ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1965
Seria: BUDOWNICTWO z. 16 Nr kol. 134

STANISŁAW MAJEWSKI

NIEKTÓRE PROBLEMY Z TEORII USTROJÓW SPRĘŻONYCH WSPÓŁPRACUJĄCYCH ZE SPRĘŻYSTYM PODŁOŻEM

Streszczenie. Praca zawiera teoretyczne ujęcie niektórych aspektów problemu sprężania cięgnem krzywoliniowym ustrojów betonowych spoczywających na podłożu sprężystym traktowanym jako półprzestrzeń sprężysta. W szczególności zanalizowano zmienność odporu podłoża pod nieskończenie długim pasmem sprężonym cięgnem parabolicznym i obciążonym równomiernie na jego górnej powierzchni. Przedstawione wykresy pozwalają na łatwe zorientowanie się we wzajemnej zależności między odporem podłoża i momentem zginającym a parametrami sprężenia.

Praca stanowi wstęp do dalszych studiów nad teorią ustrojów sprężonych współpracujących ze sprężystym podłożem. Pewne wyniki tych studiów zamieszczono w publikacji na temat obliczania belki sprężonej spoczywającej na sprężystym podłożu.

1. Wstęp

1.1. Uwagi ogólne

Znane są metody obliczania i projektowania ustrojów sprężonych, pracujących w rozmaitych warunkach podparcia. W odnośnej literaturze brak jednak pełnego i dogodnego rozwiązania, dającego podstawę do projektowania elementów sprężonych, podpartych w sposób ciągły na ich dolnej powierzchni. Rozwiązanie takie mogłoby dać odpowiedź na pytanie czy warto stosować sprężenie do konstrukcji fundamentowych, co pozwoliłoby na bardziej ekonomiczne ich kształtowanie z równoczesnym zapewnieniem im bardziej korzystnych warunków pracy. Istniejące metody obliczania konstrukcji na podłożu sprężystym mogą być wykorzystane do obliczania konstrukcji sprężonych tylko w pewnych przypadkach a mianowicie:

a) przy sprężeniu osiowym, z założeniem, że siły tarcia betonu o podłoże zaczepione na dolnej płaszczyźnie nie wywołują momentów zginających; dodatkowe utrudnienie

stanowi tu problem strat siły sprężającej, powiększonych o straty wynikające z tarcia betonu o podłoże,

b) dla elementów, które uzyskują styczność z podłożem dopiero po sprężeniu.

W każdym innym przypadku istniejące metody i oparte na nich tablice i nomogramy nie mogą stanowić podstawy do obliczania ustrojów sprężonych. Wynika to z faktu, że sprężenie, powodując w ogólnym przypadku odkształcenia elementu, wpływa na zmiany w przebiegu odporu podłoża, wyznaczenie zaś prawidłowego przebiegu odporu leży u podstaw wspomnianych metod.

Praca niniejsza stanowi próbę teoretycznego ujęcia zjawisk wywołanych w ustroju spoczywającym na podłożu sprężystym przez sprężenie cięgnem krzywoliniowym. Na przykładzie najprostszego przypadku nieskończenie długiego pasma obciążonego równomiernie na jego górnej powierzchni i sprężonego cięgnem parabolicznym, zilustrowano zmiany, jakie w takim ustroju wywołuje sprężenie. Przedstawione wykresy i krótkie tabelaryczne porównania pasma sprężonego z niesprężonym pozwalają na łatwe zorientowanie się w całokształcie wspomnianych zmian, jak również wyjaśniają w dostatecznym stopniu przyjęty tok rozumowania.

1.2. Założenia

Sprawą zasadniczą, decydującą o dokładności wyprowadzonych zależności i wzorów oraz o praktycznym ich zastosowaniu jest przyjęcie odpowiedniego modelu podłoża, możliwie najdokładniej obrazującego zachowanie się podłoża rzeczywistego, jakim jest w większości wypadków grunt. Takim modelem jest w tej chwili półprzestrzeń sprężysta. Trudno jednak nie dostrzegać niewątpliwych różnic między rzeczywistym podłożem gruntowym stanowiącym ośrodek niejednorodny o trudnych do sprecyzowania właściwościach fizyczno-mechanicznych i półprzestrzenią o właściwościach ośrodka idealnie sprężystego. W wielu zagadnieniach dotyczących konstrukcji sprężonych (np. straty siły sprężającej) niewystarczającym okazuje się model ciała idealnie sprężystego w odniesieniu do betonu. W tym aspekcie przyjęcie gruntu jako ciała idealnie sprężystego trzeba uważać za grube przybliżenie. Z drugiej jednak strony, brak bardziej dokładnego modelu podłoża, (który należałoby oprzeć o modele reologiczne), zmusza do korzystania z zależności między naprężeniami a odkształceniami wyprowadzonymi dla półprzestrzeni sprężystej.
Wszystkie rozważania dotyczą więc pasma spoczywających na półprzestrzeni sprężystej. Przy obliczaniu odkształceń pionowych tak pojętego ośrodka gruntowego nie uwzględniono naprężeń stycznych w jego górnej powierzchni.

Zdając sobie w pełni sprawę z doniosłości problemu tarcia między betonem a gruntem, przyjęto jednak w tym względzie

bardzo daleko idące uproszczenie, uważając, że zbytnia dokładność w tym punkcie byłaby nieuzasadniona, w związku z przybliżeniami dotyczącymi przyjęcia modelu podłoża.

Osobnej wzmianki wymaga sprawa odkształceń opóźnionych betonu i związanych z tym strat reologicznych siły sprężającej. Mamy tu do czynienia z zagadnieniem obliczenia odkształceń opóźnionych ciała o pewnych właściwościach reologicznych (beton), zanużonego w ośrodku, którego właściwości reologiczne nie są znane (grunt) i powiązanych z tym ośrodkiem więzami wzajemnego oddziaływania (siły tarcia). Wydaje się, że wyciąganie jakichkolwiek wniosków na podstawie rozważań teoretycznych nie popartych danymi doświadczalnymi byłoby bardzo ryzykowne. Dlatego w dalszych wywodach pominięto problem strat siły sprężającej, rozumiejąc, że poszukuje się nie wartości siły, z jaką trzeba naciągnąć kable a końcowej wartości siły sprężającej (po przebiegnięciu odkształceń opóźnionych w betonie).

