ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 81 Budownictwo z.9 1963

OSWALD MATEJA

Katedra Budowli Podziemnych

TWIERDZENIE KRONECKERA - CAPELLEGO JAKO DODATKOWE KRYTERIUM STATYCZNEJ STATECZNOŚCI

Streszczenie. W pracy zwrócono uwagę na konieczność przestrzegania przy obliczaniu obciążeń krytycznych, w przypadku gdy stan krytyczny opisują liniowe, niejednorodne równania różniczkowe, algebraicznego twierdzenia KRONECKERA - CAPELLEGO.

W przytoczonych przykładach obliczono obciążenie krytyczne prostych, liniowo sprężystych prętów o stałej sztywności, przegubowo i przegubowo przesuwnie podpartych na końcach, obciążonych siłą podłużną, przyłożoną do końców prętów na mimośrodkach e oraz na mimośrodach $\pm e$.

W przypadku, gdy stan krytyczny układu opisują liniowe, niejednorodne równania różniczkowe prowadzące do algebraicznego układu równań

$$c_j\, y_{ij} = b_i \begin{pmatrix} i = 1,2,\ldots, n \\ j = 1,2,\ldots, n \end{pmatrix}, \tag{1}$$

obciążenie krytyczne uzyskuje się z warunku znikania wyznacznika podstawowego tego układu, czyli

$$\det\left|y_{ij}\right| = 0. \tag{2}$$

Układ równań (1) nie będzie układem sprzecznym, zgodnie z algebraicznym twierdzeniem KORENECKERA - CAPELLEGO (por. np.: [1], str.155), wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość rzędu macierz:

$$\text{rząd}\left[y_{ij}\right] = \text{rząd}\left[y_{ij},\ b_i\right]. \tag{3}$$

Warunek (2) oznacza, że

$$\text{rząd}\left[y_{ij}\right] = n - 1,$$

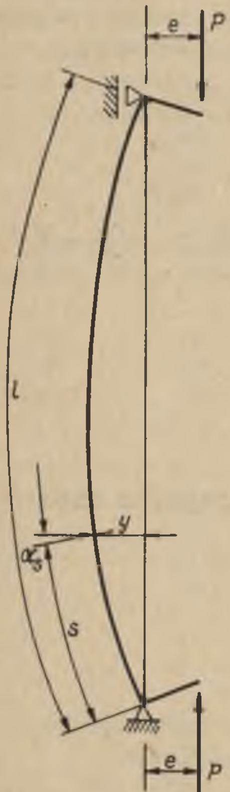
a zatem w stanie krytycznym układu również

$$\text{rząd}\left[y_{ij}, b_i\right] = n - 1. \qquad (4)$$

Wzór (4) przedstawia dodatkowy warunek, który musi być spełniony przy obliczaniu obciążeń krytycznych; innymi słowy: ze zbioru parametrów uzyskanych z warunku (2) te i tylko te mogą opisywać stan krytyczny układu, które zapewniają jednoczesne spełnienie warunku (4).

Dla ilustracji stosowania warunku (4) rozwiążemy dwa proste przykłady.

Przykład 1



Rys.1

Dany jest prosty, liniowo sprężysty pręt o stałej sztywności EJ, przegubowo i przegubowo przesuwnie podparty na końcach, obciążony siłą ściskającą P, przyłożoną do końców pręta na mimośrodach e (rys.1). Obliczymy obciążenie krytyczne tego pręta.

Stateczność tak obciążonego pręta rozważana jest w kilku pracach, np. w: [2], [3]. Wyniki podane w tych pracach są jednak obarczone błędami, wynikłymi z nieprzestrzegania twierdzenia KRONECKERA - CAPELLEGO.

