ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 113 Budownictwo z. 12 1964

WOJCIECH SITKO

O PEWNYM SPOSOBIE PRZYSPIESZANIA ZBIEŻNOŚCI CIAGÓW ITERACYJNYCH

Streszczenie. W pracy omówiono prosty sposób przyspieszenia zbieżności iteracji, wykorzystujący własności szeregów geometrycznych. Korzyści zaproponowanego sposobu zobrazowano przykładem liczbowym.

Wstęp

Spośród stosowanych sposobów rozwiązywania układów równań liniowych warto wymienić metody iteracyjne, pozwalające uzyskać rozwiązanie w postaci granicy ciągu pewnych wektorów, budowanych przy pomocy postępowania zwanego iteracją [1](np. metoda iteracji prostej, metoda SEIDELA, metoda relaksacji itp.)

We wszystkich przytoczonych metodach bardzo ważnym zagadnieniem jest uzyskanie szybkiej zbieżności procesu iteracyjnego, iteracja "wolnozbieżna" wymaga dużego nakładu pracy, który stawia pod znakiem zapytania celowość jej stosowania.

Zagadnieniami iteracji zajmował się m.in. L.A. LUSTERNIK[5], który podał metodę przyśpieszania zbieżności przy rozwiązywaniu układu równań liniowych (X = AX + B), wykorzystującą wartości własne macierzy A.

W niniejszej pracy podany jest sposób przyspieszania zbieżności ciągów iteracyjnych, wykorzystujący własności szeregów geometrycznych, przy rozwiązywaniu układów równań liniowych (AX = B), dla których macierz współczynników A jest s y m e t r y c z n a i d o d a t n i o o k r e ś l o n a (tzw. układy liniowe n o r m a l n e [2]).

Za podstawę opracowania przyjęto sposób iteracji podany w [6], a stanowiący pewną odmianę metody relaksacyjnej.

1. Charakterystyka stosowanego sposobu iteracji

Załóżmy, że dany jest n o r m a l n y układ liniowy[x)]

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \quad (i = 1,2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Przyjmując jako pierwsze przybliżenie rozwiązania $X^{(o)}=(x_1^{(o)}$ $x_2^{(o)}, \ldots, x_n^{(o)})$ układ równań 1.1 przeważnie nie będzie spełniony: po podstawieniu $X^{(o)}$ otrzymamy pewne "różnice (wg [2], [4]):

$$R_1^{(o)} = -b_1 + a_{11} \cdot x_1^{(o)} + \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j^{(o)}$$

$$R_2^{(o)} = -b_2 + a_{22} \cdot x_2^{(o)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{n} a_{2j} x_j^{(o)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R_n^{(o)} = -b_n + a_{nn} \cdot x_n^{(o)} + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} x_j^{(o)}$$

Dla $X^{(o)} = 0$:

$$R_i^{(o)} = -b_i \qquad (i = 1,2, \ldots, n) \tag{1.2}$$

Jeżeli zwiększymy j e d n ą z niewiadomych np. x_k o δx_k, (pozostałe równe zeru) to różnica $R_k^{(o)}$ zwiększy się o

$$R_k = a_{kk} \cdot \delta x_k \tag{1.3}$$

x) Przy powyższych założeniach "metoda relaksacji jest zbieżna bez względu na to, jak źle został obrany punkt wyjściowy" (tw. TEMPLE'A, SEIDELA patrz [3] str. 572, [1] str. 116), kładąc: $R_k = R_k^{(o)} = b_k$ otrzymamy kolejną różnicę (drugą)

(1.4) $$R_k^{(1)} = 0$$

Przyrost x_k obliczymy z (1.3)

(1.5) $$\delta x_k = \frac{R_k^{(o)}}{a_{kk}} = \frac{b_k}{a_{kk}}$$

Pozostałe różnice zwiększą się o:

(1.6) $$\Delta R_i = a_{ik} \cdot \delta x_k = - \alpha_{ik} \cdot b_k \quad (i=1,2 \ldots, n)$$

gdzie $$\alpha_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$

(1.7) $$R_i^{(1)} = - b_i + \alpha_{ik}\, b_k \quad \text{itd.}$$

Dla uproszczenia obliczeń korzystniej jest przystosować układ do iteracji, zgodnie z (1.6), dzieląc każdą z kolumn macierzy współczynników $\left[a_{ij}\right]$, przez element główny danej kolumny a_{jj}:

(1.8) $$\left[\alpha_{ij}\right] = \left[\frac{a_{ij}}{a_{jj}}\right]$$

Wspomniany proces iteracyjny notujemy w tablicy, której nagłówek stanowi macierz $\left[\alpha_{ij}\right]$.