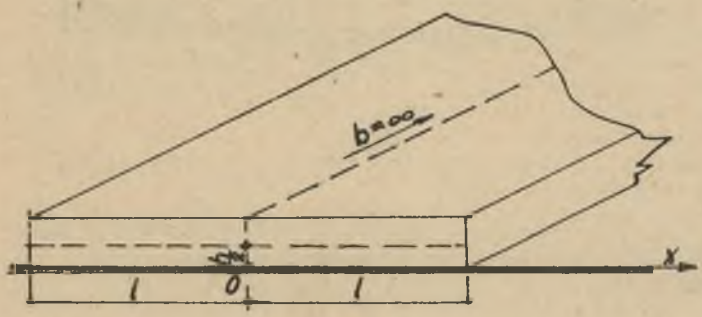
Wszystkie rozważania dotyczą obciążeń statycznych.

2. Zginanie walcowe nieskończenie długiego, sprężonego pasma spoczywającego na sprężystej półprzestrzeni

2.1. Rozważania ogólne

Rozpatrujemy przypadek nieskończenie długiego pasma o szerokości 2 l, leżącego na sprężystym podłożu. Ograniczając rozważania do przypadku konstrukcji zabetonowanej bezpośrednio na podłożu i sprężonej po stwardnieniu betonu, można w pracy pasma wyróżnić cztery etapy:

Etap wstępny. Stwardniały beton konstrukcji nie został jeszcze poddany zabiegowi sprężenia. Odpór podłoża w tym etapie będzie równy naciskowi zewnętrznemu i stały na całej

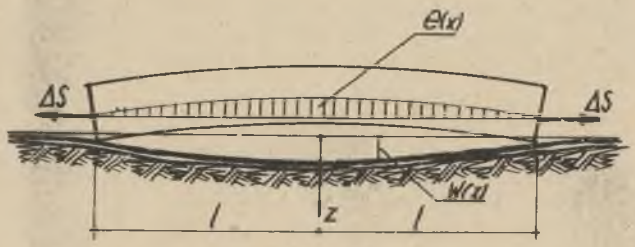


Rys. 1

długości odpowiedniego wycinka pasma 2 l. Podłoże zostało bowiem obciążone, a co za tym idzie doznało odkształceń, zanim w betonie pojawiły się więzy wewnętrzne. Beton po stwardnieniu przybrał formę odkształconego podłoża, dostosowując się do niego w sposób ścisły. Ponieważ przyjęty model podłoża gruntowego nie pozwala na odkształcenia opóźnione, nie istnieją czynniki mogące spowodować zmianę liniowego charakteru odporu gruntu. Tym samym (abstrahując do ściskania w kierunku osi "z") można stan konstrukcji w etapie wstępnym uznać za beznaprężeniowy.

Stan początkowy. Zgodnie z tym co powiedziano w punkcie 1.2. nie rozpatruje się stanu, w którym na konstrukcję działa obciążenie ciężarem własnym i początkowa (nie pomniejszona o straty reologiczne) wartość siły sprężającej.

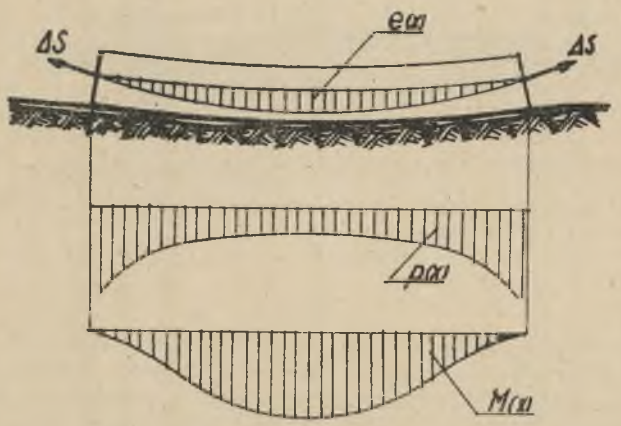
Stan bezużytkowy. Załóżmy w stwardniałym betonie cięgno sprężające według trasy opisanej równaniem e=e(x). Działanie siły sprężającej można zastąpić ściskaniem osiowym pasma, działaniem momentów krawędziowych S. e(+l) i S. e(-l) oraz oddziaływaniem kabla na beton według pewnej funkcji s możliwej do określenia przy znanym przebiegu funkcji e(x) i znanej wartości siły sprężającej S. Naciągnięcie cięgna sprężającego choćby dowolnie małą, elementarną siłą ΔS jest równoznaczne z wprowadzeniem do konstrukcji wspomnianych trzech działań. Osiowe ściśnięcie pasma siłą ΔS nie wywoła powstania stanu zgięciowego, jeżeli pominąć wpływ momentów od sił tarcia w płaszczyźnie styku betonu z podłożem. Ale zarówno działanie momentów krawędziowych ΔS. e(+l) i ΔS. e(-l) jak i oddziaływanie Δs prostopadłe do trasy kabla wywołają powstanie momentów zginających i związanych z nimi odkształceń pasma.



Rys. 2

Gdyby grunt stanowił ośrodek sztywny, sprężenie siłą ΔS spowodowałoby uniesienie środka pasma ku górze i oparcie pasma wzdłuż jego nieskończenie długich krawędzi x= +l i x= -l (rys. 2). Jednakże podłoże gruntowe, posiadające zgodnie z założeniem właściwości ośrodka sprężystego, reaguje natych-

miast na każde odkształcenie pasma. W konkretnym przypadku, zwiększenie nacisku przy krawędziach pasma spowoduje zwiększenie osiadań w tych punktach, zaś odciążenie partii środkowych pasma spowoduje, że odkształcenie podłoża w(x) ulegnie zmniejszeniu dla punktów w okolicy x = 0.
W rezultacie ustali się pewien stan równowagi (rys. 3).



