ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1965
Seria: BUDOWNICTWO z. 16 Nr kol. 134

CZESŁAW LEWINOWSKI, MIECZYSŁAW WĘGRZYN

ZASTOSOWANIE RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA I TEORII STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ DO OCENY WYNIKÓW BADAŃ WYTRZYMAŁOŚCI BETONU

__Streszczenie.__ W artykule omówiono sposób określenia wytrzymałości betonu przy zastosowaniu rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Przyjęto hipotezę, że wytrzymałość betonu danego elementu ma rozkład $N(\mu,\sigma)$ a następnie zweryfikowano ją przy pomocy kryterium χ^2. W badanych przypadkach nie było podstaw do odrzucenia tej hipotezy. W dalszym ciągu obliczono przedziały ufności wytrzymałości betonu badanych elementów przy prawdopodobieństwie $p=1-\alpha$.

1. __Wstęp__

Wytrzymałość betonu zależy od wielu czynników stosunkowo trudnych do uchwycenia w procesie wytwarzania. Do czynników tych możemy między innymi zaliczyć: jakość składników betonu, wzajemny stosunek tych składników, sposób zagęszczenia i pielęgnacji, wpływ dodatków uszlachetniających itp. W rezultacie otrzymujemy materiał niejednorodny z punktu widzenia jego wytrzymałości. Ta niejednorodność powoduje, że wytrzymałość jest na ogół różna w poszczególnych punktach danego elementu i może być równa projektowanej marce betonu, większa lub mniejsza.

Chcąc określić rzeczywistą wytrzymałość betonu całego elementu przeprowadza się badania na pobranych próbkach (metoda niszcząca) lub określa się jego wytrzymałość w dowolnie obranych punktach (metoda nieniszcząca np. przy pomocy sklerometru Schmidta).

Stosując metody oparte na rachunku prawdopodobieństwa i statystyce matematycznej możemy określić rozkład wytrzymałości betonu w całym elemencie (lub konstrukcji) na podstawie w/w badań. Znając rozkład wytrzymałości betonu badanych próbek, możemy określić średnią wytrzymałość betonu całego elementu z dowolnie obranym prawdopodobieństwem.

W dalszym ciągu możemy obliczyć odchylenie standardowe od średniej wytrzymałości, wariancję itd.

W niniejszym artykule przedstawiono sposób postępowania przy stosowaniu omawianych metod na przykładzie określenia wytrzymałości betonu płyt panwiowych hali automatyzacji ZKMPW w Zabrzu. Metody te można stosować również do opracowywania wyników innych badań.

2. Wytrzymałość betonu na ściskanie jako zmienna losowa o rozkładzie normalnym $(N_{(\mu,\sigma)})$

Wytrzymałość betonu na ściskanie jest zmienną losową i oznaczymy ją przez y, zaś zbiór wszystkich wartości $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ tej zmiennej nazywamy populacją. Zamiast badać całą zbiorowość zmiennej y czyli populację, badamy jej określoną część, zbiór jednostek wybranych z populacji czyli, próbę.

Tablica 1

Obliczenie charakterystyk $\bar{y}$, s^2, s dla szeregu rozdzielczego wyników badania wytrzymałości betonu

Lp.	Przedziały klasowe y_i w kG/cm^2	Liczebność empiryczna n_i	Średnia przedz. klasowego $\bar{y}_i$ w kG/cm^2	z	$z \cdot n_i$	$z^2 \cdot n_i$
1	180 ÷ 210	1	195	-5	-5	25
2	210 ÷ 240	1	225	-4	-4	16
3	240 ÷ 270	2	255	-3	-6	18
4	270 ÷ 300	1	295	-2	-2	4
5	300 ÷ 330	4	315	-1	-4	4
6	330 ÷ 360	4	345 = a	0	0	0
7	360 ÷ 390	10	375	1	10	10
8	390 ÷ 420	9	405	2	18	36
9	420 ÷ 450	4	435	3	12	36
10	450 ÷ 480	3	465	4	12	48
11	480 ÷ 510	1	495	5	5	25
	Sumy	N=40			+36	222