1,0	α_{12}	...	α_{1i}	...	α_{1j}	...	α_{1n}
α_{21}	1,0		α_{2i}		α_{2j}		α_{2n}
$\vdots$	–						$\vdots$
α_{i1}	α_{i2}		1,0		α_{ij}		α_{in}
$\vdots$							$\vdots$
α_{j1}	α_{j2}		α_{ji}		1,0		α_{jn}
$\vdots$							$\vdots$
α_{n1}	α_{n2}		α_{ni}		α_{nj}		1,0
$-b_1$	$-b_2$		$-b_i$		$-b_j$		$-b_n$
$+b_1$	$\alpha_{21}\ b_1$		$\alpha_{i1}\ b_1$		$\alpha_{j1}\ n_1$		$\alpha_m\ b_1$
				...	$b_j - \alpha_{j1} b_1$	...	itd. itd.

Obliczone wartości ΔR_i wpisujemy do odpowiednich kolumn, a następnie obliczamy wartości będące "zrównoważeniem" różnicy $R_i^{(\ )}$ dla kolejnego x_j, które podkreślamy. Proces iteracyjny prowadzimy aż do momentu uzyskania (z żądaną dokładnością) $R_i^{(n)} = 0$. Suma wyrazów podkreślonych w każdej kolumnie, dzielona przez występujący w niej element główny a_{jj} jest poszukiwaną przybliżoną wartością x_j.

2. Proponowany sposób przyśpieszania zbieżności

Proces iteracyjny jest zazwyczaj szybkozbieżny, jeżeli współczynniki macierzy $[\alpha_{ij}]$ leżące poza przekątną główną są co do modułu wyraźnie mniejsze od α_{ii} (tj. od jedności), jeżeli moduły $|\alpha_{ij}| \geqslant 1$ (lub bliskie jedności), iteracja może stać się wolnozbieżną.

Załóżmy, że jeden ze współczynników, np. $|\alpha_{ij}| > 1$. Dla uwypuklenia prawidłowości w budowie ciągów iteracyjnych, przeprowadźmy kilka kolejnych kroków iteracji, tylko dla kolumn i oraz j.

TABLICA I

$\alpha_{ii} = 1{,}0$	$\boxed{\alpha_{ij}}$
$\boxed{\alpha_{ji}}$	$\alpha_{jj} = 1{,}0$
$-b_i$	$-b_j$
$\underline{+b_i}$	$\alpha_{ji} \cdot b_i$
$\vdots$	$\underline{b_j - \alpha_{ji} \cdot b_i}$
$\vdots$	
$-m_i$	
$\underline{(+m_i)}$	$\alpha_{ji} \cdot m_i$
$-\alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji} \cdot m_i$	$\underline{(-\alpha_{ji} \cdot m_i)}$
$\underline{+\alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji} \cdot m_i}$	$+\alpha_{ji} \cdot \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji} \cdot m_i$
$-\alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji} \cdot \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji} \cdot m_i$	$\underline{-\alpha_{ji} \cdot \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji} \cdot m_i}$
$\underline{+\alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji} \cdot \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji} \cdot m_i}$	$+\alpha_{ji} \cdot \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji} \cdot \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji} \cdot m_i$
$-\alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji} \cdot \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji} \cdot \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji} \cdot m_i$	$\underline{-\alpha_{ji} \cdot \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji} \cdot \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji} \cdot m_i}$

"p" - ty wyraz ciągu iteracyjnego przyjmie postać:

(2.1) $\bar{m}_i = (\alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji})^p \cdot m_i$; $\bar{m}_j = -\alpha_{ji}(\alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji})^p \cdot m_i$

Sumując podkreślone wyrazy w kolumnach i,j (od + m_i w kolumnie i oraz - $\alpha_{ij} m_i$ w kolumnie j) otrzymamy:

(2.2) $$S_i = + \sum_{p=0}^{\infty} (\alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji})^p m_i;$$

$$S_j = - \sum_{p=0}^{\infty} (\alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji})^p \cdot \alpha_{ji} \cdot m_i$$