Rys. 3

W tym stanie liniowy odpór gruntu zmieni swój kształt przyjmując charakter linii krzywej opisanej równaniem p=p(x). W paśmie wystąpi moment zginający, którego wartość łatwo da się określić z równania różniczkowego:

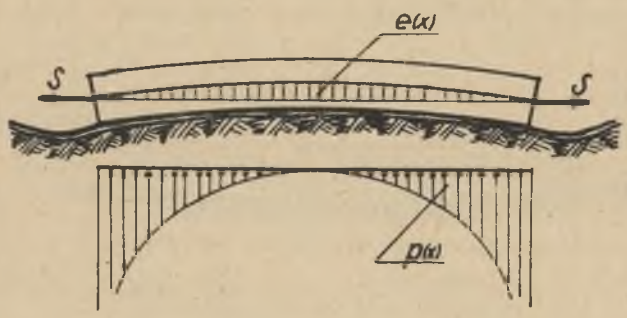
$$g-p(x) = -\frac{d^2M(x)}{dx^2} \tag{1}$$

Zwiększenie czy też zmniejszenie wartości siły S powoduje natychmiastową zmianę funkcji odporu p(x). Tak więc, mimo iż nie zmienia się całkowita wypadkowa odporu gruntu, której wartość musi równoważyć ciężar pasma (niezależnie od wartości siły sprężającej) charakter odporu gruntu zmienia się w zależności od wartosci siły sprężającej.
W zapisie matematycznym

$$\left.\begin{aligned} \int p(x).dx &= \gamma.h.2l = \text{const} \\ p &= p(x.S) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Odpór gruntu jest funkcją polozenia punktu i wartości siły sprężającej.

Zgodnie z ostatnim stwierdzeniem przy pewnej wartości sprężenia wartość odporu gruntu w środku pasma przybierze wartość zerową (rys. 4).

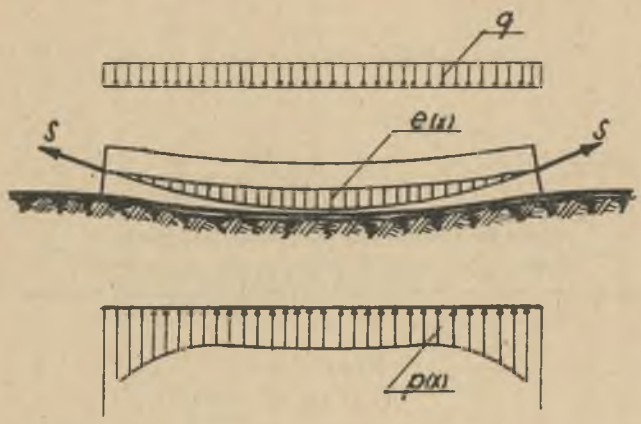


Rys. 4

Każde następne zwiększenie siły sprężającej spowoduje, że odpór gruntu w środku pasma przyjmie wartość ujemną. Taka sytuacja w praktyce nie może zaistnieć. Nastąpi oderwanie pasma od gruntu w okolicy punktu x=0. Być może celowe byłoby postawienie warunku doboru takiego sprężenia, które nie spowoduje oderwania się konstrukcji od podłoża w żadnym ze stanów obciążenia. Pomijając względy praktyczne, postawienie tego warunku jest wskazane ze względu na fakt, że przyjęty sposób obliczania konstrukcji na podłożu sprężystym traci swą ważność w przypadku istnienia na niektórych partiach pasma przerwy między betonem a podłożem.

W stanie bezużytkowym jako warunki podstawowe stawiamy dwa warunki nieprzekroczenia normowych wartości naprężeń krawędziowych k_1 i k_1'.

Stan użytkowy. Wprowadzenie obciążenia użytkowego powoduje kolejne zmiany w przebiegu sił wewnętrznych w samej konstrukcji oraz w podłożu. Jeżeli w stanie bezużytkowym odpór gruntu przedstawiał się jak na rysunku 4, to obciążenie pasma ciężarem użytkowym spowoduje jego wygięcie wypukłością ku dołowi i związane z tym zwiększenie wartości odporu gruntu w partiach środkowych pasma (rys. 5). Wykres odporu gruntu zbliży się do wykresu równomiernego. Stopień tego zbliżenia zależy oczywiście od sztywności pasma. Należy tu jednak zwrócić uwagę na fakt, że z dwóch jednakowo sztywnych pasm (jednakowa rozpiętość, jednakowa grubość oraz jednakowe stałe materiałowe betonu i gruntu) obciążonych takim samym obciążeniem użytkowym, pasmo niesprężone da odpór gruntu bardziej równomierny niż pasmo sprężone, co w dalszym ciągu zostanie uzasadnione odpowiednim rachunkiem.



Rys. 5

2.2. Analiza pracy sprężonego pasma opartego na półprzestrzeni sprężystej obciążonego na jego górnej powierzchni obciążeniem równomiernie rozłożonym q

Bardziej szczegółowe rozwiązanie będzie dotyczyło najprostszego przypadku obciążenia równomiernie rozłożonego na górnej powierzchni pasma. Zakłada się ponadto, taką trasę cięgna sprężającego, przy której docisk kabla do betonu rozłoży się równomiernie wzdłuż całej rozpiętości wycinka pasma 21.

Znając grubość pasma h, wartość sprężenia S, pionowe oddziaływanie kabla na beton s, stałe materiałowe: gruntu E_o, ν_o i betonu E_1, sprowadzimy rozwiązanie do wyznaczenia odporu gruntu jako funkcji dwóch zmiennych: współrzędnej x i siły sprężającej S. Zakładając ponadto, że mimośród kabla na krawędziach pasma jest równy zeru oraz pomijając wpływ tarcia na odkształcenia podłoża i pasma można poszukiwać odporu jako funkcji

$$p = p(x,S)$$

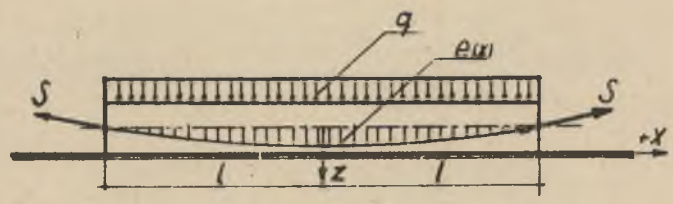
w sposób analogiczny do przyjętego przez Gorbunowa-Posadowa w jego pracach na temat konstrukcji na podłożu sprężystym

Wprowadzamy współrzędną bezwymiarową $\zeta = \frac{x}{l}$.