Przy dostatecznie małych mimośrodach e , równanie różniczkowe odkształconej osi pręta ma postać:

$$EJ\,\frac{d^2y}{ds^2} + Py = -Pe \qquad (5)$$

Całką ogólną tego równania jest funkcja:

$$y = C_1 \sin\alpha l + C_2 \cos\alpha s - e, \qquad (6)$$

gdzie

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{EJ}}.$$

Warunki brzegowe pręta:

$$y(0) = y(l) = 0 \tag{7}$$

prowadzą do następującego układu algebraicznych równań liniowych:

$$\left.\begin{aligned} C_2 &= e, \\ C_1 \sin\alpha l + C_2 \cos\alpha l &= e. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Z warunku znikania wyznacznika podstawowego układu równań (8) otrzymamy

$$\sin\alpha l = 0,$$

co zachodzi przy

$$\alpha l = n\pi. \tag{9}$$

Zgodnie z warunkiem (4) macierz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & e \\ \sin\alpha l & \cos\alpha l & e \end{bmatrix},$$

musi być w rozważanym przypadku rzędu pierwszego, a więc musi również znikać wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & e \\ \cos\alpha l & e \end{vmatrix},$$

co zachodzi przy

$$\cos\alpha l = 1.$$

Czyli

$$\alpha l = n2\pi. \tag{10}$$

Warunek (10) zapewnia jednoczesne spełnienie związku (9), zatem

$$P_k = \frac{(2n)^2 \pi^2 EJ}{l^2}. \tag{11}$$

Przy $n=1$ otrzymamy więc

$$P_{k1} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}. \tag{12}$$

Do warunku (10) dla rozważanego pręta, można również dojść na innej drodze. Z układu równań (8) można otrzymać

$$C_1 \sin\alpha l + e(\cos\alpha l - 1) = 0, \tag{13}$$

a po dalszych przekształceniach

$$\sin\frac{\alpha l}{2}\left(C_1 \cos\frac{\alpha l}{2} - e \sin\frac{\alpha l}{2}\right) = 0 \tag{14}$$

Równanie (14) będzie spełnione, jeśli

$$\sin\frac{\alpha l}{2} = 0,$$

co zachodzi przy

$$\alpha l = n\, 2\pi.$$

Otrzymaliśmy więc również warunek (10).

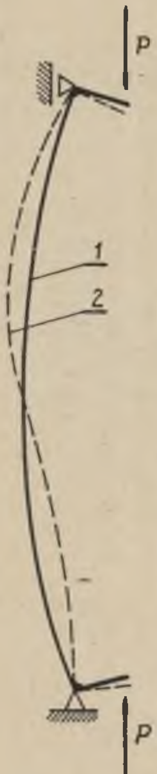
Na rysunku 2 pokazano wyboczoną postać rozważanego pręta, przy P_{k1}.

Wskażemy teraz na błąd w rozumowaniu przytoczonym np. w pracy [2], w której otrzymano dla rozważanego pręta

$$P_{k1} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Z układu równań (8) można wyliczyć

$$C_1 = \frac{e(1 - \cos\alpha l)}{\sin\alpha l} = e\,\frac{\sin\frac{\alpha l}{2}}{\cos\frac{\alpha l}{2}}. \tag{15}$$



Rys.2
1-pręt przed wyboczeniem; 2-pręt wyboczony

Ponieważ przy

$$\alpha l = \pi$$

wyrażenie (15) traci sens, w pracy [2] podano jakoby wtedy miał miejsce stan krytyczny pręta. Wniosek taki jest błędny; w stanie krytycznym układu istnieje bowiem, przy ustalonym C_2, nieskończenie wiele wartości C_1, przy czym wartości te posiadają sens, są one liczbami.

Dla prześledzenia zachowania się rozpatrywanego pręta, w przypadku gdy mimośrody przyłożenia siły są małe w porównaniu z jego długością rozwiążemy nieliniowe równanie różniczkowe odkształconej osi pręta, posługując się metodą GALERKINA.