Relacja 2.2 przedstawia sumę szeregu geometrycznego, jeżeli wartość bezwzględna wykładnika ($q = \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji}$):

(2.3) $$-1 < \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji} < +1,$$

szereg jest zbieżny, a wartość jego sumy dąży do określonej granicy:

(2.4) $$\underset{p \to \infty}{S_i \to} m_i \cdot \frac{1}{1 - \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji}}, \quad \underset{p \to \infty}{S_j \to} -m_i \, \alpha_{ji} \cdot \frac{1}{1 - \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji}}$$

Oznaczając:

(2.5) $$\mu = \frac{1}{1 - \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji}},$$

otrzymamy:

(2.6) $$S_i = \mu \cdot m_i, \quad S_j = -\mu \cdot \alpha_{ji} \cdot m_i$$

W tablicy I wyraz, od którego rozpoczął się proces przyspieszenia zbieżności ujęto w nawias. Po obliczeniu wartości S_i oraz S_j, wpisujemy je do odpowiednich kolumn iteracyjnych (podkreślając), a następnie określamy pozostałe wartości R_i wg. (1.7).

Proponowany sposób przyśpieszania zbieżności można stosować już od pierwszego kroku iteracji, przy czym operacji tej można dokonywać wielokrotnie, w dowolnych kolumnach (przykład), najkorzystniej jednak w tych, w których występują współczynniki α_{ij} co do modułu bliskie lub większe od jedności.

Kolejność w jakiej prowadzimy relaksację w poszczególnych równaniach ustalamy bieżąco kierując się zarówno wielkością modułów $|\alpha_{ij}|$, jak i wielkością R_i w danym równaniu.

Uzyskujemy jak pokazują przykłady praktyczne często znaczne (nawet dwukrotne) przyspieszenie zbieżności.

Ściślejsze sprecyzowanie postępowania (kolejność rozpatrywanych kolumn) oraz zakres stosowalności, są to zagadnienia do dalszych badań teoretycznych.

3. Przykład liczbowy

Dla zilustrowania sposobu oraz porównania podano przykład (3.1) rozwiązania układu równań liniowych (normalnego) metodą iteracji (wg pkt. 1), w dwóch wersjach:

1) iteracja bez przyspieszania zbieżności (tabl. II)
2) iteracja z kilkakrotnym przyspieszeniem zbieżności (tabl. III).

$$\sum_{j=1}^{6} a_{ij}\, x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 6) \tag{3.1}$$

$$\begin{bmatrix} 819{,}1927 & -285{,}6389 & -47{,}6230 & 2{,}5572 & -26{,}3269 & 17{,}2402 \\ \cdot & 1430{,}7980 & -12{,}5140 & 5{,}6783 & -1{,}3667 & -86{,}8140 \\ \cdot & \cdot & 2106{,}6447 & -10{,}6496 & 232{,}6078 & 1{,}8391 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 25{,}0216 & 5{,}3232 & 1{,}5131 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 38{,}6803 & 0{,}8545 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 21{,}8169 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3524{,}0 \\ 3316{,}0 \\ 92{,}0 \\ -200{,}0 \\ -12{,}0 \\ 957{,}0 \end{bmatrix}$$

Nagłówek tablic iteracyjnych II i III stanowi przekształcona wg 1.8 macierz współczynników $[a_{ij}]$.

Obliczenia przeprowadzono na maszynie "Rheinmethall".

Zestawienie wyników:

$$x_1 = -3{,}8455; \quad x_2 = 5{,}9356; \quad x_3 = 0{,}4590; \quad x_4 = -11{,}9561$$

$$x_5 = -5{,}3435; \quad x_6 = 71{,}5253$$

LITERATURA

1 FADDIEJEWA W.N.: Metody numeryczne algebry liniowej, PWN, Warszawa 1955 (tłum. z jęz. ros.).

2 ДЕМИДОВИЧ Б.П. и МАРОН И.А.: Основы вычислительной математики, Гос. Изд. Физ. Мат. Лит., Москва 1963.