Ustalenie wartości S jako niezmiennej pozwoli na poszukiwanie odporu jako funkcji jednej tylko zmiennej x.

Nieznany odpór gruntu przedstawimy w postaci nieskończonego szeregu potęgowego

$$p(\zeta) = \sum a_n \cdot \zeta^n \tag{3}$$



Rys. 6

Dla uproszczenia obliczeń korzystne jest rozbicie tego szeregu na dwa szeregi, z których jeden będzie posiadał wyrazy parzyste a drugi nieparzyste, czyli

$$p(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \cdot \zeta^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \cdot \zeta^{2n+1} \tag{4}$$

Celem dalszych obliczeń będzie wyznaczenie współczynników a_{2n} i a_{2n+1}.

Korzystamy z następujących warunków:

1) warunek równowagi rzutów wszystkich sił na oś pionową z,
2) warunek równowagi momentów względem dowolnego punktu (np. względem punktu 0),
3) warunek ścisłego przylegania pasma do podłoża wyrażający się równością ugięć pasma i odkształcen podłoża.

Dla rozpatrywanego przypadku obciążenia symetrycznego z warunku równowagi momentów uzyskuje się:

$$a_{2n+1} = 0 \qquad n = 0,1,2,3$$

Warunek równowagi rzutów sił na oś pionową daje jedno równanie o nieskończonej liczbie niewiadomych

$$\int p(\zeta) \cdot l \cdot d\zeta = q \cdot 2l$$

$$l \cdot \int_{-1}^{+1} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \cdot \zeta^{2n} \cdot d\zeta = q \cdot 2l$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n}}{2n+1} \cdot \zeta^{2n+1} \Big|_{-1}^{+1} = 2q$$

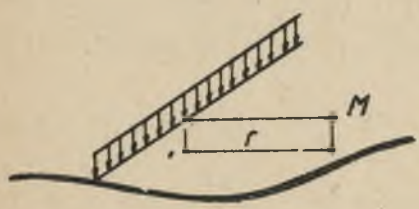
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n}}{2n+1} = q \qquad (5)$$

Dla wykorzystania warunku 3 obliczamy odkształcenia podłoża w oparciu o wzór Flamanta. Dotyczy on przesunięć górnej powierzchni półprzestrzeni sprężystej, wywołanych równomiernie rozłożonym wzdłuż nieskończenie długiej linii prostej obciążeniem p' T/m i ma postać

$$w(r) = -\frac{2}{\pi} \cdot p' \cdot \frac{(1-\nu_o^2)}{E_o} \cdot \ln \frac{r}{d} \qquad (6)$$

przy czym:

- w - pionowe przesunięcie podłoża,
- r - odległość punktu, w którym liczymy "w", od obciążonej prostej,
- d - dowolna wartość o wymiarze identycznym jak r,
- ν_o - współczynnik Poissona dla podłoża,
- E_o - moduł ściśliwości podłoża



Rys. 7

Dla ustalenia ugięć pasma wykorzystuje się znaną zależność różniczkową:

$$\frac{E_1 \cdot I_1}{(1-\nu_1^2) \cdot l^4} \cdot y^{IV}(\zeta) = \bar{q}(\zeta) - p(\zeta) \qquad (7)$$

gdzie

$$\bar{q}(\zeta) = q(\zeta) - s(\zeta)$$

$$\frac{E_1 \cdot I_1}{(1-\nu_1^2)l^4} = \frac{E_1 \cdot h^3}{12(1-\nu_1^2)} \quad [Tm]$$

gdzie:

- y - pionowe ugięcie pasma,
- l - pół rozpiętości pasma,
- q - zewnętrzne obciążenie pasma,
- s - oddziaływanie pionowe kabla na beton (skierowane ku górze),
- p - odpór gruntu,
- E_1 - moduł sprężystości betonu,
- ν_1 - współczynnik Poissona dla betonu,
- h - grubość pasma.

Nie przytaczając tutaj matematycznych operacji, prowadzących do końcowego wyniku (są one analogiczne do łatwo dostępnych w literaturze opracowań dotyczących konstrukcji niesprężonych) ograniczymy się do podania, że wykorzystanie warunku

$$w(\zeta) = y(\zeta) \tag{8}$$

prowadzi do nieskończonej ilości równań zawierających poszukiwane współczynniki a_{2n}. Dla konkretnego przypadku obciążenia równomiernie rozłożonego równania te mają postać:

$$\begin{aligned}
&\frac{-4l.(1-\nu_o^2)}{\pi E_o} \cdot \sum_{n=o}^{\infty} \frac{a_{2n}}{1-2n} = \\
&= \frac{-12l^4.(1-\nu_1^2)}{E_1.h^3} \left[\frac{q-s}{2} - \sum_{n=o}^{\infty} \frac{a_{2n}}{(2n+1)(2n+2)}\right] \\
&\frac{-4l(1-\nu_o^2)}{\pi E_o} \cdot \sum_{n=o}^{\infty} \frac{a_{2n}}{3-2n} = \\
&= \frac{-12l^4.(1-\nu_1^4)}{E_1 h^3} \cdot \left[\frac{a_o}{6} - \frac{q-s}{6}\right]
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\frac{4l(1-\nu_o^2)}{\varkappa E_o} \cdot \sum_{n=o}^{\infty} \frac{a_{2n}}{2k-1-2n} =$$

$$= \frac{-12\ l^4(1-\nu_1^2)}{E_1 h^3} \cdot \frac{a_{2k-4}}{2k-3).(2k-2).(2k-1)} \tag{9}$$

dla k = 3, 4, 5, ...

