

Aby wystąpiły wychylenia charakteru rezonansowego oprócz warunków wspomnianych poprzednio muszą być spełnione warunki dodatkowe:

a) siła wymuszająca działa odpowiednio długo (tj.odcinek t_2 duży). Ma to miejsce np. przy przejeździe długiego pociągu zestawionego z takich samych wagonów przez krótki most,

b) obiekt ma małe tłumienie (np. most stalowy większej rozpiętości).

Aby nastąpiło nieograniczone narastanie amplitud drgań - powinny być w zasadzie spełnione oba te warunki. W praktyce jest to jednak niemożliwe, gdyż są one w znacznym stopniu sprzeczne.



Rys.34. Charakter zmienności częstości drgań swobodnych układu pojazd - most: a) mosty kolejowe, b) mosty drogowe

Przejazd długiego rytmicznie działającego pociągu przez most znacznej rozpiętości może nie wywołać rezonansu ze względu na stałą zmianę masy sumarycznej i związaną z tym zmianą częstości drgań układu. Uwzględnienie nieliniowego charakteru zmienności masy układu dodatkowo komplikuje tutaj

charakter zmiany częstości drgań mostu i może w jeszcze poważniejszym stopniu zmniejszyć odcinek, na którym są warunki wystąpienia rezonansu.

Pomijając pewne specjalne problemy, które wykraczają poza ramy niniejszych rozważań (np. dynamikę mostów wiszących) można z dużą dozą prawdopodobieństwa - nawet bez dokładnej analizy matematycznej - w oparciu o powyższe rozumowania postawić tezę, że:

a) rezonansowe narastanie wychyleń belki nie może wystąpić w mostach drogowych (z wyjątkiem - być może - bardzo specjalnych przypadków jak np. przejazd kolumny czołgów itp.),

b) w mostach kolejowych konieczna jest dokładna analiza matematyczna drgań mostów małych o małym tłumieniu (stalowych) oraz wszystkich mostów średnich i dużych rozpiętości.

Ale jeśli nawet w mostach drogowych nie grozi rezonans, to jednak konieczne jest określenie maksymalnych wychyleń belki.
Np. wartość tą jako ekstremum obwiedni wykresu drgań wyznaczał dla niektórych przypadków obciążenia mostów kolejowych S.Iljasiewicz [5] a rozwinął problem J.Kaziej [9].

W mostach drogowych ze względu na zawikłany charakter prawej strony równania (3.7) w związku z tłumieniem siły wymuszającej i niewielką ilością cykli działania obciążenia - problem jest bardziej złożony. Wyznaczenie sumarycznego wychylenia belki jest tutaj możliwe jedynie dla nielicznych przypadków i przy zastosowaniu założeń upraszczających.
Np. wychodząc z rozwiązania równania (3.7.) i przyjmując, że wychylenie sumaryczne będzie sumą wychyleń składowych, trzeba rozpatrzyć jako główny czynnik funkcję

$$y_1(t) = e^{-at} R \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + S \sin(\omega_3 t + \varphi_3)$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$a_1 + b_1 = R \qquad \text{czyli} \qquad a_1 = \frac{R + S}{2}$$

$$a_1 - b_1 = S \qquad \text{czyli} \qquad b_1 = \frac{R - S}{2}$$

mamy

$$R \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + S \sin(\omega_3 t + \varphi_3) =$$

$$= (a_1 + b_1) \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + (a_1 - b_1) \sin(\omega_3 t + \varphi_3) =$$

$$= a_1 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + \sin(\omega_3 t + \varphi_3) +$$

$$+ b_1 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) - \sin(\omega_3 t + \varphi_3) =$$

$$= 2a_1 \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_3}{2} t + \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_3}{2} t + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2}\right) +$$

$$+ 2b_1 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_3}{2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_3}{2} t + \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}\right)$$

Oznaczenia:

$$\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_3) = \lambda_1 ; \qquad \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_3) = \lambda_2$$

$$\lambda_1 < \lambda_2$$

$$\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_3) = \varphi_5 ; \qquad \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_3) = \varphi_6$$

$$R \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + S \sin(\omega_3 t + \varphi_3) =$$

$$= (R+S) \sin(\lambda_2 t + \varphi_6) \cos(\lambda_1 t + \varphi_5) +$$

$$+ (R-S) \sin(\lambda_1 t + \varphi_5) \cos(\lambda_2 t + \varphi_6) \qquad (3.13)$$

Jest to suma dwóch sinusoid modulowanych o częstotliwości nośnej λ_2 i modulującej λ_1 ($\lambda_1 < \lambda_2$).

