ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1965
Seria: BUDOWNICTWO z. 16 Nr kol. 134

STANISŁAW MAJEWSKI

OBLICZANIE SPRĘŻONEJ BELKI SPOCZYWAJĄCEJ NA SPRĘŻYSTEJ PÓŁPRZESTRZENI

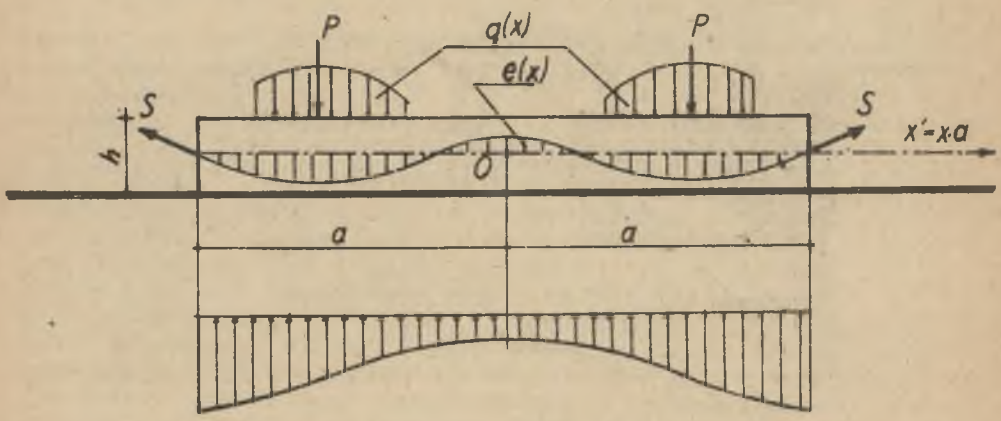
Streszczenie. Praca zawiera poszukiwania praktycznej metody projektowania belek sprężonych spoczywających na sprężystej półprzestrzeni. Odpór podłoża pod symetrycznie obciążoną belką potraktowano jako funkcję obciążenia zewnętrznego, położenia punktu na osi podłużnej belki i parametrów sprężenia (wartości siły i jej mimośrodu). Podano wzory do obliczania wartości tego odporu i wiążącej się z nim wartości momentu zginającego. Opierając się o te wzory i wykorzystując pewne ogólnie znane zasady rachunku krakowianowego opracowano tablice, które dają możliwość obliczania w prosty sposób odporu gruntu i momentu zginającego w obciążonej dowolnie (z zachowaniem symetrii) sprężonej belce spoczywającej na podłożu sprężystym. Tablice te mogą z powodzeniem służyć do obliczania również belek niesprężonych, stanowią więc niejako uogólnienie tablic opracowanych przez Gorbunowa-Posadowa.

Przedstawiony na końcu pracy przykład ilustruje sposób wykorzystania tych tablic.

1. Rozważania ogólne

Rozpatruje się belkę spoczywającą na sprężystej półprzestrzeni obciążoną prostopadle do jej osi i sprężoną cięgnem przebiegającym na mimośrodzie "e" zmiennym wzdłuż długości belki. W pierwszym etapie (przedstawionym w niniejszej publikacji) ograniczono się do przypadku symetrycznego względem środka belki obciążenia, co pociąga za sobą narzucenie warunku symetrii trasy cięgna sprężającego względem tego środka (rys. 1). Rozwiązanie dla obciążenia antymetrycznego może być uzyskane w analogiczny sposób. Nie wprowadza się natomiast żadnych ograniczeń co do sposobu realizacji obciążenia: może nim być dowolnie zlokalizowana siła skupiona, moment, względnie obciążenie rozłożone na całej belce czy też tylko na pewnych jej partiach.

Podobnie jak dla pasma, pierwszym krokiem stanowiącym zarazem klucz do rozwiązania wszystkich zagadnień związanych z rozpatrywaną belką jest wyznaczenie przebiegu odporu podłoża pod belką. Jako podstawę przyjęto tutaj tok postępowania przedstawiony przez Gorbunowa-Posadowa w jego pracach na temat obliczania belek na sprężystym podłożu.



Rys. 1

Wychodzi się z rozwiązania prostokątnej płyty o wymiarach 2a. 2b przyjmując nieznany odpór podłoża w postaci podwójnego szeregu potęgowego

$$p(x,y) = \sum_{n=o}^{\infty} \sum_{m=o}^{\infty} a_{n,m} \cdot x^n \cdot y^m \qquad (1)$$

W przypadku obciążenia symetrycznego względem osi x i y szereg ten można zastąpić szeregiem

$$p(x,y) = \sum_{n=o}^{\infty} \sum_{m=o}^{\infty} \cdot a_{2n,2m} \cdot x^{2n} \cdot y^{2m} \qquad (2)$$

Nieznane współczynniki $a_{n,m}$ przy odpowiednich potęgach x i y w szeregu (1) wyznacza się w oparciu o dwa warunki statyczne:

1) suma rzutów wszystkich sił na oś pionową prostopadłą do górnej powierzchni podłoża równa się zeru,
2) sumy momentów względem dwóch wzajemnie prostopadłych osi układu x i y leżących w płaszczyźnie równoległej do górnej powierzchni podłoża równają się zeru

oraz o warunek geometryczny dotyczący równości ugięć płyty i odkształceń podłoża. Wykorzystanie wspomnianych warunków prowadzi (podobnie jak to miało miejsce w przypadku pasma) do nieskończonej ilości równań liniowych zawierających nieskończoną ilość nieznanych współczynników $a_{n,m}$. Zastępując szereg nieskończony wielomianem potęgowym k-tego stopnia, uzyskuje się podstawę do wyznaczenia współczynników $a_{n,m}$, a tym samym do określenia równania odporu podłoża.