Dokładne równanie różniczkowe odkształconej osi pręta ma postać:

$$EJ\,\frac{1}{\varrho} + Py + Pe = 0 \tag{16}$$

Uwzględniając, że (por. rys.1)

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\alpha_s}{ds}, \quad \alpha_s = \arcsin\frac{dy}{ds}$$

otrzymamy

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2y}{ds^2}\left[1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \approx y''\left[1 + \frac{1}{2}(y')^2\right].$$

Przyjmując funkcję

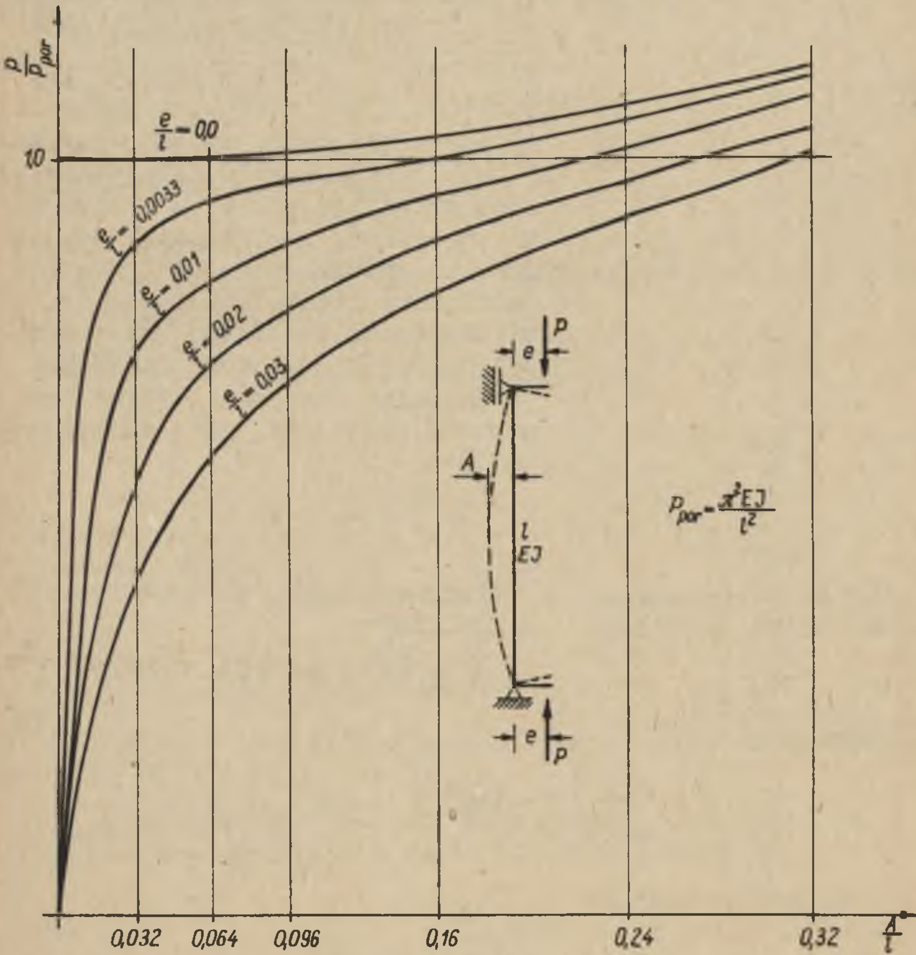
$$y_o = A\sin\frac{\pi x}{l},$$

wyrażającą przybliżoną postać odkształconej osi pręta, to z warunku:

$$\int_0^l \left\{ EJy_o'' \left[1 + \frac{1}{2}(y_o')^2\right] + Py_o + Pe \right\} \sin\frac{\pi x}{l}\,dx = 0,$$

po dokonaniu nakazanych działań otrzymamy

$$P = \frac{EJ\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{1}{2} A + EJ\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{1}{16} A^3}{\frac{Al}{2} + \frac{2el}{\pi}} \tag{17}$$

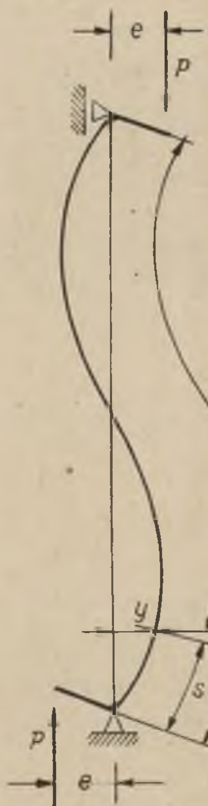


Rys.3

Na rysunku 3 pokazano, sporządzone dla ustalonych wartości $\frac{e}{l}$ w oparciu o wzór (17), wykresy funkcji $P(\frac{A}{l})$. Z wykresów tych widać, że przy małych wartościach $\frac{e}{l}$, ze wzrostem $\frac{A}{l}$ siła P wzrasta począwszy od pewnej wartości łagodnie.