Obwiednie tych sinusoid są odpowiednio:

$$(R+S)\cos(\lambda_1 t + \varphi_5) \quad \text{i} \quad (R-S)\sin(\lambda_1 + \varphi_5)$$

Obwiednia sumy będzie w przybliżeniu sumą obwiedni

$$h_1(t) = (R+S)\cos(\lambda_1 t + \varphi_5) + (R+S)\sin(\lambda_1 t + \varphi_5) =$$

$$= \sqrt{(R+S)^2 + (R-S)^2}\,\sin(\lambda_1 t + \varphi_7) =$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{R^2+S^2}\,\sin(\lambda_1 t + \varphi_7)$$

przy czym:

$$\varphi_7 = \varphi_5 + \operatorname{arc\,tg}\frac{R+S}{R-S}$$

W ten sposób zagadnienie zostało sprowadzone do znalezienia maksimum funkcji:

$$h(t) = e^{-at}\sqrt{2\,(R^2+S^2)}\,\sin(\lambda_1 t + \varphi_7) \qquad (3.14)$$

$$\frac{d\,h(t)}{dt} = 0$$

$$h(t) = e^{-at}\sqrt{2\,(R^2+R^2)} - a\sin(\lambda_1 t + \varphi_7) +$$

$$+ \lambda_1\cos(\lambda_1 t + \varphi_7) = 0$$

$$a\sin(\lambda_1 t + \varphi_7) = \lambda_1\cos(\lambda_1 t + \varphi_7)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1 t + \varphi_7) = \frac{\lambda_1}{a}$$

$$\lambda_1 t + \varphi_7 = \text{arc tg} \frac{\lambda_1}{a}$$

$$t_o = \frac{1}{\lambda_1} (\text{arc tg} \frac{\lambda_1}{a} - \varphi_7) \qquad (3.15)$$

Wobec tego

$$h_{max} = e^{-at} \sqrt{2 (R^2 + S^2)} \sin (\lambda_1 t_o + \varphi_7)$$

A ponieważ

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_3) = \frac{1}{2} (\omega_o + \frac{\pi v}{l} - \omega_o + \frac{\pi v}{l}) =$$

$$\lambda_1 = \frac{\pi v}{l}$$

Ostatecznie

$$h_{max} = e^{-at_o} \sqrt{2 (R^2 + S^2)} \sin (\frac{\pi v}{l} t_o + \varphi_7) \qquad (3.16)$$

Czynnik związany z drganiami swobodnymi belki daje nam wychylenie w czasie t_o nie większe jak Qe^{-bt_o}.

Wobec tego sumaryczne wychylenie, (pomijając pierwszy czynnik równania (3.11) będzie w każdym razie mniejsze niż

$$h = e^{-at_o} \sqrt{2 (R^2 + S^2)} \sin (\frac{\pi v}{l} t_o + \varphi_7) + Qe^{-bt_o} \qquad (3.17)$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Zb. Wasiutyński: Problematyka drgań w budownictwie betonowym. Zeszyty Problemowe Nauki Polskiej nr XI Wyd. PAN Warszawa 1957.

[2] S.Bernstein: O rabotie metalliczeskich mostow pod dinamiczeskoj nagruzkoj. OGIZ - Gostroizdat - Moskwa 1931.

[3] Schaper - Homann - Bernhard: Mechanische Schwingungen der Brücken. Verkehrwissenschaftliche Lehrmittelgeselschaft m.b.H. bei der Deutschen Reichsbahn. Berlin 1933.

[4] E.C.Inglis: A mathematical treatise on vibrations in railway bridges. Cambridge 1934.

[5] S.Iljasiewicz: Osnowy dinamiczeskogo rasczeta bałocznych metalliczeskich mostow. Gosmaszizdat - Moskwa 1934.

[6] V.Koloušek: Dinamika stavebnich konstrukci. Statni nakladelstwi technicke literatury I Dil - Praha 1954.

[7] J.Goldenblat: Niektoryje nowyje problemy dinamiki sooruženij. Izwiestija Akademii Nauk SSSR Nr 6 - 1950 s. 819 - 833.

[8] J.Naleszkiewicz: Działanie dynamiczne pojazdów mosty. Postęp techniczny w budowie mostów. WK Warszawa 1954.

[9] J.J.Kaziej: Dinamiczeskij rasczet proletnych strojenij żelaznodorożnych mostow. Transżeldorizdat - 1960.

[10] A.D.Lizariew: Sowremiennyje issledowanija w obłasti dinamiki predwaritielnonapriazennych żelazobietonnych konstrukcij. Izwiestija Wyższych Uczebnych Zawiedienij " "Stroitielstwo i Architektura" Nr 9 Nowosibirsk - 1959.

[11] E.Troicki: Trudy WNIIŻS. Wyp. 3 Transżeldorizdat 1951.

[12] G.Kuźniecow: O wlijanii predwaritielnogo napriażenija na dinamiczeskije swojstwa napriażenno-armirowannych bałok. Izwiestija Wyższ. Ucz.Zaw. "Stroitielstwo i Architiektura" Nr 3 - 1959 str. 109 - 118.

[13] A.Weygand: Der Einfluss des Strassenverkehrs auf die Schwingungen von Strassenbrücken der Reichsautobahn. Habilitationsschrift veröffentlicht in "Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwessens", Heft 21 - November 1942.

[14] L.T. Oehler: Vibration susceptibilities of various highway bridge types. Journal of ASCE, Struct. Div. Nr 1318 - 1957.