Oznaczając przez $\bar{\alpha}$ stosunek połowy długości płyty "a" do połowy jej szerokości "b" i pomijając w uzyskanym rozwiązaniu te wyrazy, które przy $\bar{\alpha} > 7$ przyjmują małe wartości, uzyskuje się układ równań liniowych pozwalający na wyznaczenie odporu podłoża pod spoczywającą na nim belką. Zastępując z kolei szereg nieskończony wielomianem potęgowym dziesiątego stopnia

$$p(x) = \sum_{n=o}^{5} a_{2n} \cdot x^{2n} \tag{3}$$

układ ten sprowadzi się do sześciu równań o sześciu niewiadomych (a_o, a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}):

$$\begin{aligned}
&1.000000a_o + 0,333333a_2 + 0,200000a_4 + 0,142857a_6 + \\
&\qquad + 0,111111a_8 + 0,090909a_{10} = S_o \\
&K_o \cdot a_o + (C_2 + K_2)a_2 + K_4 \cdot a_4 + K_6 \cdot a_6 + K_8 \cdot a_8 + \\
&\qquad + K_{10} \cdot a_{10} = R_2 - S_2 \\
&L_o \cdot a_o - 0,500000a_2 + C_4 \cdot a_4 + 0,500000a_6 + \\
&\qquad + 0,250000a_8 + 0,166667a_{10} = R_4 \\
&-0.166667a_o + L_2 a_2 - 0,500000a_4 + C_6 a_6 + \\
&\qquad + 0.500000a_8 + 0.250000a_{10} = R_6
\end{aligned} \tag{4}$$

$$-0{,}125000a_0 - 0.166667a_2 + L_4a_4 - 0.500000a_6 +$$

$$+ C_8a_8 + 0.500000a_{10} = R_8$$

$$-0.100000a_0 - 0.125000a_2 - 0.166667a_4 + L_6a_6 + \tag{4}$$

$$- 0.500000a_8 + C_{10}a_{10} = R_{10}$$

W równaniach tych wielkości K_{2i} i L_{2i} zależą od wskaźnika

$$t' = \frac{\pi E_0 a^4}{2(1-\nu_0^2)E_1I_1} = \bar{\alpha}.t \tag{5}$$

przy czym t jest wskaźnikiem wiotkości belki.
Wielkości C_{2i} są zależne od stosunku $\bar{\alpha} = a:b$

Wyrazy wolne w równaniach od drugiego do szóstego są proporcjonalne do współczynników przy kolejnych parzystych potęgach (od drugiej do dziesiątej)w równaniu osi odkształconej belki

$$EIy'' = - M(x)$$

Ponieważ obciążenie belki i inne wpływy (sprężenie, temperatura) najwygodniej jest przedstawić w postaci szeregu potęgowego, więc M(x) będzie wielomianem, w którym ze względu na założoną symetrię wystąpią właśnie tylko parzyste potęgi "x" Dwukrotnie scałkowanie funkcji M(x) da w efekcie równanie osi odkształconej, będące wielomianem zawierającym, również x jedynie w parzystych potęgach.

Układ (4) może stanowić podstawę do wyznaczenia odporu podłoża pod belką sprężoną, przy czym wpływ sprężenia znajdzie swe odbicie w wartościach wyrazów wolnych w równaniach od drugiego do szóstego. Trudno jednak nie zauważyć ogromnych niedogodności jakie wiążą się z rozwiązywaniem belek sprężonych w oparciu o układ (4).

Podstawą niedogodność stanowi tutaj niemożność projektowania czyli doboru parametrów sprężenia chociażby dla belki o określonych wymiarach, nie mówiąc już o doborze przekroju poprzecznego belki najbardziej odpowiedniego w zadanych warunkach obciążenia i doborze odpowiednich dla tego optymalnego przekroju parametrów sprężenia. Niemożność ta wynika z faktu, że każdorazowo rozwiązanie układu równań (4) jest związane z jednym zestawem wymiarów geometrycznych belki, z

jednym określonym rodzajem obciążenia i z jednym uprzednio sprecyzowanym zestawem parametrów sprężenia (wartość siły sprężającej i przebieg mimośrodu na długości belki). Wszystkie te czynniki muszą być określone przed przystąpieniem do rozwiązywania układu równań, a ewentualne projektowanie mogłoby się odbywać na drodze kilkakrotnych prób, z których każda wiązałaby się z bądź co bądź pracochłonną operacją rozwiązania układu sześciu równań o sześciu niewiadomych.

Dla celów praktycznych najdogodniejsza byłaby metoda opierająca się na tablicach lub na wykresach, pozwalająca na obliczanie belki przy dowolnym obciążeniu i dowolnym przebiegu trasy cięgna (z zachowaniem uprzednio zastrzeżonej symetrii względem środka belki).
W poszukiwaniu takiej metody można skorzystać z prostych i ogólnie znanych zasad rachunku krakowianowego w zastosowaniu do rozwiązywania układów równań liniowych. Jak wiadomo rozwiązanie takie można otrzymać mnożąc inwers macierzy podstawowej układu przez kolumnę wyrazów wolnych.

W zapisie krakowianowym rozwiązanie układu [4] wyrazi się następująco:

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_6 \\ a_8 \\ a_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_0 \\ W_2 \\ W_4 \\ W_6 \\ W_8 \\ W_{10} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{20} & \alpha_{40} & \alpha_{60} & \alpha_{80} & \alpha_{100} \\ \alpha_{02} & \alpha_{22} & \alpha_{42} & \alpha_{62} & \alpha_{82} & \alpha_{102} \\ \alpha_{04} & \alpha_{24} & \alpha_{44} & \alpha_{64} & \alpha_{84} & \alpha_{104} \\ \alpha_{06} & \alpha_{26} & \alpha_{46} & \alpha_{66} & \alpha_{86} & \alpha_{106} \\ \alpha_{08} & \alpha_{28} & \alpha_{48} & \alpha_{68} & \alpha_{88} & \alpha_{108} \\ \alpha_{010} & \alpha_{210} & \alpha_{410} & \alpha_{610} & \alpha_{810} & \alpha_{1010} \end{Bmatrix} \tag{6a}$$

co po wykonaniu działania daje

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= \alpha_{00}W_0 + \alpha_{02}W_2 + \alpha_{04}W_4 + \alpha_{06}W_6 + \alpha_{08}W_8 + \alpha_{010}W_{10} \\
a_2 &= \alpha_{20}W_0 + \alpha_{22}W_2 + \alpha_{24}W_4 + \alpha_{26}W_6 + \alpha_{28}W_8 + \alpha_{210}W_{10} \\
a_4 &= \alpha_{40}W_0 + \alpha_{42}W_2 + \alpha_{44}W_4 + \alpha_{46}W_6 + \alpha_{48}W_8 + \alpha_{410}W_{10} \\
a_6 &= \alpha_{60}W_0 + \alpha_{62}W_2 + \alpha_{64}W_4 + \alpha_{66}W_6 + \alpha_{68}W_8 + \alpha_{610}W_{10} \\
a_8 &= \alpha_{80}W_0 + \alpha_{82}W_2 + \alpha_{84}W_4 + \alpha_{86}W_6 + \alpha_{88}W_8 + \alpha_{810}W_{10} \\
a_{10} &= \alpha_{100}W_0 + \alpha_{102}W_2 + \alpha_{104}W_4 + \alpha_{106}W_6 + \alpha_{108}W_8 + \alpha_{1010}W_{10}
\end{aligned}\right\} \tag{6b}$$

lub ogólnie

$$a_{2n} = \sum_{k=o}^{5} \alpha_{2n,2k} \cdot W_{2k} \tag{6c}$$

W równaniach (6a) do (6c) wielkościom W_{2k} odpowiadają wyrazy wolne w poszczególnych równaniach układu (4).