$$\bar{y} = 345 + 30\,\frac{36}{40} = 372 \text{ kG/cm}^2 \quad \text{(wg wzoru nr 3)}$$

$$s^2 = 30^2\left[\frac{222}{40} + \left(\frac{36}{40}\right)^2\right] - \frac{30^2}{12} = 5640 \text{ kG}^2/\text{cm}^4 \quad \text{(wg wzoru nr 4)}$$

$$s = \sqrt{5640} \cong 75{,}0 \text{ kG/cm}^2 \quad \text{(wg wzoru nr 4a)}$$

Tablica 2

Obliczenie charakterystyk $\bar{y}$, s^2, s szeregu rozdzielczego odczytów sklerometru

Lp.	Przedziały klasowe y_i działki odczytów	Liczebność empiryczna n_i	Średnia przedz. klasowego $\bar{y}_i$	z	$z.n_i$	$z^2.n_i$
1	12 ÷ 13	1	12,5	-6	-6	36
2	13 ÷ 14	2	13,5	-5	-10	50
3	14 ÷ 15	5	14,5	-4	-20	80
4	15 ÷ 16	3	15,5	-3	-9	27
5	16 ÷ 17	3	16,5	-2	-6	6
6	17 ÷ 18	4	17,5	-1	-4	4
7	18 ÷ 19	7	18,5=a	0	0	0
8	19 ÷ 20	6	19,5	1	6	6
9	20 ÷ 21	4	20,5	2	8	16
10	21 ÷ 22	3	21,5	3	9	27
11	22 ÷ 23	2	22,5	4	8	32
12	23 ÷ 24	1	23,5	5	5	25
	Sumy	41			-19	309

$\bar{y} = 18,5 - 1\,\frac{19}{41} = 18,04$ $\qquad s = \sqrt{7,68} = 2,77$

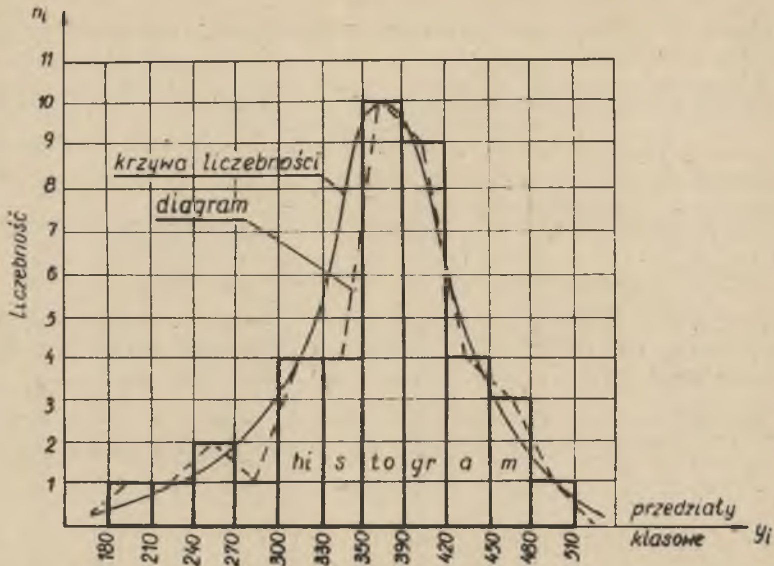
$$s^2 = 1^2\left[\frac{309}{41} + \left(\frac{-19}{41}\right)^2\right] - \frac{1^2}{12} = 7,68$$

Na podstawie badania rozkładu zmiennej y w próbie staramy się scharakteryzować rozkład tej zmiennej w populacji. Przez rozkład zmiennej y rozumie się zespół prawdopodobieństw, jakie może przybierać ta zmienna dla wszystkich możliwych wartości y.