[15] J.Głomb: O pomiarze naprężeń i drgań w konstrukcjach mostowych. Sprawozdania naukowe PTMTS - Zeszyt 6 - Gliwice 1961.

[16] R.Bernhard: Brücke und Fahrzeug. Der Bauingenieur. Heft 28 - 1930 s. 481 - 488.

[17] S.Bernstein: Osnowy dinamiki soorużenij. Gostroizdat - Moskwa 1938.

[18] G.Denkhaus, G.Dück: Biegeschwingungen vorgespannten Balken. Beton und Stahlbetonbau Nr 3 - 1952.

[19] H.Bay: Schwingungsversuche an vorgespannten Bauwerken. Die Bautechnik Bd 31 s.255 H. 8 - 1959.

[20] Naruoka Nasao: Diskusion of the paper by Oehler Le Roy T."Vibration susceptibilities of varions highway bridge types" Journal of Struct. Div Proc. ASCE nr 6 - 1957 str.1442-45.

[21] G.Rodow: Ekspierimentalnyje issledowanija predwaritielno-napriażennych i obycznych żelazobietonnych konstrukcij na kratkowriennyje nagruzki tipa sejsmiczeskich. Sbornik "Stroitielstwo w sejsmiczeskich rajonach" Gosizdat "Stroitielstwo i Architiektura" 1957.

[22] A.Lämmlein: Beton u.Stahlbetonbau H.5 - 1951 s. 108-111.

[23] B.M.Weinblat: O zatuchanii kolebanij żelazobietonnych mostow. Awtomobilnyje Dorogi, Nr 10 - 1958.

[24] E.Bock: Verhalten von Beton- und Stahlbetonbalken bei Biegeschwingungen. VDI - Zeitschrift, Bd 86 (1942) s.145-147.

[25] F.Müller: Über den dynamischen E-Modul von Spannbeton. Beton- und Stahlbetonbau. Heft 8 - 1959.

[26] L.Fryba: Dynamicke charakteristiky ocelovych železnicnich mostu. Inżenyrskie stavby Nr 12 - 1960.

[27] E.E.Gibszman: Metody dinamiczeskich ispytanij mostow. Sbornik: Woprosy ispytanija i oswidietielstwowanija mostow. Dorizdat Guszosdora NKWD - SSSR - Moskwa 1941.

[28] A.Breneisen, E.Wiśniewska: Referat na IV Konferencji Naukowej KIL PAN i PZITB w Krynicy 1960 r.

[29] E.Troicki, N.Bogdanow, Ł.Josilewski: Przęsła mostów kolejowych z betonu sprężonego. WK Warszawa 1959.

[30] J.M.Rabinowicz: Diejstwije piechoty, kawalerii i artilerii na mosty pod obyknowiennuju dorogu. Instytut Inżeniernych Isledowanij, Transpieczat NKPS Moskwa 1929.

[31] G.A.Nikołajew: Dinamiczeskoje wozdiejstwije awtomobilja na most pod obyknowiennuju dorogu. Transpieczat - NKPS /1/91/ Moskwa 1929.

[32] E.Lehr: Die schwingungstechnischen Eigenschaften des Kraftwagens und ihre messtechnische Ermitlung. VDI - Zeitschrift Bd 78 (1934) s.329-335.

[33] E.Czudakow: Teoria samochodu. WK Warszawa 1954 str.303.

[34] D.W.Gelfgat: Analiticzeskoje opriedielenije pławnosti choda awtomobilja, Awtomobilnaja promyszlennost Nr 3/1949.

[35] H.Berman: ATZ 1953 s.151 u.f.

[36] A.Burgt: Luftfederung und Fahrkonfort. ATZ Nr 5-1960 s.113-117.

[37] M.Mitschke: Der Reifen in seiner Wirkung auf Fahrzeug und Fahrbahn, ATZ Nr 5/1960 s.118-122.

[38] O.Bode, P.Oehner: Untersuchungen über dynamische Bodenkräfte schwerer Kraftfahrzeuge. Deutsche Kraftfahrtforschung und Strassenverkehrstechnik H.120 - 1958. VDI Verlag - Düsseldorf.

[39] E.Essers: Fahrzeuggewichte - Bahnkräfte - Strassenschadigung, ATZ - 1956 s. 1 - 7 u. 47 - 52.

[40] M.Mitschke: Schwingungsverhalten und Sicherheit eines Kraftfahrzeuges, ATZ - 1958 H.6 s.168-174.

[41] F.Meister: Dynamische Eigenschaften von Strassen. Verlag M.Boerner Halle (Saale) 1935.

[42] E.Marquard: Untersuchungen über den Einfluss der Stossdämpfer auf die zwischen Rad und Fahrbahn auftretenden senkrechten dynamischen Bodenkräfte. Deutsche Kraftfahrforschung und Strassenverkehrstechnik, Heft 104-1957 VDI - Verlag Düsseldorf.

[43] K.Klöppel; H.Meppert: Zur Grösse des dynamischen Raddruckes luftbereifter Kraftfahrzeuge beim Überfahren von Bodenunebenheiten, VDI - Zeitschrift Bd 92-1950 s.785-788.