Współczynniki $\alpha_{2n,2k}$ łatwo uzyskać na drodze obliczenia inwersu krakowianowego macierzy podstawowej układu (4). Obliczenie to wymaga uprzedniego sprecyzowania wartości $\bar{\alpha} = \frac{a}{b}$ oraz t' (wzór 5). Obydwie te wartości są zależne jedynie od parametrów geometrycznych belki oraz od pewnych własności fizykalnych podłoża i materiału belki. Tak więc dla określonej belki cała tablica współczynników $\alpha_{2n,2k}$ może być z łatwością obliczona bez konieczności precyzowania obciążenia oraz parametrów sprężenia.

Znajomość współczynników $\alpha_{2n,2k}$ pozwala na rozpisanie równania odporu podłoża (3) a w dalszej kolejności na obliczenie momentów zginających, sił poprzecznych i ugięć belki.

2. Odpór podłoża

$$p(x) = a_o + a_2 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^4 + a_6 \cdot x^6 + a_8 \cdot x^8 + a_{10} \cdot x^{10}$$

Wprowadzając współczynniki a_{2n} według (6b) i grupując wyrazy przy jednakowych W_{2k} uzyskamy:

$$\begin{aligned}
p(x) &= \\
&= (\alpha_{00} + \alpha_{20} \cdot x^2 + \alpha_{40} \cdot x^4 + \alpha_{60} \cdot x^6 + \alpha_{80} \cdot x^8 + \alpha_{100} \cdot x^{10}) W_o + \\
&+ (\alpha_{02} + \alpha_{22} \cdot x^2 + \alpha_{42} \cdot x^4 + \alpha_{62} \cdot x^6 + \alpha_{82} \cdot x^8 + \alpha_{102} \cdot x^{10}) W_2 + \\
&+ (\alpha_{04} + \alpha_{24} \cdot x^2 + \alpha_{44} \cdot x^4 + \alpha_{64} \cdot x^6 + \alpha_{84} \cdot x^8 + \alpha_{104} \cdot x^{10}) W_4 + \\
&+ (\alpha_{06} + \alpha_{26} \cdot x^2 + \alpha_{46} \cdot x^4 + \alpha_{66} \cdot x^6 + \alpha_{86} \cdot x^8 + \alpha_{106} \cdot x^{10}) W_6 + \\
&+ (\alpha_{08} + \alpha_{28} \cdot x^2 + \alpha_{48} \cdot x^4 + \alpha_{68} \cdot x^6 + \alpha_{88} \cdot x^8 + \alpha_{108} \cdot x^{10}) W_8 + \\
&+ (\alpha_{010} + \alpha_{210} \cdot x^2 + \alpha_{410} \cdot x^4 + \alpha_{610} \cdot x^6 + \alpha_{810} \cdot x^8 + \alpha_{1010} \cdot x^{10}) W_{10}
\end{aligned} \tag{7a}$$

Wyrażenia w nawiasach nie zależą od obciążenia i od sprężenia i jako takie mogą zostać stabelaryzowane. W ten sposób odpór podłoża wyrazi się jako:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{5} p_{2k} \cdot W_{2k} \tag{7b}$$

Tablice od 1 do 6 podają liczbowe wartości współczynników p_{2k} dla stosunku połowy długości belki do połowy jej szerokości $\bar{\alpha} = \frac{a}{b} = 10$ i różnych wartości t' (od $t' = 0$ do $t' = 500$).

Tablica 1

Wartości współczynnika p_0

t' \ x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0	+0,882379	+0,888295	+0,908623	+0,956038	+1,088520	+1,583634
2	+0,815653	+0,828937	+0,871344	+0,956104	+1,146890	+1,754546
5	+0,724022	+0,747311	+0,819800	+0,955782	+1,227183	+1,991181
10	+0,590476	+0,628063	+0,743816	+0,954303	+1,344544	+2,340821
20	+0,378384	+0,437774	+0,620365	+0,948685	+1,532003	+2,911510
50	-0,003910	+0,089761	+0,382386	+0,920184	+1,875703	+4,027011
100	-0,283136	-0,175152	+0,175191	+0,858920	+2,138496	+5,033727
200	-0,451152	-0,357139	-0,021119	+0,732049	+2,211249	+6,070426
500	-0,428443	-0,406780	-0,239519	+0,418891	+2,345509	+7,542490

Tablica 2

Wartości współczynnika P_2

t' / x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
2	-0,157139	-0,142152	-0,095648	-0,010933	+0,137748	+0,461913
5	-0,148739	-0,134785	-0,091276	-0,011322	+0,130521	+0,442205
10	-0,136425	-0,123980	-0,084857	-0,011884	+0,119919	+0,413271
20	-0,116636	-0,106606	-0,074516	-0,012759	+0,102862	+0,366643
50	-0,079666	-0,074086	-0,055014	-0,014232	+0,070888	+0,278832
100	-0,049833	-0,047716	-0,038920	-0,015075	+0,044864	+0,206472
200	-0,025720	-0,026140	-0,025190	-0,015060	+0,023380	+0,144940
500	-0,007198	-0,008902	-0,012694	-0,013084	+0,005714	+0,089230