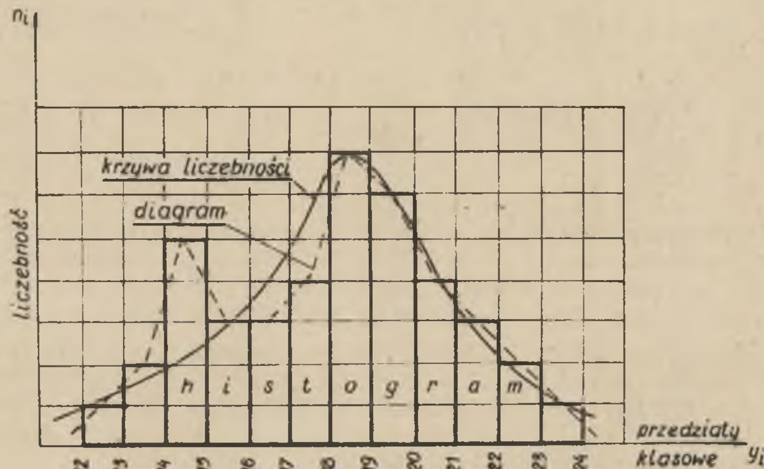
Dane orientacyjne o rozkładzie zmiennej y w próbie uzyskujemy tworząc odpowiedni szereg rozdzielczy. Szereg rozdzielczy składa się z dwóch kolumn. W kolumnie drugiej tablic nr 1 i nr 2 podane są przedziały klasowe a w kolumnie trzeciej liczebność poszczególnych przedziałów klasowych.

Liczba przedziałów klasowych oraz ich wspólna długość zależy od najmniejszej i największej wartości zmiennej y_i czyli od tzw. rozstępu, który możemy obliczyć ze wzoru

$$h = y_{imax} - y_{imin} \tag{1}$$



Rys. 1. Histogram i diogram dla szeregu rozdzielczego z tablicy nr 1



Rys. 2. Histogram i diogram dla szeregu rozdzielczego z tablicy nr 2

Liczbą przedziałów klasowych oraz ich długość winna spełniać warunek

$$R = c \cdot h \tag{2}$$

gdzie:

c - liczba przedziałów klasowych,
h - wspólna długość przedziałów klasowych.

Poprawnie zbudowany szereg rozdzielczy winien mieć liczbę "c" zawartą pomiędzy 10 a 30, zaś długość przedziału klasowego "h" winna być liczbą prostą np. 0,1; 0,2; 1, 2, 10, 20, 30 itp.

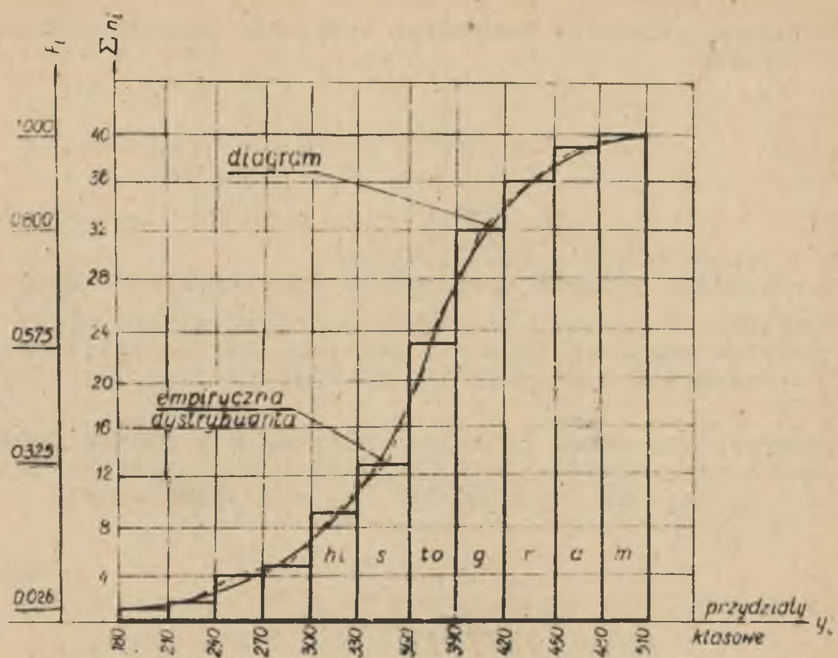
Geometryczny obraz rozkładu zmiennej y w próbie możemy otrzymać w przybliżeniu, przedstawiając szereg rozdzielczy w postaci histogramu, diagramu lub krzywej liczebności.