[44] E.Rausch: Vereinfachte Berechnungsweise des Raddruckes von luftbereiften Kraftfahrzeugen beim Überfahren von Bodenunebenheiten, VDI - Zeitschrift Bd 93-1951 s.680-681.

[45] E.Wedemeyer: Untersuchungen über Fahrbahnwellen. VDI Zeitschrift Bd 80 (1936) s.191-192.

[46] A.Hillerborg: Dynamic Influences of Smothly Running Loads on Simply Supported Girders. Institution of Structural Engineering and Bridge Building. Royal Institute of Technology, Stockholm 1951.

[47] H.Schulze: Das dynamische Zusammenwirken von Lokomotive und Brücke, Deutsche Eisenbahntechnik Heft 5 - 1959.

[48] B.Brückman: Brückenmesswesen, Brückenschwingungen und Brückenbelastbarkeit. Der Eisenbahnbau 1950 s.230 u. 250.

[49] LeRoy T.Oehler: Vibration Susceptibilities of Varions Highway Bridge Types. Journal of Struckt. Div. Proc. of. ASCE Nr 1318 - 1957.

[50] E.J.Ruble: Impact in Railroad Bridges. Journal of Struct. Div Proc. of ASCE Nr 736 July 1955.

[51] J.M.Biggs, H.S.Snev, J.M.Louw: The vibration of simple span highway bridges. Journal of Struckt. Div. Proc. ASCE Nr 1186 - 1957.

[52] T.P.Tung; L.E.Goodman; T.Y.Chen; N.M.Newmark: Highway bridge impact problems
Highway Res. Board Bull. 1956 No.124.

[53] J.Naleszkiewicz: Z dynamiki belki mostowej - Archiwum Mechaniki Stosowanej, Nr 4 - 1953.

[54] J.Naleszkiewicz: Współczynniki przeciążenia dynamicznego belki mostowej przy przejeździe pojedynczego pojazdu. Księga pokonferencyjna "Konstrukcje stalowe w budownictwie i mostownictwie" Arkady - Warszawa 1960.

Załącznik

NIEKTÓRE SPOSOBY OKREŚLANIA WIELKOŚCI LICZBOWYCH WYCHYLENIA DYNAMICZNEGO MOSTÓW

Metoda bezpośrednia w oparciu o rozwiązanie równania (3.7)

Określenie liczbowych wartości wychyleń na podstawie wyprowadzonych zależności jest dość pracochłonne i nastręcza liczne możliwości pomyłek, co wynika - w pierwszym rzędzie ze złożonej struktury wzorów na stałe P, Q, R i S. Jednak przy odpowiednim stabelaryzowaniu pracy i wprowadzeniu pewnych uproszczeń możliwe jest wykonanie obliczenia dynamicznego mostu w ciągu 10 - 14 godzin.

Przykład liczbowy

(Most stalowy wg tabeli nr 3 poz.4)

Dane: $l = 20{,}35$ m; $b = \rho = 0{,}11 \frac{1}{sek}$; $a = 1{,}7 \frac{1}{sek}$

$a = 1{,}7 \frac{1}{sek}$

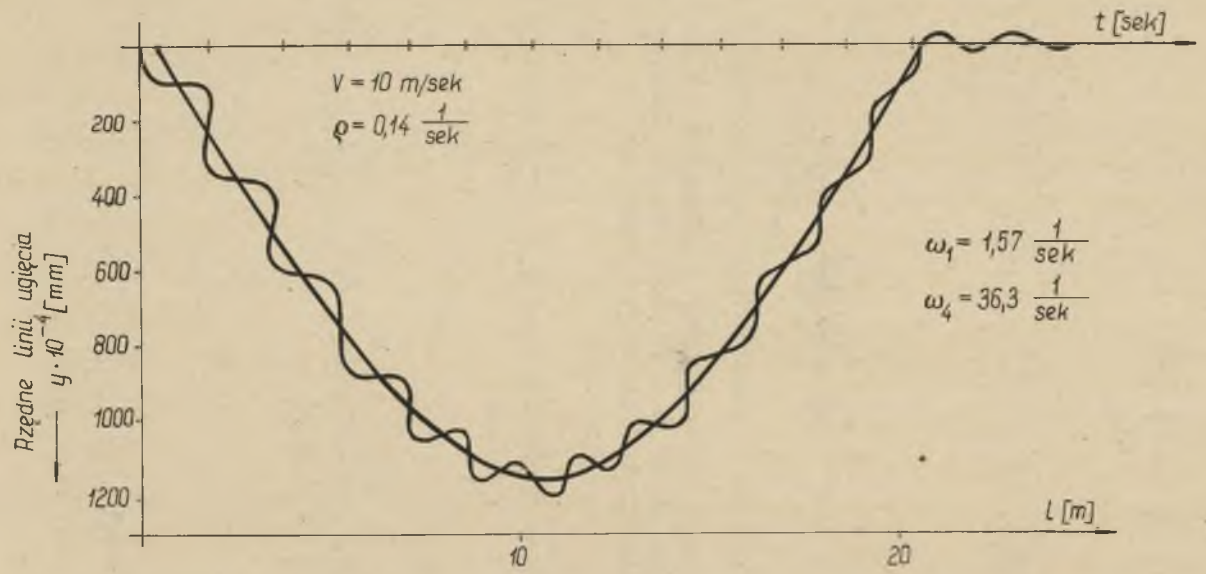
$A = 15$ t; $B = 10$ t ($k_n = 0{,}67$); $V = 36$ km/godz = 10m/sek