Tablica 3

Wartości współczynnika P_4

t' / x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
2	-0,078310	-0,084425	-0,092650	-0,068635	+0,070755	+0,567800
5	-0,071660	-0,078536	-0,089036	-0,068800	+0,064936	+0,551560
10	-0,061936	-0,069916	-0,083717	-0,069002	+0,056409	+0,527664
20	-0,046400	-0,056100	-0,075100	-0,069215	+0,042710	+0,488985
50	-0,017888	-0,030502	-0,058618	-0,068958	+0,017154	+0,415184
100	+0,004075	-0,010297	-0,044507	-0,071700	-0,003391	+0,352345
200	+0,019695	+0,005120	-0,031490	-0,063290	-0,019815	+0,294865
500	+0,025852	+0,014342	-0,017182	-0,052284	-0,031698	+0,231892

Tablica 4

Wartości współczynnika p_6

t' / x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
2	-0,049700	-0,052255	-0,062305	-0,070525	+0,012645	+0,573245
5	-0,044788	-0,047894	-0,059592	-0,070588	+0,008322	+0,561016
10	-0,037622	-0,041517	-0,055530	-0,070640	+0,002020	+0,543057
20	-0,026200	-0,031155	-0,049110	-0,070605	-0,000815	+0,540000
50	-0,005406	-0,012516	-0,036640	-0,069846	-0,026972	+0,457604
100	+0,010240	+0,002110	-0,025840	-0,067770	-0,041950	+0,388460
200	+0,020635	+0,012455	-0,017110	-0,066365	-0,059310	+0,312600
500	+0,022522	+0,017886	-0,004124	-0,051234	-0,060854	+0,308326

Tablica 5

Wartości współczynnika p_8

t' / x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
2	-0,032035	-0,033465	-0,039400	-0,052735	-0,018105	+0,511845
5	-0,028602	-0,030410	-0,037486	-0,052754	-0,021126	+0,503214
10	-0,023595	-0,025948	-0,034668	-0,052754	-0,025554	+0,490498
20	-0,015630	-0,018815	-0,030090	-0,052655	-0,032650	+0,469845
50	-0,001184	-0,005712	-0,021270	-0,051908	-0,045812	+0,430030
100	+0,009556	+0,004401	-0,013596	-0,050115	-0,056206	+0,395290
200	+0,016410	+0,011635	-0,006305	-0,046250	-0,064120	+0,361870
500	+0,016770	+0,014524	+0,002050	-0,036440	-0,068522	+0,321014

Tablica 6

Wartości współczynnika p_{10}

t[1] / x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
2	-0,018695	-0,019475	-0,022585	-0,031790	-0,024960	+0,384770
5	-0,016586	-0,017600	-0,021398	-0,031782	-0,026810	+0,379378
10	-0,013513	-0,014856	-0,019383	-0,031760	-0,029520	+0,371424
20	-0,008630	-0,010475	-0,016825	-0,031655	-0,033850	+0,358465
50	+0,000194	-0,002452	-0,011364	-0,031076	-0,041834	+0,333262
100	+0,006678	+0,003688	-0,006609	-0,029783	-0,048021	+0,310803
200	+0,010665	+0,007970	-0,002090	-0,027070	-0,052460	+0,288245
500	+0,010388	+0,009354	+0,003020	-0,020316	-0,053938	+0,257826

3. Siły poprzeczne

$$Q(x) = a\int_0^x p(x).dx = a\int_0^x \sum_{n=0}^{5} a_{2n}.x^{2n} = a\sum_{n=0}^{5} \frac{a_{2n}}{(2n+1)} x^{2n+1} + Q_o$$

Q_o stanowi wartość siły poprzecznej w punkcie $x = 0$.
Z warunku symetrii odporu podłoża wynika, że $Q_o = 0$. Ostatecznie więc

$$Q(x) = \left[a_o.x + \frac{a_2}{3}x^3 + \frac{a_4}{5}x^5 + \frac{a_6}{7}x^7 + \frac{a_8}{9}x^9 + \frac{a_{10}}{11}x^{11}\right] a \qquad (8a)$$

Wprowadzając współczynniki a_{2n} według (6b) i grupując wyrazy przy jednakowych W_{2k} uzyskuje się:

$$\frac{1}{a}\cdot Q(x) =$$

$$= \left[\frac{\alpha_{00}.x}{1} + \frac{\alpha_{20}.x^3}{3} + \frac{\alpha_{40}.x^5}{5} + \frac{\alpha_{60}.x^7}{7} + \frac{\alpha_{80}.x^9}{9} + \frac{\alpha_{100}.x^{11}}{11}\right].W_o +$$

$$+ \left[\frac{\alpha_{02}.x}{1} + \frac{\alpha_{22}.x^3}{3} + \frac{\alpha_{42}.x^5}{5} + \frac{\alpha_{62}.x^7}{7} + \frac{\alpha_{82}.x^9}{9} + \frac{\alpha_{102}.x^{11}}{11}\right].W_2 + \qquad (8b)$$

$$+\left[\frac{\alpha_{04}\cdot x}{1}+\frac{\alpha_{24}\cdot x^3}{3}+\frac{\alpha_{44}\cdot x^5}{5}+\frac{\alpha_{64}\cdot x^7}{7}+\frac{\alpha_{84}\cdot x^9}{9}+\frac{\alpha_{104}\cdot x^{11}}{11}\right]\cdot W_4+$$

$$+\left[\frac{\alpha_{06}\cdot x}{1}+\frac{\alpha_{26}\cdot x^3}{3}+\frac{\alpha_{46}\cdot x^5}{5}+\frac{\alpha_{66}\cdot x^7}{7}+\frac{\alpha_{86}\cdot x^9}{9}+\frac{\alpha_{106}\cdot x^{11}}{11}\right]\cdot W_6+$$

$$+\left[\frac{\alpha_{08}\cdot x}{1}+\frac{\alpha_{28}\cdot x^3}{3}+\frac{\alpha_{48}\cdot x^5}{5}+\frac{\alpha_{68}\cdot x^7}{7}+\frac{\alpha_{88}\cdot x^9}{9}+\frac{\alpha_{108}\cdot x^{11}}{11}\right]\cdot W_8+$$

$$+\left[\frac{\alpha_{010}\cdot x}{1}+\frac{\alpha_{210}\cdot x^3}{3}+\frac{\alpha_{410}\cdot x^5}{5}+\frac{\alpha_{610}\cdot x^7}{7}+\frac{\alpha_{810}\cdot x^9}{9}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_{1010}\cdot x^{11}}{11}\right]\cdot W_{10} \qquad (8b)$$

Podobnie jak poprzednio, współczynniki w nawiasach nie zależą od obciążenia i od sprężenia i mogą zostać łatwo stabelaryzowane. Ostatecznie można więc wyrazić siłę poprzeczną pochodzącą od odporu podłoża wzorem:

$$Q(x) = a\sum_{k=o}^{5} q_{2k}\cdot W_{2k} \qquad (8c)$$

Nie chcąc nadmiernie powiększać objętości pracy, tablic zawierających współczynniki q_{2k} nie zamieszcza się. Znając obciążenie i odpór podłoża obliczymy siły poprzeczne.