Równania te wraz z równaniem (5) dają podstawę do wyznaczenia wszystkich nieznanych współczynników a_{2n}, wchodzących do równania odporu gruntu. W praktyce rezygnuje się z rozwiązania ścisłego poszukując funkcji odporu podłoża w postaci wielomianu potęgowego m-tego stopnia:

$$p(\zeta) = \sum_{n=o}^{m} a_{2n} \cdot \zeta^{2n} \tag{10}$$

Gorbunow-Posadow w swoich pracach z dziedziny teorii konstrukcji na podłożu sprężystym przyjmuje m=5. Przyjmując tę wartość za wystarczająco dobre przybliżenie, zamiast układu o nieskończonej liczbie niewiadomych uzyskuje się układ sześciu równań o sześciu niewiadomych współczynnikach

$$a_o,\ a_2,\ a_4,\ a_6,\ a_8,\ a_{10}.$$

Układ ten ma postać:

$$\begin{aligned}
&a_o + \tfrac{1}{3} a_2 + \tfrac{1}{5} a_4 + \tfrac{1}{7} a_6 + \tfrac{1}{9} a_8 + \tfrac{1}{11} a_{10} = q \\
&(1+ \tfrac{1}{2}t)a_o+(-1+ \tfrac{1}{12}t)a_2+(- \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{30}t)a_4+(- \tfrac{1}{50} + \tfrac{1}{56}t)a_6+ \\
&+(- \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{90}t)a_8+(- \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{132}t)a_{10} = \tfrac{t}{2}(q-s) \\
&(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6}t)a_o + a_2 - a_4 - \tfrac{1}{3} a_6 - \tfrac{1}{5}a_8 - \tfrac{1}{7} a_{10}= - \tfrac{t}{6} (q-s) \\
&\tfrac{1}{5} a_o + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{60}t)\ a_2 + a_1 - a_6 - \tfrac{1}{3} a_8 - \tfrac{1}{5} a_{10} = 0 \\
&\tfrac{1}{7} a_{10} + \tfrac{1}{5} a_2 + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{210}t)\ a_4 + a_6 - a_8 - \tfrac{1}{3} a_{10} = 0 \\
&\tfrac{1}{9} a_o + \tfrac{1}{7} a_2 + \tfrac{1}{5} a_4 + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{504}t)\ a_6 + a_8 - a_{10} = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

W równaniach tych "t" oznacza wskaźnik wiotkości pasma i wyraża się wzorem:

$$t = \frac{(1-\nu_1^2)\pi E_o\ l^3}{4(1-\nu_o^2)E_1 . I_1} = \frac{3\pi(1-\nu_1^2)E_o}{(1-\nu_o^2)E_1}\left(\frac{l}{h}\right)^3 \cong 10\,\frac{E_o}{E_1}\,.\left(\frac{l}{h}\right)^3 \qquad (12)$$

Dla konstrukcji nieskończenie sztywnych t = 0.

Dla konstrukcji nieskończenie wiotkich t = ∞.

Lewa strona przedstawionego układu równań, wobec nieuwzględnienia wpływu tarcia na odkształcenia podłoża i pasma w niczym nie różni się od lewej strony układu obowiązującego dla konstrukcji niesprężonych. Różnica występuje tylko w wyrazach wolnych równania drugiego i trzeciego przy trasie kabla obranej tak, by oddziaływanie "s" prostopadłe do tej trasy było stałe na całej rozpiętości pasma. Przy innej trasie kabla może wystąpić różnica również w wyrazach wolnych pozostałych równań za wyjątkiem pierwszego.

Rozwiązanie ogólne, które podawałoby wartości współczynników a_{2n} w zależności od q, s oraz t nastręcza poważne trudności rachunkowe i w konsekwencji prowadzi do wzorów skomplikowanych, zgoła nieużytecznych z praktycznego punktu widzenia. Kilkakrotne wstawienie do równań konkretnej wartości t i wyznaczenie odpowiadających jej współczynników a_{2n} w zależności od q oraz s jest o wiele prostsze. Prowadzi to do wyniku o postaci:

$$a_{2n} = \varrho_{2n}(q)\ .\ q + \varrho_{2n}(s).s, \qquad (13)$$

co daje odpór podłoża:

$$p(\zeta)=\varrho_o(q).q+\varrho_o(s).s+\varrho_2(q).q.\zeta^2+\varrho_2(s).s.\zeta^2+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\varrho_{2n}(q).q.\zeta^{2n}+\varrho_{2n}(s).s\zeta^{2n}$$

$$p(\zeta) = q.\sum_{n=o}^{5}\varrho_{2n}(q).\zeta^{2n} + s\sum_{n=0}^{5}\varrho_{2n}(s).\zeta^{2n} \qquad (14)$$

Współczynniki $\varrho_{2n}(q)$ i $\varrho_{2n}(s)$ w tych równaniach zależą od wskaźnika wiotkości pasma t.

Z powyższych równań wynika, że odpór podłoża jest liniową funkcją zarówno obciążenia q jak i pionowego oddziaływania s cięgna sprężającego.
Interesujące jest w jaki sposób sprężenie wpływa na wartość odporu gruntu w środku pasma (ξ=0). Odpór podłoża wynosi tu

$$p(o) = q.\varrho_0(q) + s\varrho_0(s)$$

Dla

$$s = -\frac{\varrho_0(q)}{\varrho_0(s)} \cdot q = \alpha_1 . q \qquad p(o)=0$$

Nie chcąc dopuścić do oderwania się pasma od gruntu w jakimkolwiek punkcie trzeba byłoby postawić warunek