Tablica 3

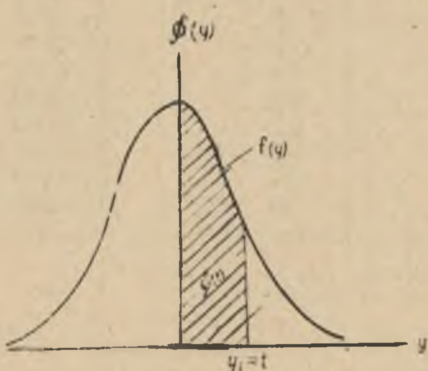
Obliczenie empirycznej dystrybuanty dla szeregu rozdzielczego z tablicy 1

Lp.	Przedział klasowy y_i w kG/cm^2	Liczebność empiryczna n_i	$\sum_{i=1}^{i=k} n_i$	empiryczna destybuanta F_i
1	180 ÷ 210	1	1	0,0250
2	210 ÷ 240	1	2	0,0500
3	240 ÷ 270	2	4	0,1000
4	270 ÷ 300	1	5	0,1250
5	300 ÷ 330	4	9	0,2250
6	330 ÷ 360	4	13	0,3250
7	360 ÷ 390	10	23	0,5750
8	390 ÷ 420	9	32	0,8000
9	420 ÷ 450	4	36	0,9000
10	450 ÷ 480	3	39	0,9750
11	480 ÷ 520	1	40	1,0000

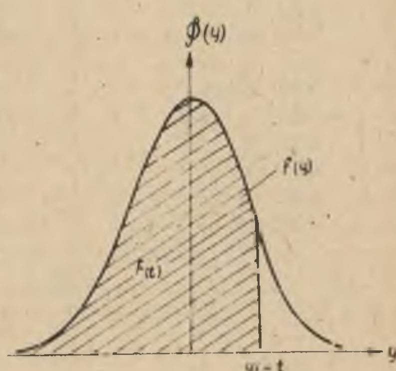
gdzie $F_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=k} n_i$



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Na rys. 1 i 2 przedstawiono histogram i diagram dla szeregu rozdzielczego z tabl. 1 i tabl. 2 (kolumna 2 i 3). Jak wynika z rysunku 1 i 2 rozkład zmiennej jest zbliżony do rozkładu $N_{(\mu,\sigma)}$.

Empiryczną dystrybuantę dla szeregu rozdzielczego z tabl. 1 obliczono w tabl. 3.

Na rysunku 3 przedstawiono histogram i diagram kumulacyjnego szeregu rozdzielczego z tabl. 3.

Mając szereg rozdzielczy dla zmiennej y, możemy obliczyć charakterystyki dla tych szeregów. Charakterystykami tymi są:

$\bar{y}$ - średnia artmetyczna w próbie,
s - odchylenie standardowe w próbie,
s^2 - wariancja w próbie.

Te same charakterystyki dla populacji nazywamy parametrami i oznaczamy:

μ - średnia z populacji,
σ - odchylenie standardowe w populacji,
σ^2 - wariancja w populacji.