4. Momenty zginające

$$M_{(x)} = a^2\iint p(x)dx = a^2\iint \sum_{n=o}^{5} a_{2n}\cdot x^{2n} =$$

$$= a^2\sum_{n=o}^{5}\frac{a_{2n}}{(2n+1)\cdot(2n+2)}\cdot x^{2n+2} + Mo$$

M_o stanowi tutaj wartość momentu zginającego od odporu podłoża w środku belki (x = 0). Wykorzystując warunek brzegowy (moment zginający na końcach belki równa się zeru) uzyskuje się na M_o wyrażenie:

$$M_o = -a^2\left(\frac{a_o}{2}+\frac{a_2}{12}+\frac{a_4}{30}+\frac{a_6}{56}+\frac{a_8}{90}+\frac{a_{10}}{132}\right) \qquad (9)$$

Po rozpisaniu wyrażenia pod znakiem sumy i wprowadzeniu ostatniego wzoru na M_o uzyskuje się

$$M(x) = -a^2\left[\frac{a_0}{2}(1-x^2)+\frac{a_2}{12}(1-x^4)+\frac{a_4}{30}(1-x^6)+\frac{a_6}{56}(1-x^8)+\right.$$

$$\left.+\frac{a_8}{90}(1-x^{10})+\frac{a_{10}}{132}(1-x^{12})\right], \tag{10a}$$

co po wprowadzeniu zależności (6b) i uporządkowaniu względem W_{2k} daje na moment zginający od odporu podłoża:

$$-\frac{1}{a^2}M(x) =$$

$$= \left(\frac{\frac{\alpha_{00}}{2}}{1-x^2}+\frac{\frac{\alpha_{20}}{12}}{1-x^4}+\frac{\frac{\alpha_{40}}{30}}{1-x^6}+\frac{\frac{\alpha_{60}}{56}}{1-x^8}+\frac{\frac{\alpha_{80}}{90}}{1-x^{10}}+\frac{\frac{\alpha_{100}}{132}}{1-x^{12}}\right)W_0+$$

$$+\left(\frac{\frac{\alpha_{02}}{2}}{1-x^2}+\frac{\frac{\alpha_{22}}{12}}{1-x^4}+\frac{\frac{\alpha_{42}}{30}}{1-x^6}+\frac{\frac{\alpha_{62}}{56}}{1-x^8}+\frac{\frac{\alpha_{82}}{90}}{1-x^{10}}+\frac{\frac{\alpha_{102}}{132}}{1-x^{12}}\right)W_2+$$

$$+\left(\frac{\frac{\alpha_{04}}{2}}{1-x^2}+\frac{\frac{\alpha_{24}}{12}}{1-x^4}+\frac{\frac{\alpha_{44}}{30}}{1-x^6}+\frac{\frac{\alpha_{64}}{56}}{1-x^8}+\frac{\frac{\alpha_{84}}{90}}{1-x^{10}}+\frac{\frac{\alpha_{104}}{132}}{1-x^{12}}\right)W_4+$$

$$+\left(\frac{\frac{\alpha_{06}}{2}}{1-x^2}+\frac{\frac{\alpha_{26}}{12}}{1-x^4}+\frac{\frac{\alpha_{46}}{30}}{1-x^6}+\frac{\frac{\alpha_{66}}{56}}{1-x^8}+\frac{\frac{\alpha_{86}}{90}}{1-x^{10}}+\frac{\frac{\alpha_{106}}{132}}{1-x^{12}}\right)W_6+ \tag{10b}$$

$$+\left(\frac{\frac{\alpha_{08}}{2}}{1-x^2}+\frac{\frac{\alpha_{28}}{12}}{1-x^4}+\frac{\frac{\alpha_{48}}{30}}{1-x^6}+\frac{\frac{\alpha_{68}}{56}}{1-x^8}+\frac{\frac{\alpha_{88}}{90}}{1-x^{10}}+\frac{\frac{\alpha_{108}}{132}}{1-x^{12}}\right)W_8+$$

$$+\left(\frac{\frac{\alpha_{010}}{2}}{1-x^2}+\frac{\frac{\alpha_{210}}{12}}{1-x^4}+\frac{\frac{\alpha_{410}}{30}}{1-x^6}+\frac{\frac{\alpha_{610}}{56}}{1-x^8}+\frac{\frac{\alpha_{810}}{90}}{1-x^{10}}+\frac{\frac{\alpha_{1010}}{132}}{1-x^{12}}\right)W_{10}$$

Tablica 7

Wartości współczynnika m_0

t' \ x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0	+0,461561	+0,443894	+0,390648	+0,300972	+0,172800	0
2	+0,444024	+0,427668	+0,378057	+0,293459	+0,170293	0
5	+0,419862	+0,405304	+0,360691	+0,283083	+0,166825	0
10	+0,384447	+0,372513	+0,335190	+0,267720	+0,161716	0
20	+0,327551	+0,319786	+0,294102	+0,243126	+0,153410	0
50	+0,221370	+0,221137	+0,216657	+0,196079	+0,137377	0
100	+0,135924	+0,141231	+0,152746	+0,156162	+0,123334	0
200	+0,067309	+0,076028	+0,098244	+0,119945	+0,109706	0
500	+0,015886	+0,024399	+0,048737	+0,081081	+0,092609	0

Tablica 8

Wartości współczynnika m_2

t' \ x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
2	-0,043317	-0,040224	-0,031549	-0,019173	-0,006562	0
5	-0,041572	-0,038256	-0,030034	-0,018281	-0,006269	0
10	-0,038058	-0,035370	-0,027811	-0,016970	-0,005838	0
20	-0,033024	-0,030196	-0,024234	-0,014860	-0,005144	0
50	-0,023585	-0,022011	-0,017516	-0,010891	-0,003837	0
100	-0,015892	-0,014901	-0,012023	-0,007639	-0,002764	0
200	-0,009514	-0,008998	-0,007472	-0,004904	-0,001854	0
500	-0,004194	-0,004044	-0,003530	-0,002520	-0,001042	0