Częstość wymuszania 2 Hz; $\omega_o = 12{,}48 \frac{1}{sek}$

$$\omega_1 = \frac{\pi v}{l} = 1{,}57 \frac{1}{sek}; \qquad \omega_2 = \omega_o + \omega_1 = 14{,}05 \frac{1}{sek}$$

$$\omega_3 = \omega_o - \omega_1 = 10{,}91 \frac{1}{sek}$$

$$\omega_4 = \sqrt{\frac{4\,mc - k^2}{2\,m}} = \sqrt{\omega_4^2 - b^2} \cong 36{,}3 \frac{1}{sek}$$



Rys.35. Wykres ugięcia środka mostu pod działaniem siły $A \sin \omega_1 t$

Dla wymuszenia siłą A sin $\omega_1 t$ otrzymujemy

$$P = \sqrt{A^2(A_2^2\omega_1^2+B_2^2)} = \sqrt{1,51^2\left[(-1,7.10^{-7}.1,57)^2+(7,6.10^{-4})\right]^2}$$

$$\cong \sqrt{131,8 \cdot 10^{-8}} = 11,48 \cdot 10^{-4}m = 1,143 \text{ mm}$$

$$Q_1 = \sqrt{A^2\omega_1^2 A_1^2 + \frac{\omega_1^2}{\omega_4^2}(B_2 - b \cdot A_1)^2} =$$

$$= 1,51 \frac{1,57}{36,3} 7,6 \cdot 10^{-4} = 0,496 \cdot 10^{-4}m = 0,0496 \text{ mm}$$

Stosunek

$$\frac{Q_1}{P} = \frac{0.0496}{1,143} = \frac{1}{23,1}$$

Odpowiedni wykres przedstawiony jest na rys.35.

Dla sprawdzenia wykorzystamy rozważania S.Iljasiewicza*), który drgania belki pod rozpatrywanym obciążeniem (pomijając tłumienie mostu) określa równaniem:

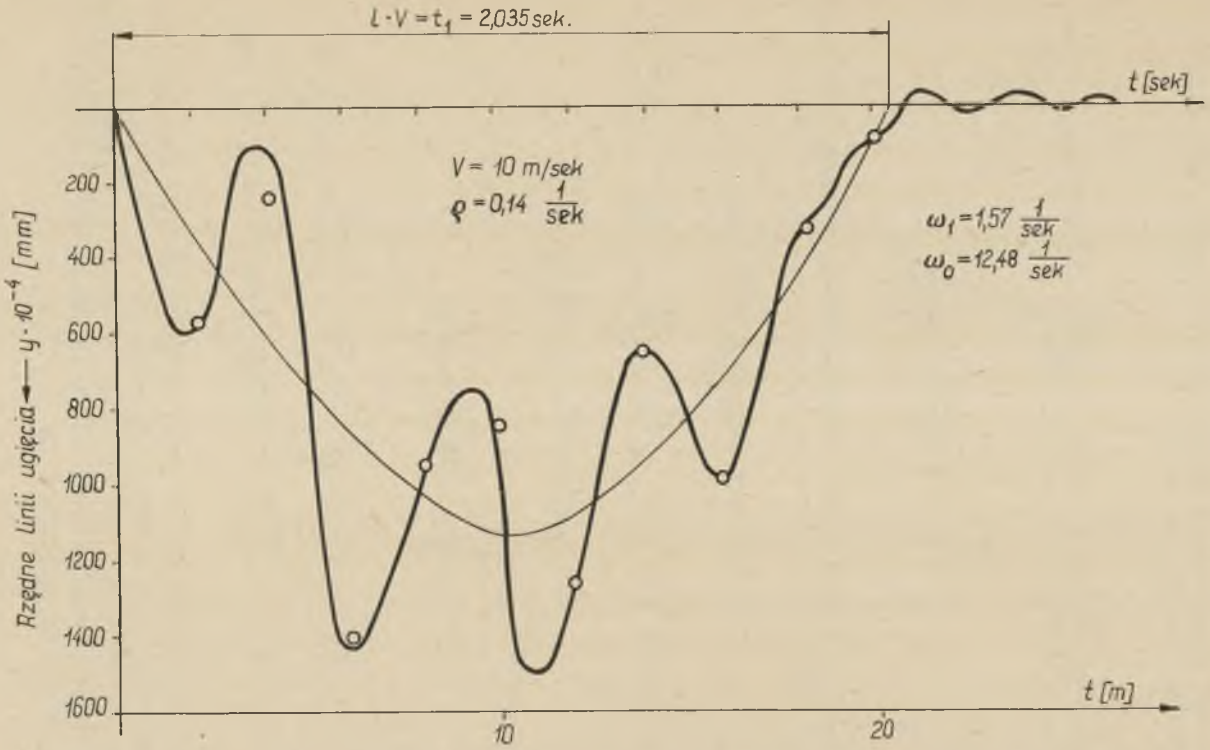
$$y = \frac{A}{c - m\omega_1^2}\left(\sin \omega_1 t - \frac{\omega_1}{\omega_4} \sin \omega_4 t\right)$$