Oceny parametrów μ, σ i σ^2 możemy obliczyć ze wzorów:

$$\mu = \hat{\mu} = \bar{y} = a + \frac{h\sum n_i . z_i}{N} \tag{3}$$

$$\sigma^2 = \hat{\sigma}^2 = s^2 = h^2\left[\frac{\sum n_i . z_i^2}{N} - \left(\frac{\sum z_i . n_i}{N}\right)^2\right] - \frac{h^2}{12} \tag{4}$$

$$\sigma = \hat{\sigma} = s = \sqrt{h^2\left[\frac{\sum n_i . z_i^2}{N} - \left(\frac{\sum z_i . n_i}{N}\right)^2\right] - \frac{h^2}{12}} \tag{4a}$$

Wyrażenie $\frac{h^2}{12}$ nosi nazwę poprawki Sheparda. We wzorach (3) i (4) przyjęto następujące oznaczenia:

$\hat{\mu}$ - ocena średniej w populacji,
a - środek dowolnego przedziału klasowego,
$\hat{\sigma}^2$ - ocena wariancji w populacji,
h - długość przedziału klasowego,
n_i - liczebność przedziału klasowego,

$z_i = \frac{y_i - a}{h}$ - wyraża przesunięcie początku współrzędnych na osi liczbowej o wielkość "a" oraz zmniejszenie skali na tej osi w stosunku h-krotnym.

$\hat{\sigma}$ - ocena odchylenia standardowego w populacji.

Zmienna y ma rozkład normalny o średniej μ i odchyleniu standardowym σ, jeżeli jej funkcja gęstości wyrazi się wzorem

$$f_{(y)} = \frac{1}{\sigma.\sqrt{2.\pi}} e^{-\frac{(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{5}$$

a jej dystrybuanta określoną jest wzorem

$$F_{(y)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{(y_i-\mu)^2}{2.\sigma^2}} \cdot dy \tag{6}$$

Występującą we wzorze (6) całkę wylicza się z tablic podanych w podręcznikach rachunku prawdopodobieństwa. W tablicach tych podane są wartości całki

$$\phi_{(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t} e^{-\frac{y^2}{2}} . dy \tag{7}$$

Pomiędzy funkcjami $\phi_{(t)}$ i $F_{(y)}$ zachodzi związek $F_{(y)} = \phi_{(t)} + 0,50$. Całka $\phi_{(t)}$ jest równa polu ograniczonemu krzywą $f_{(y)}$, osiami współrzędnych i prostą $y_i = t$ (por. rys. 4). Całka $F_{(y)}$ jest równa polu znajdującemu się po lewej stronie prostej $y_i = t$ ograniczonemu krzywą $f_{(y)}$ i osią x-ów (por. rys. 5).

Prawdopodobieństwo $\hat{P}_{yi}$, że wartość zmiennej y o rozkładzie $N_{(\mu,\sigma)}$ jest zawarta w przedziale (y_{i1}, y_{i2}) możemy obliczyć ze wzoru

$$\hat{P}_{yi}(y_{i1} < y < y_{i2}) = \hat{P}_{yi}\left(\frac{y_{i1}-\bar{y}}{s} < \frac{y-\bar{y}}{s} < \frac{y_{i2}-\bar{y}}{s}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-\frac{t^2}{2}} . dt \tag{8}$$

gdzie:

$$u_1 = \frac{y_{i1}-\bar{y}}{s}, \quad u_2 = \frac{y_{i2}-\bar{y}}{s}$$

$\hat{P}_{yi}$ – ocena prawdopodobieństwa w populacji, że wartość zmiennej y jest zawarta w przedziale (y_{i1}, y_{i2}), Na przykład dla przedziału klasowego 390 ÷ 420 kG/cm^2 szeregu rozdzielczego z tablicy 1 otrzymamy

$$\hat{P}_{yi}\ (390 < y < 420) = \hat{P}_{yi}\ \left(\frac{390-372}{75} < \frac{y-372}{75} < \frac{420-372}{75}\right) =$$

$$= \hat{P}_{yi}\ \left(0{,}24 < \frac{y-372}{75} < 0{,}64\right)$$

Korzystając z tablic obliczamy

$$\hat{P}_{yi} = \phi(0{,}64) - \phi(0{,}24) = 0{,}2389 - 0{,}0948 = 0{,}1441$$

wtedy liczebność hipotetyczna dla tego przedziału będzie równa

$$N \cdot \hat{P}_{yi} = 40 \cdot 0{,}1441 = 5{,}76$$

Podobnie obliczymy liczebność hipotetyczną innych przedziałów.