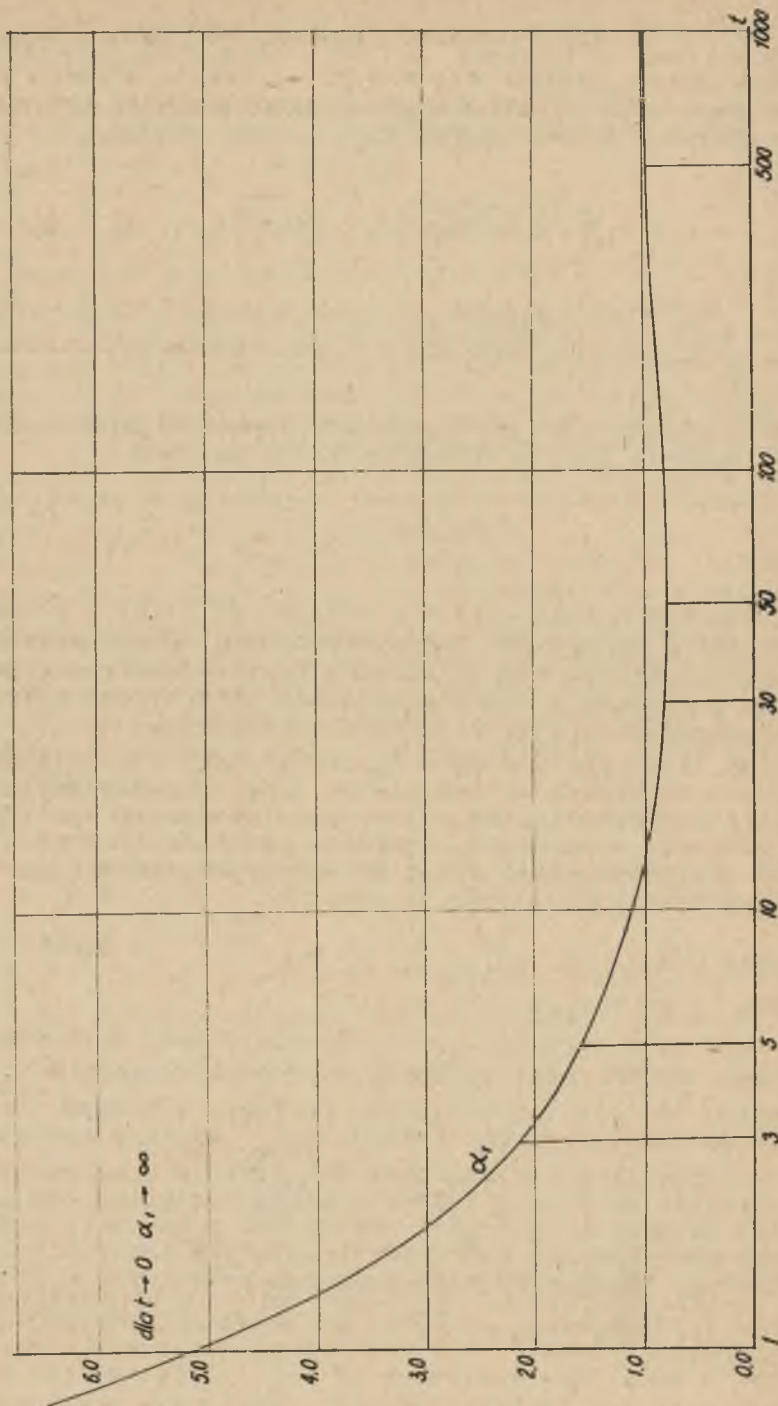
$$s \leqslant \alpha_1 . q \tag{15}$$

Rozwiązanie układu (11) dla różnych wartości t pozwala na sprecyzowanie zależności współczynnika α_1 od wskaźnika wiotkości pasma. Wykres tej zależności przedstawia rys. 8.Współczynnik α_1 wyliczono dla zaznaczonych na wykresie wartości t. Na osi odciętych przyjęto skalę logarytmiczną. Dla pasma sztywnego (t=0) współczynnik α_1 osiąga wartość nieskończenie dużą. Jest to zupełnie zrozumiałe, jako że takie pasmo nie ma możliwości odkształceń a tym samym skończona wartość sprężenia nie może spowodować odciążenia środkowych partii pasma. Również zrozumiały jest fakt, że dla pasma wiotkiego ($t=\infty$) wartość współczynnika dąży do jedności z tym, że $\alpha_1 < 1$ przy $t \to \infty$

Jeżeli dla $t \to 0$ $\alpha_{1(t)} \to \infty$
i dla $t \to \infty$ $\alpha_{1(t)} \to 1$

przy zachowaniu warunku $\alpha_1 < 1$, to dla pewnej wartości t z przedziału $(0, \infty)$ musi wystąpić ekstremum funkcji $\alpha_{1(t)}$ przy założeniu, że jest ona określona i ciągła w każdym punkcie tego przedziału. Ponieważ funkcja $\alpha_{1(t)}$ spełnia powyższe warunki, istnienie ekstremum jest oczywiste z matematycznego punktu widzenia. Trudno jednak znaleźć fizykalne uzasadnienie tego ekstremum. Być może wynika ono z niedokładności rozwiązania spowodowanej chociażby przyjęciem zamiast rozwiązania ścisłego aproksymacji wielomianem potęgowym 10 stopnia.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że sprężenie powoduje pozorne usztywnienie konstrukcji wyrażające się w tym, że pasmo sprężone o wskaźniku wiotkości t_1 daje odpór podłoża w przybliżeniu taki sam jak niesprężone o mniejszym wskaźniku wiot-



Rys. 8

kości $t_2 < t_1$. Może zaistnieć wypadek, że pasmo o dużym nawet wskaźniku t będzie się charakteryzowało odporem gruntu bardziej nierównomiernym niż pasmo nieskończenie sztywne t=0. Charakteryzuje to tablica 1:

Tablica 1

	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
p.niespręż. t=50	0,97	0,97	0,96	0,95	0,94	0,92	0,91	0,92	0,99	1,18
p,sprężone t=50, s=0,26 q	0,65	0,65	0,66	0,66	0,67	0,69	0,75	0,90	1,22	1,93
p.niesprężone t=0	0,64	0,64	0,65	0,67	0,69	0,74	0,80	0,89	1,06	1,46

Chcąc uzyskać rzeczywiste wartości odporu gruntu należy wartości z tablicy pomnożyć przez obciążenie zewnętrzne pasma q. Bardziej poglądowo przedstawia zmiany odporu gruntu wywołane sprężeniem wykres (rys. 9) oparty o tablicę 1.