względnie

$$y = \frac{A}{c - m\omega_1^2}\left(\sin \frac{\pi x}{l} - \frac{\omega_1}{\omega_4} \sin \frac{\omega_4}{4} x\right)$$

---

*) por. [5] str. 62 i nast.



Rys.36. Wykres wychylenia środka mostu stalowego pod działaniem siły opisanej prawą stroną równania (3.7)

Po wstawieniu wartości liczbowych z naszego przykładu dla $x = \frac{1}{2} = 10,17$ m otrzymamy:

$$= 0,00114\ (1 - 0,0432 \sin 36^{\circ}) = 0,001114 \text{ m} = 1,114 \text{ mm}$$

Amplituda drgań swobodnych oscylujących wokół linii wpływowej ugięcia statycznego Q_1

$$Q_1 = \frac{A}{c - m\omega_1^2} \frac{\omega_1}{\omega_4} = 0,00114 \cdot \frac{1,57}{36,3} = 0,0000494 = 0,0494 \text{ mm}$$

$$\frac{Q_1}{P} = \frac{0,0494}{1,114} = \frac{1}{22,5}$$

Dla wymuszenia pełną siłą opisaną prawą stroną równania (3.7) otrzymamy

$$P \text{ (jak poprzednio)} = 1,116 \text{ mm}$$

$$Q = 10^{-4}\ (-3,56)^2 + (-1,29)^2 = 3,79 \cdot 10^{-4}$$

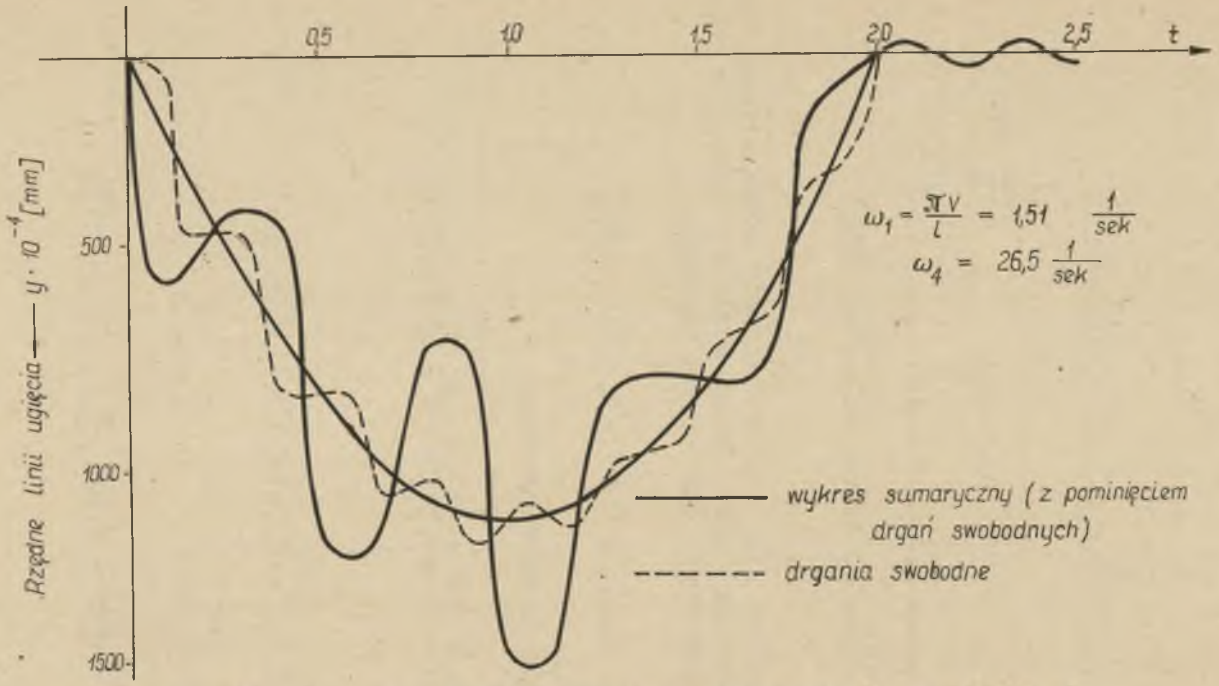
$$= 0,000379 \text{ m} = 0,379 \text{ mm}$$