3. Weryfikacja hipotezy statystycznej, że wytrzymałość na ściskanie ma rozkład $N_{(\mu,\sigma)}$ przy pomocy testu zgodności χ^2 (chi kwadrat)

Mając wartości zmiennej losowej y w próbie a następnie układając z niej szereg rozdzielczy, uzyskujemy rozkład empiryczny ze względu na wytrzymałość betonu na ściskanie w kG/cm^2. Krzywą rozkładu empirycznego (przy założeniu, że posiada ona rozkład normalny $N_{(\bar{y},s)}$) możemy wyrazić wzorem

$$f_{(y)} = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y_i-\bar{y})^2}{2s^2}} \tag{9}$$

W dalszym ciągu stawiamy hipotezę, że wytrzymałość betonu na ściskanie ma rozkład normalny $N_{(\mu,\sigma)}$ określony wzorem

$$f_{(y)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{10}$$

gdzie "e" jest podstawą logarytmu naturalnego, pozostałe oznaczenia jak we wzorach poprzednich.

Za miarę zgodności rozkładu empirycznego wyrażonego wzorem (9) z rozkładem $N_{(\mu,\sigma)}$ może posłużyć kryterium zgodności χ^2 obliczone ze wzoru

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{(n_i - N.\hat{P}_{yi})^2}{N.\hat{P}_{yi}} \tag{11}$$

gdzie:

$\hat{P}_{yi}$ - jest prawdopodobieństwem, wyznaczonym przez hipotetyczną dystrybuantę, że wartość zmiennej y jest zawarta w przedziale o liczebności n_i,

$N.\hat{P}_{yi}$ - hipotetyczna liczebność tego przedziału,która winna być ≥ 5.

Odpowiednie tablice statystyczne podają wartości χ^2_α odpowiadające prawdopodobieństwom $1 - \alpha$ w zależności od liczby stopni swobody "r" i poziomu istotności "α" wg relacji

$$P(\chi^2 \geq \chi^2_\alpha) = \alpha \cdot \tag{12}$$

W praktyce są najczęściej stosowane poziomy istotności: $\alpha = 0{,}05$ i $\alpha = 0{,}01$. Występujący parametr "r" w zmiennej χ^2 nosi nazwę liczby stopni swobody. Dla rozkładu empirycznego (wzór 9) liczbę stopni swobody obliczamy ze wzoru

$$r = k - L - 1 \tag{13}$$

gdzie:

k - liczba składników sumy w wyrażeniu dla χ^2,
L - liczba nieznanych parametrów wyliczonych z próby.

Dla zbadania zgodności rozkładu empirycznego (wzór 9) z rozkładem hipotetycznym (teoretycznym) wzór (10)obieramy jedną z liczb "α" i mówimy wówczas, że sprawdzamy naszą hipotezę na poziomie istotności równym obranemu "α".

Mając obrane "α" i liczbę stopni swobody "r" obliczone ze wzoru (13) odczytujemy z tablic odpowiadające im wartości χ^2_α.

Jeżeli wartość χ^2 obliczona ze wzoru (11) okaże się mniejsza od χ^2_α to hipotezę, że wytrzymałość betonu na ściskanie ma rozkład $N_{(\mu,\sigma)}$ określony wzorem (9) przyjmujemy. Innymi słowy mówiąc, nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy, że wytrzymałość betonu na ściskanie posiada rozkład $N_{(\mu,\sigma)}$.