3 BECKENBACH E.F. (pod red.), Nowoczesna matematyka dla inżynierów PWN, Warszawa 1962 (tłum. z jęz. ang.).

4 SALVADORI M.G.: Numerical Methods in Engineering, New.York 1952 (tłumaczenie rosyjskie, Moskwa 1955).

5 ЛЮСТЕРНИК Л.А.: Труды Мат. Инст. им. В.А.Стеклова, т. XX, 1947.

6. WOŹNIAK Cz.: Statyka rozgałęzionych przestrzennych rurociągów samokompensacyjnych, Rozprawy Inżynierskie 1,11.(1963)

О НЕКОТОРОМ СПОСОБЕ УСКОРЕНИЯ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Содержания

В статье представлено простой способ ускорения сходимости итерации, использующий свойства геометрических рядов.

THE SIMPLE METHOD OF SPEEDING THE CONVERGENCE OF THE ITERATIVE SERIES

Summary

Using the properties of the geometrical series the simple method of speeding the convergence of the iterative process has been given.

Iteracja bez przyspieszania zbieżności

+1,0	-0,1996	-0,0226	0,1022	-0,6806	0,7902
-0,3487	+1,0	-0,0059	0,2269	-0,0353	-3,9792
-0,0581	-0,0087	+1,0	-0,4256	6,0136	0,0843
0,0031	0,0040	-0,0051	+1,0	0,1376	0,0694
-0,0314	-0,0010	0,1104	0,2127	+1,0	0,0392
0,0210	-0,0607	0,0009	0,0605	0,0221	+1,0
+3524	-3316	-92	+200	+12	-957
-3524	+1228,82	+204,74	-10,92	+110,65	-74,00
-416,60	+2087.18	-18,16	+8,35	-2,09	-126,69
+914,80	-4606,68	+97,59	+80,34	+45,38	+1157,69
-919,49	+4606,68	-40,08	+18,42	-4,61	-279,63
+421,29	-146,90	-24,48	+1,31	-13,23	+8,85
+7,88	+0,75	-127,61	+0,65	-14,09	-0,11
-30,47	-67,65	+126,89	-298,15	-63,42	-18,04
+228,31	-1149,71	+24,36	+20,05	+11,33	+288,93
-272,16	+1363,51	-11,86	+5,45	-1,36	-82,77
+3,15	+0,82	-139,39	+0,71	-15,39	-0,13
+44,35	+2,30	-391,91	-8,97	-65,17	-1,44
+66,63	-335,61	-7,11	+5,85	+3,31	+84,34
-42,71	+14,89	+2,48	-0,13	+1,34	-0,90
-8,64	-2,26	+382,32	-1,95	+42,21	+0,34
-63,84	+319,86	-2,78	+1,28	-0,32	-19,42
+31,68	+1,64	-279,87	-6,40	-46,54	-1,03
-1,62	-3,61	+6,76	-15,89	-3,39	-0,96
+42,42	-14,79	-2,46	+0,13	-1,33	+0,89
-6,29	-1,64	+278,35	-1,42	+30,73	+0,25
+16,46	-82,89	+1,76	+1,45	+0,82	+20,83
-20,22	-101,29	- 0,88	+0,40	-0,10	-6,15
+18,20	+0,94	-160,80	-3,68	-26,74	-0,59
+0,32	+0,71	-1,33	+3,12	+0,66	+0,19
-3,64	-0,95	+161,25	-0,82	+17,80	+0,15
+12,56	+0,65	-111,01	-2,54	-18,46	-0,41
-2,51	-0,65	+111,01	-0,57	+12,26	+0,10
-14,08	+5,19	+0,86	-0,05	+0,47	-0,31
+8,66	+0,45	-76,55	-1,75	-12,73	-0,28
-1,71	-0,45	+75,69	-0,33	+8,36	+0,07
+5,71	-28,77	+0,61	+0,50	+0,28	+7,23
-4,57	+22,88	-0,20	+0,09	-0,02	-1,39
+5,87	+0,30	-51,84	-1,19	-8,62	-0,19
-1,16	-0,30	+51,43	-0,26	+5,68	+0,05
-12,80	+4,46	+0,74	-0,04	+0,40	-0,27
+0,72	+1,59	-2,99	+7,02	+1,49	+0,42
+5,15	+0,27	-45,52	-1,04	-7,37	-0,17
-1,08	-0,28	+47,77	-0,24	+5,27	+0,04
+3,59	+0,19	-31,69	-0,73	-5,27	-0,12
-0,72	-0,19	+31,69	-0,16	+3,50	+0,03
+2,38	+0,12	-21,05	-0,48	-3,50	-0,08
-0,48	-0,12	+21,05	-0,11	+2,32	+0,02
+1,58	+0,08	-13,95	-0,32	-2,32	-0,05
-0,32	-0,08	+13,95	-0,07	+1,54	+0,01
+1,05	+0,05	-9,26	-0,21	-1,54	-0,03
-0,21	-0,05	+9,26	-0,05	+1,02	+0,01
+0,69	+0,04	-6,13	-0,14	-1,02	-0,02
+1,37	-6,92	+0,15	+0,12	+0,07	+1,74