Znajomość odporu gruntu w dowolnym punkcie rozpiętości pasma i dla dowolnej wartości siły sprężającej pozwala na określenie momentów zginających w dowolnym przekroju pasma. Przez dwukrotne całkowanie obciążeń prostopadłych do płaszczyzny pasma uzyskuje się dla rozpatrywanego przypadku obciążenia:

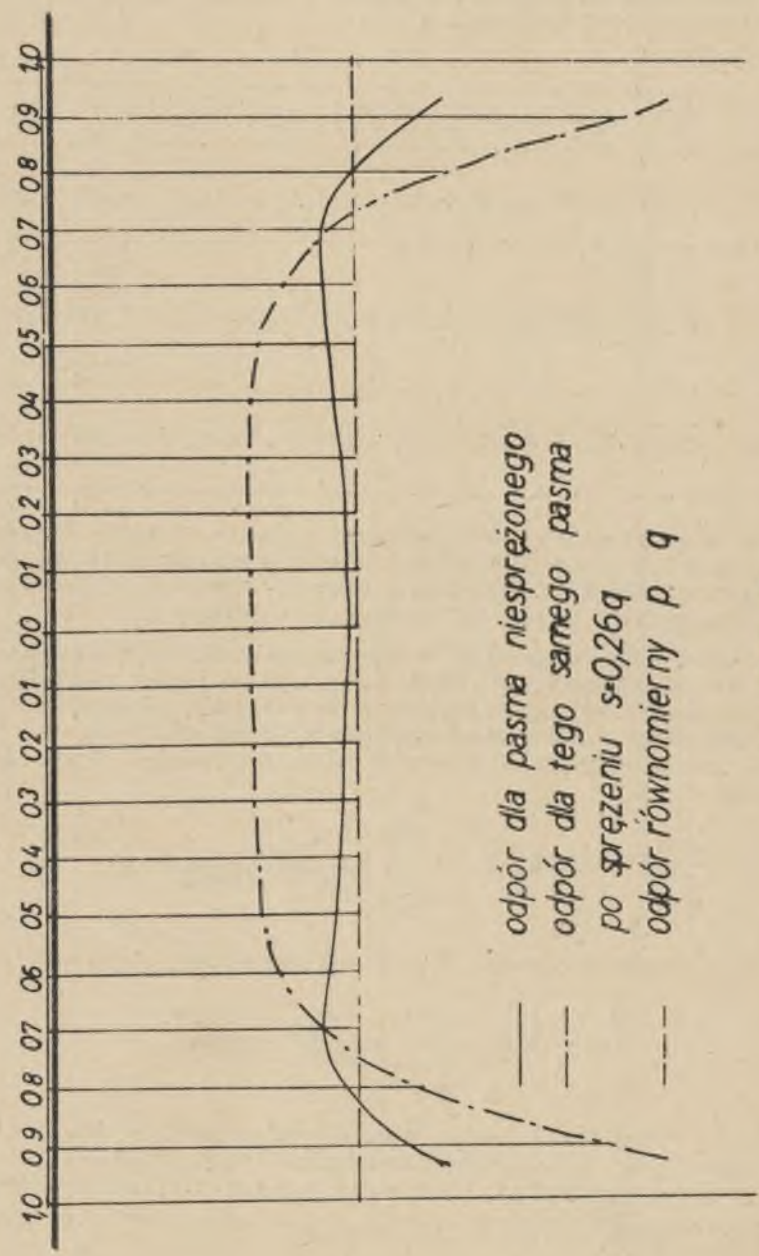
$$M_{(\zeta)} = l^2\left[\frac{M_o}{l^2} - \frac{(q-s).\zeta^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{2n}}{(2n+1).(2n+2)}.\zeta^{2n+2}\right], \qquad (16)$$

gdzie M_o oznacza moment dla ζ =0 określony wzorem:

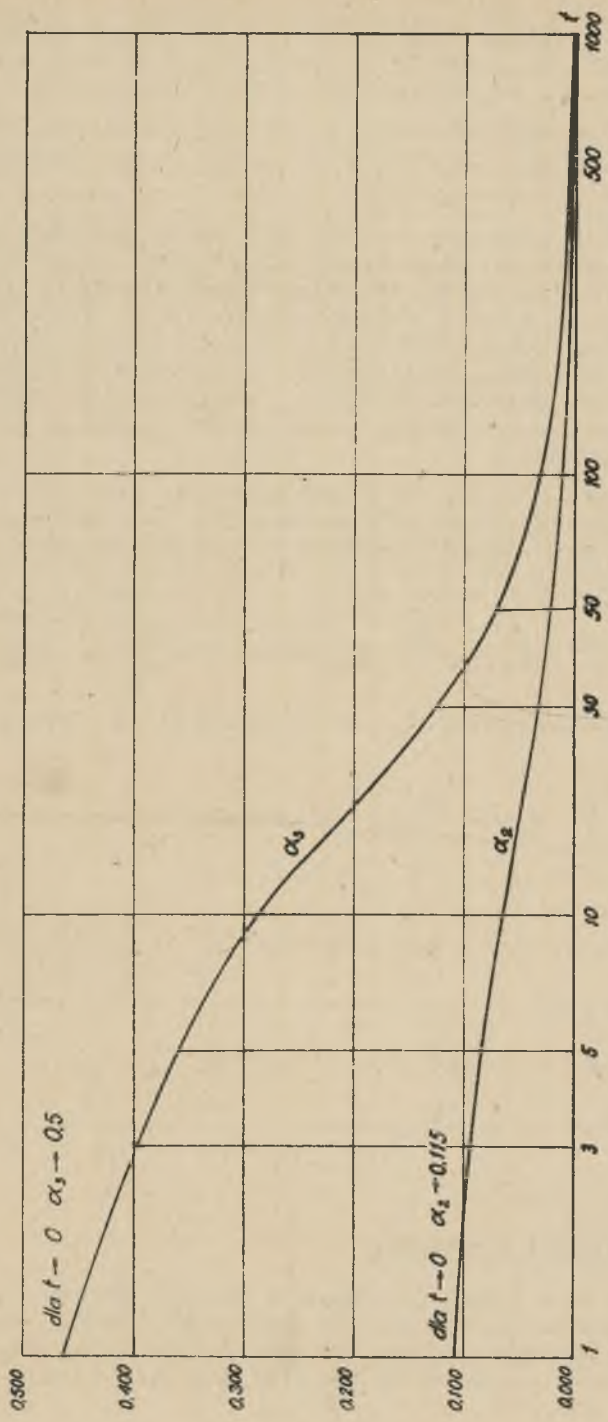
$$\frac{M_o}{l^2} = \frac{q-s}{2} - \sum_{n=o}^{\infty}\frac{a_{2n}}{(2n+1).(2n+2)} \qquad (17)$$