Przy stosowaniu testu χ^2 należy sprawdzić, czy wszystkie hipotetyczne liczebności $N.\hat{P}_{yi}$ są nie mniejsze od 5. W prze-

Tablica 4

Sprawdzenie rozkładu wyników wytrzymałości betonu z rozkładem normalnym przy pomocy testu zgodności χ^2

Lp.	Przedział klasowy y_i w kG/cm^2	Liczebność empiryczna n_i		Prawdopodobieństwo $\hat{P}_{yi}$		Liczebność hipotetyczna $N.\hat{P}_{yi}$	$n_i - N.\hat{P}_{yi}$	$(n_i - N.\hat{P}_{yi})^2$	$\frac{(n_i - N.\hat{P}_{yi})^2}{N.\hat{P}_{yi}}$
1	180 ÷ 210	1		0,0102					
2	210 ÷ 240	1		0,0238					
3	240 ÷ 270	2	5	0,0477	0,1633	6,54	-1,54	2,3716	0,362
4	270 ÷ 300	1		0,0816					
5	300 ÷ 330	4		0,1192					
6	330 ÷ 360	4	8	0,1487	0,2679	10,72	-2,72	7,3984	0,689
7	360 ÷ 390		10		0,1584	6,33	+3,67	13,4689	2,112
8	390 ÷ 420		9		0,1441	5,76	+3,24	10,4976	1,820
9	420 ÷ 450	4		0,1119					
10	450 ÷ 480	3	8	0,0743	0,2292	9,17	-1,17	1,3689	0,149
11	480 ÷ 510	1		0,0430					
	Sumy	$N = 40$		$\sum_{i=1}^{i=k} \hat{P}_{yi} = 0{,}9629$		38,44			$\chi^2 = 5{,}132$

$\bar{y} = 372$ kG/cm^2 Dla $\alpha = 0{,}05$ odpowiada $\chi^2_{0,05} = 5{,}991 > \chi^2 = 5{,}132$

$s = 75$ kG/cm^2

$r = 5 - 2 - 1 = 2$

Tablica 5

Sprawdzenie rozkładu odczytów sklerometru z rozkładem normalnym przy pomocy testu zgodności χ^2

Lp.	Przedział klasowy y_i działki odczytów	Liczebność empiryczna n_i		Prawdopodobieństwo $\hat{P}_{yi}$		Liczebność hipotetyczna $N.\hat{P}_{yi}$	$n_i - N.\hat{P}_{yi}$	$(n_i - N.\hat{P}_{yi})^2$	$\frac{(n_i - N.\hat{P}_{yi})^2}{N.\hat{P}_{yi}}$
1	12 ÷ 13	1		0,0198					
2	13 ÷ 14	2	8	0,0377	0,1211	4,97	3,03	9,181	1.848
3	14 ÷ 15	5		0,0636					
4	15 ÷ 16	3	6	0,0939	0,2163	8,88	-2,88	8,294	0,933
5	16 ÷ 17	3		0,1224					
6	17 ÷ 18	3	11	0,1440	0,2866	11,75	-0,75	0,563	0,048
7	18 ÷ 19	7		0,1426					
8	19 ÷ 20	6	10	0,1266	0,2208	9,05	0,95	0,903	0,100
9	20 ÷ 21	4		0,0942					
10	21 ÷ 22	3		0,0682					
11	22 ÷ 23	2	6	0,0397	0,1288	5,27	0,73	0,533	0,101
12	23 ÷ 24	1		0,0209					
	Sumy	N = 41		$\sum_{i=1}^{i=k} P_{yi} = 0,9736$		39,92			$\chi^2 = 3,030$

$r = 5 - 2 - 1 = 2$

$\bar{y} = 18,04$

$s = 2,77$

Dla $\alpha = 0,05$ odpowiada $\chi^2_{0,05} = 5,991 > 3,030$

oraz dla $\alpha = 0,2$ $\chi^2_{0,2} = 3,219 > 3,030$

ciwnym przypadku należy przed stosowaniem testu, mniejsze przedziały szeregu rozdzielczego połączyć ze sobą tak, aby każdy przedział posiadał liczebność hipotetyczną co najmniej równą 5.

W tablicy 4 i 5 sprawdzono przy pomocy testu χ^2 zgodność rozkładu empirycznego z rozkładem normalnym $N_{(\mu,\sigma)}$ dla wytrzymałości kostkowej betonu na ściskanie. Jak wynika z tabl. 4. $\chi^2_\alpha = \chi^2_{0,05} > \chi^2$ a w tabl. 5 $\chi^2_\alpha = \chi^2_{0,10} > \chi^2$, wobec powyższego nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy, że rozkład zmiennej y jest normalny ze względu na wytrzymałość betonu.