-0,17	+0,84	-0,01	0	0	-0,05
-13,55	+4,72	+0,79	-0,04	+0,43	-0,28
+0,35	+0,79	-1,48	+3,47	+0,74	+0,21
-0,15	-0,04	+6,68	-0,03	+0,74	+0,01
+1,35	+0,07	-11,91	-0,27	-1,98	-0,04
-0,27	-0,07	+11,91	-0,06	+1,31	+0,01
+0,89	+0,05	-7,88	-0,18	-1,31	-0,03
-0,18	-0,05	+7,88	-0,04	+0,87	+0,01
+0,59	+0,03	-5,23	-0,12	-0,87	-0,02
-0,12	-0,03	+5,23	-0,03	+0,58	0
+0,39	+0,02	-3,49	-0,08	-0,58	-0,01
-0,08	-0,02	+3,49	-0,02	+0,39	0
+0,15	-0,76	+0,02	+0,01	+0,01	+0,19
+0,94	-4,71	+0,04	-0,02	0	+0,29
-3,86	+1,34	+0,22	-0,01	+0,12	-0,08
+0,35	+0,02	-3,13	-0,07	-0,52	-0,01
-0,06	-0,02	+2,85	-0,01	+0,31	0
+0,21	+0,01	-1,86	-0,04	-0,31	-0,01
-0,04	-0,01	+1,86	-0,01	+0,21	0
+0,14	+0,01	-1,26	-0,03	-0,21	0
-0,03	-0,01	+1,26	-0,01	+0,14	0
+0,27	-1,34	+0,01	-0,01	0	+0,08
+0,11	+0,23	-0,44	+1,03	+0,22	+0,06
+0,25	+0,01	-2,16	-0,05	-0,36	-0,01
-0,06	-0,02	+2,59	-0,01	+0,29	0
+0,20	+0,01	-1,74	-0,04	-0,29	-0,01
-0,04	-0,01	+1,74	-0,01	+0,19	0
+0,13	+0,01	-1,14	-0,03	-0,19	0
-0,03	-0,01	+1,14	-0,01	+0,13	0
+0,09	0	-0,78	-0,02	-0,13	0
-0,24	+1,23	-0,02	-0,02	-0,01	-0,31
-1,25	+0,44	+0,07	0	+0,04	-0,03
+0,38	-1,89	+0,02	-0,01	0	+0,11
-0,02	0	+0,71	0	+0,08	0
+0,07	0	-0,66	-0,01	-0,11	0
+0,02	+0,05	-0,09	+0,21	+0,04	+0,01
-0,45	+0,16	+0,03	0	+0,01	-0,01
-0,02	0	+0,72	0	+0,08	0
+0,09	0	-0,78	-0,02	-0,13	0
-0,02	0	+0,78	0	+0,09	0
+0,06	0	-0,54	-0,01	-0,09	0
-0,01	0	+0,54	0	+0,06	0
+0,04	0	-0,36	0	-0,06	0
-0,01	0	+0,36	0	+0,04	0
+0,03	0	-0,24	0	-0,04	0
0	0	+0,24	0	+0,03	0
+0,02	0	-0,18	0	-0,03	0
0	0	+0,18	0	+0,02	0
+0,01	0	-0,12	0	-0,02	0
0	0	+0,12	0	+0,01	0
0	0	-0,06	0	-0,01	0
-0,19	+0,07	+0,01	0	+0,01	0
+0,05	-0,28	0	0	0	+0,02
-0,08	+0,40	0	0	0	-0,10
+0,08	-0,40	0	0	0	+0,02
-0,05		-0,05	+0,03	-0,01	-0,02
-3150,03	+8492,62	+967,10	-299,16	-206,73	+1560,52
-3,8455	+5,9356	+0,4590	-11,9561	-5,3435	+71,5253