Tablica 9

Wartości współczynnika m_4

t' / x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
2	-0,033128	-0,031541	-0,026565	-0,017984	-0,007020	0
5	-0,031408	-0,029952	-0,025336	-0,017256	-0,006780	0
10	-0,028884	-0,027617	-0,023530	-0,016183	-0,006423	0
20	-0,024826	-0,023864	-0,020623	-0,014456	-0,005852	0
50	-0,017232	-0,016830	-0,015156	-0,011188	-0,004764	0
100	-0,011081	-0,011114	-0,010664	-0,008446	-0,003844	0
200	-0,006056	-0,006400	-0,006873	-0,006096	-0,003020	0
500	-0,002064	-0,002542	-0,003528	-0,003806	-0,002160	0

Tablica 10

Wartości współczynnika m_6

t' / x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
2	-0,024121	-0,023119	-0,020000	-0,016089	-0,006213	0
5	-0,022840	-0,021934	-0,019264	-0,013840	-0,006062	0
10	-0,019942	-0,019178	-0,016717	-0,012024	-0,005685	0
20	-0,017943	-0,017064	-0,015562	-0,011744	-0,005335	0
50	-0,012302	-0,012172	-0,011482	-0,092800	-0,004510	0
100	-0,007742	-0,007922	-0,008118	-0,007224	-0,003803	0
200	-0,004794	-0,005181	-0,005995	-0,006046	-0,003594	0
500	-0,001182	-0,001620	-0,002714	-0,003554	-0,002424	0

Tablica 11

Wartości współczynnika m_8

t' \ x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
2	-0,016748	-0,016102	-0,014104	-0,010501	-0,004897	0
5	-0,015848	-0,015270	-0,013460	-0,010118	-0,004770	0
10	-0,014530	-0,014050	-0,012513	-0,009551	-0,004581	0
20	-0,012410	-0,012087	-0,010987	-0,008638	-0,004277	0
50	-0,008454	-0,008416	-0,008114	-0,006904	-0,003694	0
100	-0,005261	-0,005435	-0,005774	-0,005443	-0,003189	0
200	-0,002682	-0,002995	-0,003731	-0,004137	-0,002718	0
500	-0,000710	-0,001040	-0,001916	-0,002786	-0,002172	0

Tablica 12

Wartości współczynnika m_{10}

t' \ x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
2	-0,010236	-0,009859	-0,008696	-0,006611	-0,003268	0
5	-0,009682	-0,009346	-0,008299	-0,006373	-0,003189	0
10	-0,008870	-0,008594	-0,007713	-0,006023	-0,003072	0
20	-0,007611	-0,007382	-0,006771	-0,005457	-0,002883	0
50	-0,005122	-0,005118	-0,004996	-0,004382	-0,002518	0
100	-0,003159	-0,003183	-0,003530	-0,003471	-0,002200	0
200	-0,001578	-0,001784	-0,002283	-0,002649	-0,001896	0
500	-0,000386	-0,000590	-0,001152	-0,001782	-0,001526	0

Oznaczając wyrażenia w nawiasach przez m_{2k}:

$$M(x) = - a^2 \cdot \sum_{k=o}^{5} m_{2k} \cdot W_{2k} \tag{10c}$$

Współczynniki m_{2k} zestawiono w tablicach od 7 do 12.

5. Wyrazy wolne W_{2k}

Krótkiego omówienia wymaga tu jeszcze sprawa obliczenia wyrazów wolnych W_{2k} w równaniach układu (4). Jak już zaznaczono wyrazy te w przypadku belki sprężonej zależą od obciążenia zewnętrznego i od sprężenia. Można je wyrazić jako sumę dwóch składników:

$$W_{2k} = W_{2k(P)} + W_{2k(S)},$$

z których jeden ($W_{2k(P)}$) ujmuje wpływ obciążenia zewnętrznego, a drugi ($W_{2k(S)}$) wpływ sprężenia.

$W_{2k(P)}$ można obliczyć na podstawie wzorów podanych przez Gorbunowa-Posadowa we wspomnianej już pracy dotyczącej obliczania belek na podłożu sprężystym. W celu obliczenia $W_{2k(S)}$ można nieznaną funkcję wyrażającą mimośród cięgna sprężającego (zmienny na długości belki) przedstawić przy pomocy wielomianu potęgowego

$$e_{(x)} = \sum_{n=o}^{m} e_{2n} x^{2n} \tag{11}$$

Zmienność siły sprężającej wyrażamy również wielomianem o postaci

$$S_{(x)} = \sum_{n=o}^{1} s_{2n} x^{2n} \tag{12a}$$

Przyjmując dla siły sprężającej aproksymację wielomianem drugiego stopnia jako wystarczająco dokładną otrzymamy:

$$S_{(x)} = s_o + s_2 x^2 \tag{12b}$$

Mając tak określone parametry sprężania znajdujemy ugięcie belki spowodowane sprężeniem ze wzoru:

$$E_1 J_1 w(x) = - a^2 \sum_{n=o}^{m} \frac{s_o e_{2n} + s_2 e_{2n-2}}{(2n+1)(2n+2)} x^{2n+2} \qquad (13)$$

Wzór (13) daje podstawę do wyznaczenia poszukiwanej części wyrazów wolnych pochodzących od sprężania - $W_{2k(S)}$. Wyrazy te obliczymy z ogólnego wzoru

$$W_{2k(S)} = - \frac{t'}{a^2} \cdot \frac{(s_o \cdot e_{2k-2} + s_2 \cdot e_{2k-4})}{2k \cdot (2k-1)} \qquad (14)$$

Jak widać ze wzoru (14) wyrazy $W_{2k(S)}$ wyrażają się przy pomocy współczynników e_{2n}, s_o i s_2.

Jeżeli te współczynniki będą znane, to bez trudu potrafimy obliczyć wartości składowych wyrazów wolnych pochodzących od sprężenia ($W_{2k(S)}$), co w zestawieniu ze znanymi wartościami $W_{2k(P)}$ pozwala na określenie interesujących nas wielkości statycznych i geometrycznych w danej belce. Jeżeli zaś zadaniem naszym będzie dobranie siły sprężającej i charakteru zmienności mimośrodu dla belki o zadanym obciążeniu, to musimy w wyrazy $W_{2k(S)}$ wprowadzić nieznane współczynniki e_{2n} s_o, s_2 wyrazić przy ich pomocy wartości momentów zginających i z warunków nieprzekroczenia naprężeń w przekrojach, w których moment osiąga wartości ekstremalne, wyznaczyć najkorzystniejszy przebieg trasy cięgna sprężającego przy minimalnej wartości siły sprężającej.
Ten tok postępowania będzie bliżej zilustrowany na przykładzie przeliczonym w punkcie 6.