$$\frac{Q}{P} = \frac{0,379}{1,143} = \frac{1}{3,1}$$

$$R = 10^{-4}\ (-1,95)^2 + (-0,54)^2 = 2,02 \cdot 10^{-4} = 0,202 \text{ mm}$$

$$S = 10^{-4}\ (0,164)^2 + (2,43)^2 = 5,93 \cdot 10^{-4} = 0,243 \text{ mm}$$

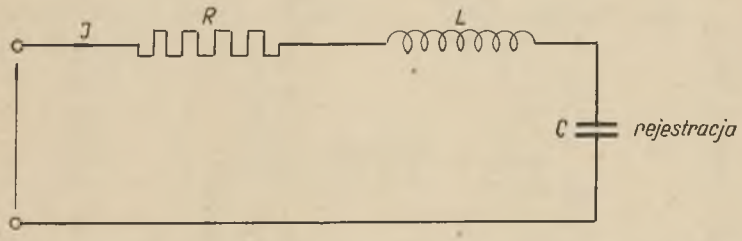
Wykres drgań środka belki przy uwzględnieniu faz przesunięcia φ_n przedstawia wykres (rys.36)
Dla mostu żelbetowego (wg tabeli nr 2 poz.10) przy zachowaniu tych samych parametrów sił wymuszających odpowiedni wykres sumarycznych wychyleń ma postać:



Rys.37. Drgania środka mostu żelbetowego (l = 20,02 m)

Wyznaczanie wykresu drgań belki przy pomocy elektrycznego układu analogowego

Bezpośrednie wyliczenie wychyleń belki jest uciążliwe i dlatego wykonano próbę określenia szukanych wielkości przy pomocy układu analogowego, w którym belka mostowa zastąpiopiona jest przez elektryczny układ szeregowy zawierający opór R, indukcyjność (L) i pojemność (C) (rys.38).



Rys.38. Układ szeregowy (RLC)

Analogia opiera się na podobieństwie równań różniczkowych układu elektrycznego RLC i belki mostowej (dla m_u = const). W postaci operatorowej dla układu RLC mamy:

$$E(p) = I(p)\left(R + pl + \frac{1}{pC}\right)$$

Spadek napięcia na kondensatorze

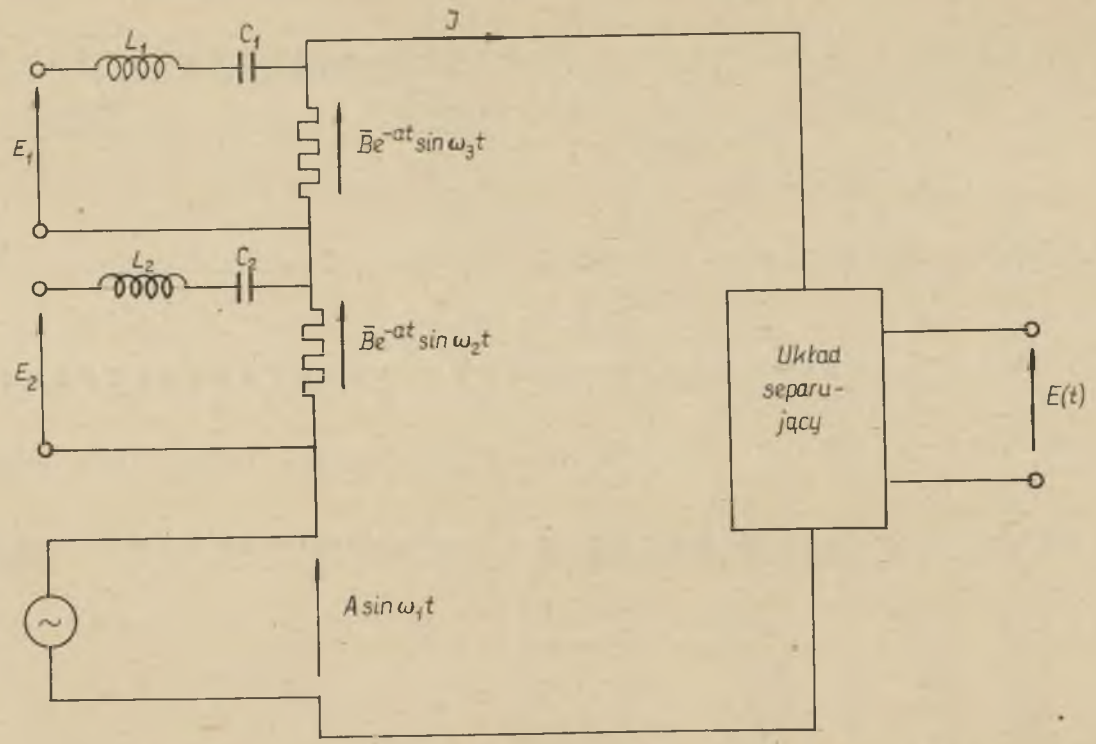
$$U_c(p) = J(p)\frac{1}{p.C} \text{ stąd } J(p) = pC\,U_c(p)$$