Iteracja z przyspieszaniem zbieżności

+1,0	-0,1996	-0,0226	0,1022	-0,6806	0,7902	
-0,3487	+1,0	-0,0059	0,2269	-0,0353	-3,9792	
-0,0581	-0,0087	+1,0	-0,4256	6,0136	0,0843	
0,0031	0,0040	-0,0051	+1,0	0,1376	0,0694	
-0,0314	-0,0010	0,1104	0,2127	+1,0	0,0392	
0,0210	-0,0607	0,0009	0,0605	0,0221	+1,0	
+3524	-3316	-92	+200	+12	-957	
-3524,0	+1228,82	+204,74	-10,92	+110,65	-74,0	
-416,60	+2087,18	-18,16	+8,35	-2,09	-126,69	
+914,80	-4606,68	+97,59	+80,34	+45,38	+1157,69	
	(+4606,68)				-279,63	$\mu_{2-6} = \frac{1}{1-(-0,0607)(-3,9792)} =$
-1212,17	+6072,98	-52,83	+24,29	-6,07	(+279,63)	$= \underline{1,3183}$
+291,30		+31,08	+25,58	+14,45	+368,64	
+422,67	-147,38	-24,56	+1,31	-13,27	+8,88	
-33,62	-74,64	+140,00	-328,95	-69,97	-19,90	
+6,46	+ 1,69	-285,86	+1,46	-31,56	-0,26	
+40,51	+2,10	-357,93	-8,19	-59,52	-1,31	
		(+357,93)		+39,52		$\mu_{3-5} = \frac{1}{1-0,1104 \cdot 6,0136} =$
-24,07	-6,28	+1064,95	-5,43	(-39,52)	+0,96	$= \underline{2,9753}$
+80,02	+4,15		-16,18	-117,58	-2,60	
+2,90	+6,43	-12,06	+28,34	+6,03	+1,71	
-72,20	+25,18	+4,19	-0,22	+2,27	+1,52	
-37,67	+188,75	-1,64	+0,75	-0,19	-11,46	
+20,15	-101,47	+2,15	+1,77	+1,00	+25,50	
	(+101,47)				-6,16	
-26,70	+133,77	-1,16	+0,53	-0,13	(+6,16)	μ_{2-6}
+6,42		+0,68	+0,56	+0,32	+8,12	
+37,80	-13,18	-2,20	+0,12	-1,19	+0,79	
+5,52	+0,29	-48,77	-1,11	-8,11	-0,18	
-1,33	-0,35	+58,81	-0,30	+6,49	+0,05	
		-39,02		(-6,49)		
+13,14	+0,68	(+39,02)	-2,66	-19,30	-0,43	μ_{3-5}
-2,62	-0,68	+116,10	-0,59		+0,10	
+0,12	+0,26	-0,49	+1,15	+0,24	+0,07	
-14,83	+5,17	+0,86	-0,05	+0,47	-0,31	
-1,56	+7,81	-0,07	+0,03	-0,01	-0,47	
+0,30	-1,51	+0,03	+0,03	+0,01	+0,38	
	(+1,51)				-0,09	
-0,40	+1,99	-0,02	+0,01		(+0,09)	μ_{2-6}
+0,09					+0,12	
+1,57	-0,55	-0,09	+0,01	-0,05	+0,03	
+0,45	+0,02	-3,97	-0,09	-0,66	-0,01	
-0,08	-0,02	+3,75	-0,01	+0,41		
		-2,47		(-0,41)		
+0,83	+0,04	(+2,47)	-0,17	-1,22	-0,02	μ_{3-5}
-0,17	-0,04	+7,35	-0,04			
-1,03	+0,36	+0,05		+0,03	-0,02	
+0,02	+0,04	-0,12	+0,28	+0,06	+0,01	
-0,03	+0,15					
+0,06		-0,54		-0,09		
-0,01		+0,61		+0,07		
		-0,42		(-0,07)		
+0,14		(+0,42)	-0,02	-0,21		μ_{3-5}
-0,02		+1,25				
-0,16	+0,05		+0,02		+0,01	
	-0,05					
-3150,18	+8492,58	+966,96	-299,16	-206,69	+1560,46	
-3,8455	5,9336	+0,4590	-11,9561	-5,3435	+71,5258	