Przykład 2

Dany jest prosty, liniowo sprężysty pręt o stałej sztywności EJ, przegubowo i przegubowo przesuwnie podparty na końcach, obciążony siłą ściskającą P, przyłożoną do końców pręta na mimośrodach $\pm$ e (rys.4) Obliczymy obciążenie krytyczne tego pręta.



Rys.4

Stateczność tak obciążonego pręta rozważana jest w kilku pracach (por. np.: [3]). Otrzymane tam wyniki są jednak obarczone błędami.

Równanie różniczkowe odkształconej osi pręta, przy dostatecznie małych wartościach $|e|$, ma postać:

$$EJ\frac{d^2y}{ds^2} + Py = -Pe + \frac{2Pe}{l}s. \quad (18)$$

Całką ogólną tego równania jest funkcja:

$$y = D_1 \sin\alpha s + D_2 \cos\alpha s - e + \frac{2e}{l}s, \quad (19)$$

gdzie

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{EJ}}.$$

Warunki brzegowe pręta:

$$y(0) = y(l) = 0$$

prowadzą do następującego układu algebraicznych równań liniowych:

$$\left.\begin{aligned} D_2 &= e, \\ D_1 \sin\alpha l + D_2 \cos\alpha l &= -e. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Z warunku znikania wyznacznika podstawowego układu równań (20) otrzymamy

$$\sin\alpha l = 0,$$

co zachodzi przy

$$\alpha l = n\pi. \tag{21}$$

Zgodnie z warunkiem (4) macierz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & e \\ \sin\alpha l & \cos\alpha l & -e \end{bmatrix}$$

musi być w rozważanym przypadku rzędu pierwszego, a więc musi również znikać wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & e \\ \cos\alpha l & -e \end{vmatrix}$$

co zachodzi przy

$$\cos\alpha l = -1.$$

Czyli

$$\alpha l = (2n-1)\pi. \tag{22}$$

Warunek (22) zapewnia jednoczesne spełnienie związku (21), zatem

$$P_k = \frac{(2n-1)^2\pi^2 EJ}{l^2}. \tag{23}$$

Przy $n = 1$ otrzymamy więc $P_{k1} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$.

Rys.5
1-pręt przed wyboczeniem; 2-pręt wyboczony

Na rysunku 5 pokazano wyboczoną postać rozważanego pręta, przy P_{k1}.

LITERATURA

[1] Mostowski A., M.Stark: Algebra wyższa, tom I, Warszawa 1953.

[2] Kollbrunner C.F., M.Meister: Knicken, Bigedrillknicken, Kippen, Berlin - Göttingen - Heidelberk 1961.

[3] Bürgermeister G., H.Steup: Stabilitätstheorie, Berlin 1959.

ТЕОРЕМА КРОНЕЦКЕРА - КОПЕЛЛИЕГО КАК ДОБАВОЧИНЫЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Содержание

В работе оброщено внимание на необходимость соблюдения при вычислении критической нагрузки статической устойчивости при условии, когда критическое состояние описывают линейные неоднородные дифференционольные уравнения алгебраической теоремы Кронецкера-Кареллиего.

Приведено два численные примера.

KRONECKER-CAPELLI - THEOREM ALS ZUSÄTZLICHES KRITERIUM DER STATISCHEN STABILITÄT

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde auf die Notwendigkeit hingewiesen bei Berechnung der kritischen Belastang das algebraische Kronecker Capelli Theorem zu berücksichtigen, im Falle wen den kritischen Zustand lineare inhomogene. Differentialgleichungen beschreiben.

Angeführt wurden zwei Zahlenbeispiele.