W oparciu o wzór (17) można wyznaczyć moment w środku pasma będący (dla tego przypadku obciążenia) maksymalnym momentem, jaki w pasmie występuje. Ponieważ wszystkie współczynniki a_{2n} wyrażają się jako liniowe funkcje q oraz s więc ogólnie można napisać:

$$M_o = \alpha_2.q.l^2 - \alpha_3.s.l^2 \qquad (18)$$


1,0 0,9 0,8 0,7 0,6 0,5 0,4 0,3 0,2 0,1 0,0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0
odpór dla pasma niesprężonego
odpór dla tego samego pasma po sprężeniu s=0,26q
odpór równomierny p q

Rys. 9


0,500
0,400
0,300
0,200
0,100
0,000
dla t → 0 α₃ → 0,5
dla t → 0 α₂ → 0,115
α₃
α₂
1
3
5
10
30
50
100
500
1000
t

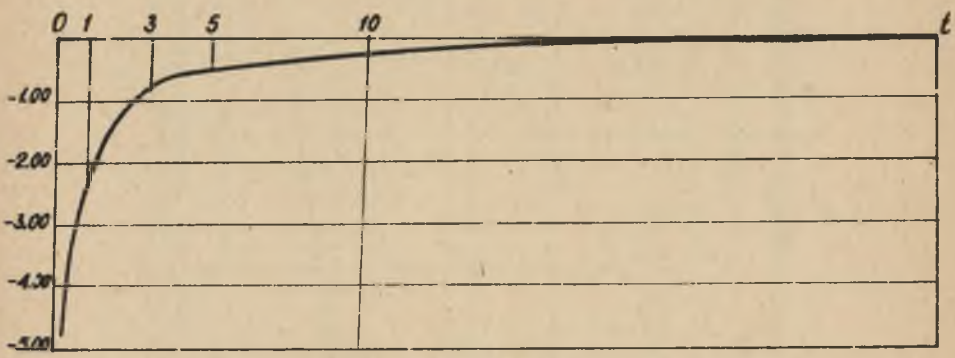
Rys. 10

Rozwiązanie układu równań (11) dla różnych wartości wskaźnika wiotkości t pozwoli, podobnie jak to uczyniono dla współczynnika α_1, na wykreślne ujęcie zależności współczynników α_2 i α_3 od wskaźnika wiotkości pasma. Zależność tę pokazano na rysunku 10. Z wykresu widać, że sprężenie wywołuje w pasmie nieskończenie sztywnym (t=0) moment $M'_0=0{,}5.s.l^2$ W miarę wzrostu wskaźnika wiotkości wpływ sprężenia na wartość momentu maleje. Jest to wywołane powstaniem w podłożu reakcji, która zmniejsza efekt sprężenia. Powstaje tu sytuacja spotykana w teorii sprężonych ustrojów hiperstatycznych (np. belek ciągłych), gdzie na efekt sprężenia poważny wpływ mają reakcje więzów zewnętrznych wywołanych naciągiem kabli. Kształt wykresu współczynnika α_3 sugeruje, że sprężenie kablem krzywoliniowym będzie bardziej opłacalne w ustrojach o znacznej sztywności.

Interesujące mogłoby być zestawienie, które podawałoby jak powinna kształtować się wartość s w zależności od q, ażeby sumaryczny moment zginający w środku pasa wynosił 0. Musi wtedy być:

$$\alpha_2.q.l^2 - \alpha_3.s.l^2 = 0, \text{ stąd } s = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}.q = \alpha_4.q$$

Zależność współczynnika α_4 od wskaźnika t pokazuje rys.11



Rys. 11

2.3. Podsumowanie i wnioski

Podsumowując niniejsze rozważania należy przede wszystkim zwrócić uwagę na bardzo daleko idące zawężenie rozwiązania, będące wynikiem ograniczenia się już nie tylko do jednego z wielu możliwych przypadków obciążenia, ale również do jednej

z wielu możliwych dla tego obciążenia tras cięgna sprężającego. Nietrudno dostrzec, że wykresy i tablice oparte na przyjętym w tym punkcie sposobie postępowania, nawet gdyby obejmowały szerszy wachlarz występujących w praktyce obciążeń, uszczuplałyby w poważnym stopniu możliwości projektowania, nie mówiąc już o tym, że takich tablic musiałoby być bardzo dużo.

Dlatego poszukiwanie rozwiązania bardziej ogólnego, dającego możliwie największą swobodę w doborze parametrów sprężenia i wprowadzającego jak najdalej idące uniezależnienie wartości tabelaryzowanych od charakteru obciążenia stało się, jednym z podstawowych kierunków dalszych badań. Okazało się że rozwiązanie takie można uzyskać w prosty sposób, wykorzystując pewne ogólnie znane zasady rachunku krakowianowego. To rozwiązanie będzie przedstawione w następnej pracy, gdzie rozpatruje się pracę sprężonej belki spoczywającej na sprężystym podłożu. Zrezygnowano z bardziej dokładnego rozwiązania dla pasma, uważając za niecelowe szczegółowe analizowanie pracy ustroju, którego wystąpienie w praktyce jest obwarowane wieloma rzadko spełnianymi warunkami. Wszelkie dotychczas przedstawione dociekania dotyczące sprężonego pasma traktuje się wyłącznie jako środek do wyjaśnienia niektórych aspektów sprężania konstrukcji leżących na podłożu sprężystym i do ogólnego przedstawienia pracy tych konstrukcji.

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕММЫ ТЕОРИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ БАЛОК РАБОТАЩИХ В СВЯЗИ С УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

С о д е р ж а н и е

В этой статьии представлено теоретические рассуждения некоторых проблемм связаных с работой предварительно напряженных конструкции лежащих на упругом основании. Реакция основания несомненно зависит от нагрузки, от положения рассматриваемого пункта, от напрягаюей силы и её аксцентрицитета. Несколько математических формул показывает как эта реакция зависит от параметров предварительного напряжения.

SOME PROBLEMS
FROM THE THEORY OF PRESTRESSED STRUCTURES
WORKING IN CONNECTION WITH ELASTIC FOUNDATION

S u m m a r y

In this paper the theoretical considerations about some problems connected with prestressing of structures resting on the elastic foundation are included. The subgrade reaction under symmetricaly loaded, semi-infinite post-tensioned strip is, no doubt, a function of the load, of the point's coordinate and of the prestressing force and it's eccentricity. Several simple mathematical formulas show, how this reaction depends on the parameters of prestress in the particular case of uniformly distributed load.