Wobec tego

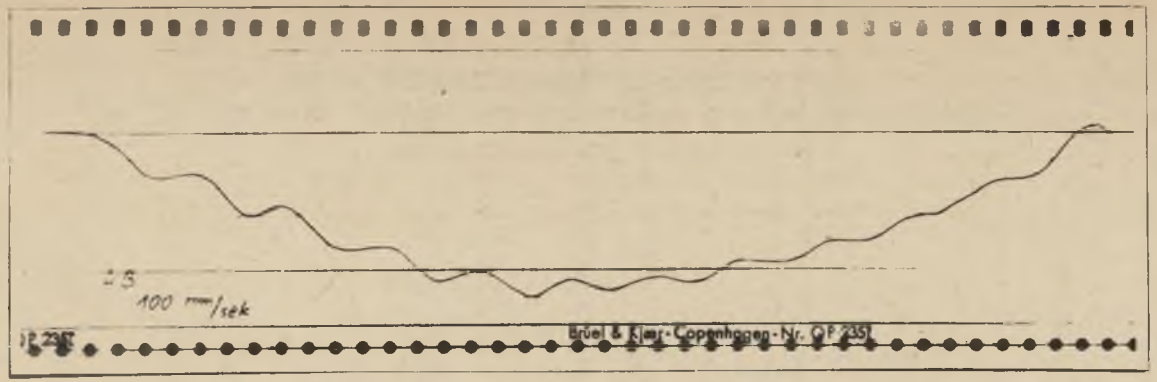
$$E(p) = U(p)\left(pRC + p^2 LC + 1\right)$$

a dla belki

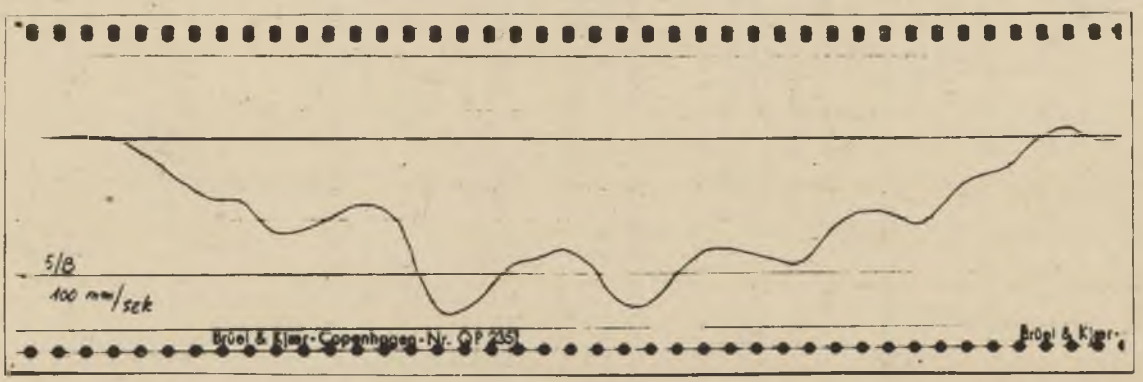
$$\frac{F(p)}{c} = Y(p)\left(\frac{m}{c}p^2 + \frac{k}{c}p + 1\right)$$



Rys.39. Schemat układu dla uzyskania elektrycznego odpowiednika prawej strony równania (3.7)



Rys.40a. Wykres ugięć belki pod działaniem siły $A \sin \omega_1 t$ uzyskany z układu analogowego



Rys.40b. Wykres sumarycznych wychyleń środka belki uzyskany za pośrednictwem układu analogowego

W równaniach tych występują następujące analogie:

$$E \sim \frac{F}{c}; \qquad LC \sim \frac{m}{c}; \qquad RC \sim \frac{k}{c}; \qquad U_c \sim Y$$

Siła elektromotoryczna E(t) modelująca prawą stronę równania (3.7) (dla $\varphi = 0$) uzyskiwana jest z układu przedstawionego na rys.39.
Spadek napięcia (U_c) na kondensatorze odpowiadający wychyleniu belki y jest rejestrowany na jednokanałowym aparacie Briel-kiaer.
Otrzymane wykresy dla mostu stalowego o danych wg poprzedniego przeliczenia przedstawione są niżej. Rys.40a ilustruje wychylenia belki pod działaniem siły $\Lambda \sin \omega_1 t$, a rys.40b wychylenia sumaryczne pod działaniem siły przedstawionej w prawej stronie równanie (3.7).
Powyższe wykresy co do swego charakteru są zgodne z wynikami obliczeń wykonanych poprzednio. Potwierdzają one w pełni możliwość wykorzystania analogii elektrycznych do rozwiązywania układów statycznych.

Rozbieżności, jakie wynikły w określeniu liczbowej wartości wychylenia są rezultatem pewnych uproszczeń przy budowie schematu analogowego i niedokładności jego elementów składowych.

Również maszyny cyfrowe mogą być z powodzeniem wykorzystane do rozwiązywania tego typu zagadnień.
Oprócz równań liniowych stwarzają one pewną możliwość rozwiązywania rachunkowego równań o współczynnikach funkcyjnych.

Cena zł 8,90