6. Przykład

Rozpatrzmy belkę prostokątną o długości l=10,0 m obciążoną dwoma siłami skupionymi.

Połowa długości belki a = 5,0 m
Połowa szerokości belki b = 0,5 m $\Big\}$ $\frac{a}{b} = 10$

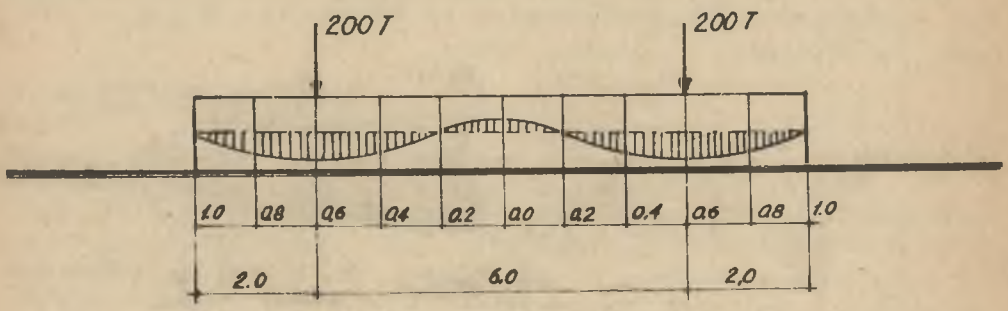
Wysokość belki h = 1,0 m

Moduł sprężystości betonu E_1 = 140.000 kG/cm^2

Moduł sprężystości gruntu E_o = 120 kG/cm^2.

Dla gruntu przyjęto $\nu_o = 0$.

Poszukujemy wartości siły sprężającej S oraz takiej trasy cięgna, żeby moment zginający na całej długości belki był równy zeru. Znając przebieg momentu zginającego w belce niesprężonej możemy przypuszczać, że poszukiwana trasa cięgna będzie miała kształt przedstawiony na rysunku 2.



Rys. 2

Zgodnie ze wzorem (11) opisujemy mimośród kabla równaniem

$$e_{(x)} = e_o + e_2x^2 + e_4x^4 + e_6x^6$$

Z warunków:

dla $x = 0,0$ $\quad e = \varepsilon h \quad$ i $\quad \frac{de_{(x)}}{dx} = 0$

dla $x = \pm 0,6$ $\quad e = +0,4h \quad$ i $\quad \frac{de_{(x)}}{dx} = 0$

dla $x = \pm 1,0$ $\quad e = 0$

można wyznaczyć e_o, e_2, e_4, e_6. Wstawiając konkretne wartości liczbowe uzyskamy:

$e_o = \varepsilon$

$e_2 = 2,19 - 5.446\varepsilon,$

$e_4 = -3,45 + 9,056\varepsilon,$

$e_6 = 1,26 - 4,610\varepsilon.$

Ze względu na straty siły sprężającej wywołane tarciem przyjęto zmienność tej siły określoną równaniem:

$$s_{(x)} = s_o + s_2 x^2,$$

przy czym założono

$$s_o = 0{,}8S,$$

$$s_2 = 0{,}2S.$$

Dla danej belki wskaźnik t' ma wartość:

$$t' = \frac{\pi . E_o . a^4}{2(1-\nu_o^2)E_1 J_1} = \frac{\pi . E_o . a^4 . 6}{2(1-\nu_o^2)E_1 bh^3} = \frac{6\pi E_o}{2E_1(1-\nu_o^2)} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a^3}{h^3} =$$

$$= \frac{30\pi E_o}{E_1(1-\nu_o^2)} \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^3,$$

co po wstawieniu konkretnych danych liczbowych daje

$$t' = 10$$

W oparciu o wzory podane w pracy [1] na str. 304 oraz o tablicę zamieszczoną na str. 339 tej samej pracy obliczamy $W_{2k(P)}$.

$$W_{0(P)} = 40{,}000,$$

$$W_{2(P)} = -83{,}864,$$

$$W_{4(P)} = +26{,}312,$$

$$W_{6(P)} = -71{,}376,$$

$$W_{8(P)} = +83{,}880,$$

$$W_{10(P)} = -30{,}952.$$

Wyrazy $W_{2k(S)}$ obliczymy na podstawie wzoru (14)

$$W_{0(S)} = 0,$$

$$W_{2(S)} = -\frac{1}{25}\, 4{,}0S\varepsilon,$$

$$W_{4(S)} = -\frac{1}{25}(1,4600S - 3,4600S\varepsilon),$$

$$W_{6(S)} = \frac{1}{25}(0,7750S - 2,0500S\varepsilon),$$

$$W_{8}(S) = -\frac{1}{25}(0,0568S - 0,3350S\varepsilon),$$

$$W_{10(S)} = -\frac{1}{25}(0,0280S - 0,1024S\varepsilon).$$

Poszukiwane wartości S oraz ε wyznaczymy z warunków zerowania się momentów w punktach x = 0,0 i x = 0,6.
Momenty od obciążenia zewnętrznego mają wartość:

$$M_{0,0(P)} = M_{0,2(P)} = M_{0,4(P)} = M_{0,6(P)} = 400 \text{ Tm}$$

$$M_{0,8(P)} = 200 \text{ Tm},$$

$$M_{1,0(P)} = 0 \text{ Tm}$$

Momenty od sprężenia wynoszą:

$$M_{0,0(S)} = 0,8\, S\varepsilon h,$$

$$M_{0,6(S)} = 0,872\, S \cdot 0,4h = 0,349Sh.$$

W oparciu o wzór (10c) oraz o tablice 7 - 12 wyznaczymy wartość momentu zginającego od odporu podłoża. Uzyskamy w ten sposób:

$$\bar{M}_{0,0} = -457 - 0,02779S - 0,08740S\varepsilon,$$

$$\bar{M}_{0,6} = -299 - 0,01502S - 0,09745\varepsilon.$$

Sumując momenty od obciążenia zewnętrznego $[M_{(P)}]$, od sprężenia $[M_{(S)}]$ i od odporu gruntu $[\bar{M}]$, otrzymamy na sumaryczne momenty:

$$M_{0,0} = -57 + 0,71260S\varepsilon - 0,02779S,$$

$$M_{0,6} = +101 + 0,33398S\varepsilon - 0,09745S.$$

Stawiając warunek by $M_{0,0} = M_{0,6} = 0$ uzyskujemy układ dwóch równań o dwóch niewiadomych S i ε. Rozwiązanie tego układu daje:

$$\varepsilon = -0,2445.$$

$$S = -282T.$$

Rozwiązanie to prowadzi do trasy cięgna o równaniu

$$e_{(x)} = -0{,}2445 + 3{,}5215x^2 - 5{,}6642x^4 + 2{,}3871x^6$$

Zmienność siły sprężającej opisuje równanie

$$S_{(x)} = -225{,}6 - 56{,}4x^2$$

Tablica 13

Lp.	Wyszczególnienie	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1	Odpór podłoża [T/m²] w belce niesprężonej	34,6					
2	Odpór podłoża [T/m²] w belce sprężonej	34,9	35,0	35,8	38,1	42,6	58,2
3	Moment zginający [Tm] w belce niesprężonej	-57,2	-39,9	+12,4	+101,4	+28,8	0,0
4	Moment zginający w belce sprężonej [Tm]	0,0	-12,3	-28,2	+4,6	-52,5	0,0
5	Mimośród [m]	-0,245	-0,113	+0,184	+0,401	+0,315	0,000
6	Poprawka mimośrodu [m]	0,000	-0,054	-0,120	-0,001	-0,201	0,000
7	Mimośród poprawiony [m]	-0,245	-0,167	+0,064	+0,400	+0,114	0,000
8	Moment zginający w belce sprężonej z poprawionym mimośrodem [Tm]	-4,3	+1,3	+0,9	+2,3	-1,5	0,0

W tablicy 13 przeprowadzono obliczenie momentu zginającego i odporu podłoża w sześciu przekrojach poprzecznych belki. Dla porównania podano odpór i moment zginający w belce niesprężonej. Ponieważ obliczenie wykazało, że moment zginający w belce sprężonej (rubryka 4) ma w niektórych przekrojach dość znaczne wartości, zaszła potrzeba skorygowania obliczonej trasy cięgna sprężającego. Poprawkę mimośrodu obliczono dzieląc wartość momentu w belce sprężonej (rubryka 4) przez odpowiednią dla danego przekroju wartość siły sprężającej. Nie jest to ścisłe, ale daje bardzo dobre przybliżenie.

W rubryce 8 zestawiono momenty zginające w belce sprężonej przy poprawionym mimośrodzie cięgna.
Dalsze poprawianie mimośrodu (wobec nieuniknionych niedokładności, na które już zwrócono uwagę) jest nieuzasadnione. Można więc uznać, że siła S = 282T (po stratach reologicznych) poprowadzona na mimośrodzie opisanym w rubryce 7 tablicy 13 zapewnia zerowanie się momentu zginającego na całej długości belki.

7. Wnioski końcowe

Przedstawione tutaj wywody zdają się świadczyć o możliwości łatwego ujęcia w zależności matematyczne pracy belek sprężonych spoczywających na sprężystym podłożu. Oparcie analizy matematycznej o zasady rachunku krakowianowego doprowadziło do uzyskania bardzo dogodnych w użyciu wzorów i tablic. Tablice te mogą być zastosowane do obliczania belek o stosunku połowy długości do połowy szerokości $\bar{\alpha} = \frac{a}{b} = 10$ przy dowolnym symetrycznym obciążeniu. Dodatkową ich zaletą jest fakt że mogą one być wykorzystane przy obliczaniu tak belek sprężonych jak i niesprężonych. Opracowanie identycznych tablic dla innych wartości wskaźnika $\bar{\alpha}$ nie nastręcza żadnych trudności. Również łatwo (w oparciu o przyjęty w niniejszej pracy tok postępowania) można opracować tablice dla obciążenia antymetrycznego.

Trudno w tej chwili poszukiwać dróg praktycznego zastosowania niniejszych rozważań. Istnieje w omawianej dziedzinie zbyt wiele problemów nierozwiązanych by można było autorytatywnie rozsądzać o możliwości zastosowania sprężenia do konstrukcji fundamentowych. Nie można oczekiwać by problemy te dały się rozwiązać na drodze wyłącznie teoretycznych dociekań. Grunt budowlany jest materiałem o tak różnorodnych cechach, że zawierzanie jakimkolwiek teoriom nie popartym wynikami wnikliwych badań byłoby bardzo ryzykowne. Tym niemniej wydaje się, że sprężenie może utorować sobie drogę do fundamentów jako środek ich zabezpieczenia przed wpływami szkód górniczych. Dotyczy to zarówno fundamentów budowli nowowznoszonych jak i istniejących lecz wymagających wzmocnienia. W tym aspekcie niniejsza publikacja może stanowić pomost dla dalszych szczegółowych studiów nad tym problemem.

LITERATURA

[1] Gorbunow-Posadow M.I.: Obliczanie konstrukcji na podłożu sprężystym - Budownictwo i Architektura 1956.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ БАЛКИ ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Содержание

В этой статьии представлено формулы для определения реакции основания и изгибающих моментов в любой симметрично нагруженной предварительно напряженной балке. Опираясь на этих формулах и на некоторых правилах краковянного исчисления приготовлено таблицы, которые могут быть использованы в проектировании так предварительно напряженных, как и ненапряженных балок. Поэтому эти таблицы могут быть считаны обобщением диаграмм и таблиц составленых Горбуновым-Посадовым.

Примерь приложенный на конце статьии обясняет метод использования этих таблиц.

DESIGNING OF POST-TENSIONED BEAM RESTING ON THE ELASTIC FOUNDATION

Summary

The formulas for determination of subgrade reaction and bending moments in any symmetricaly loaded post-tensioned beam are performed in this work. Basing on this formulas and on some theorems of Cracovian's analysis have been prepared the tables. which can be used for designing both presstresed and not-presstresed beams resting on the elastic foundation. It can be considered as a generalization of tables and diagrams given by Gorbunow-Posadow in his works. The example given in the end of the paper performs how this tables can be used.