4. Obliczenie przedziału ufności dla średniej "μ" rozkładu normalnego $(N_{(\mu,\sigma)})$ wytrzymałości betonu na ściskanie

Dla oceny dokładności z jaką średnia szeregu rozdzielczego z próby $\bar{y}$ obliczona ze wzoru (3) przedstawia wartość średnią z populacji, obliczamy przedział ufności dla średniej "μ" zmiennej y.

Przedziałem ufności dla średniej "μ" rozkładu $N_{(\mu,\sigma)}$ jest taki przedział liczbowy wyznaczony na podstawie znanych nam wytrzymałości y_i, w którym to przedziale zawarta jest rzeczywista wytrzymałość z określonym prawdopodobieństwem. Jeżeli to prawdopodobieństwo jest równe 0,95 lub 0,99 to odpowiedni przedział nazywamy 95 lub 99 procentowym.

Przedział ufności ma kształt podwójnej nierówności i wyrażamy go wzorem:

$$P\left(\bar{y}-t_\alpha\sqrt{\frac{N.s^2}{N.(N-1)}} < \mu < \bar{y} + \sqrt{\frac{N.s^2}{N(N-1)}}\, t_\alpha\right) = 1-\alpha \qquad (14)$$

gdzie:

t_α - oznacza α - procentową wartość t, którą odczytuje się z tablicy t - Studenta przy poziomie istotności "α" i r = N-i liczba stopni swobody,

$N.s^2$ - oznacza sumę kwadratów odchyleń pojedynczych wyników od średniej i może być obliczona ze wzoru

$$N.s^2 = \sum_{i=1}^{i=N} y_i^2 - N.(\bar{y})^2 \qquad (15)$$

gdzie:

N - oznacza liczebność próby,

$\bar{y}$ - średnia wytrzymałość betonu obliczona ze wzoru (3),

s^2 - wariancja szeregu rozdzielczego obliczona ze wzoru (4).

Wyrażenie

$$\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{N \cdot s^2}{N(N-1)}}$$

jest błędem standardowym średniej arytmetycznej $\bar{y}$,

zaś $\sigma_p = \sqrt{\frac{N \cdot s^2}{N - 1}}$ jest oceną błędu eksperymentalnego.

Przy liczebności próby N $\geq$ 30 przedział ufności może być obliczony ze wzoru

$$P(\bar{y} - \frac{s}{\sqrt{N}} t_\alpha < \mu = R_k < \bar{y} + \frac{s}{\sqrt{N}} t_\alpha) = 1 - \alpha \tag{16}$$

gdzie:

R_k - jest średnią wytrzymałością kostkową betonu na ściskanie w kG/cm^2.

Jeżeli oznaczymy

$$\frac{s}{\sqrt{N}} t_\alpha = L \text{ przy } N \geq 30 \text{ i } t_\alpha \sqrt{\frac{N \cdot s^2}{N(N-1)}} = L$$

przy N < 30, to przedział ufności kostkowej wytrzymałości betonu na ściskanie obliczymy ze wzoru

$$P(\bar{y} - L < \mu = R_k < \bar{y} + L) = 1 - \alpha \tag{17}$$

Chcąc obliczyć przedział ufności dla walcowej wytrzymałości betonu, należy obydwie strony nierówności podzielić przez współczynnik przeliczeniowy $m = \frac{R_w}{R_k}$.

Poniżej obliczono przedział ufności dla szeregu rozdzielczego z tabl. 1. Charakterystyki szeregu:

$N = 40$,

$\bar{y} = 372{,}0$ kG/cm^2,

$s = 75$ kG/cm^2,

$r = 40 - 1 = 39$.

Przedział ufności obliczono przy poziomie ufności $\alpha = 0{,}01$, czyli $P = 1 - \alpha = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$.

Wstawiając do wzoru (16) wartości $\bar{y}$ i s oraz odczytując z tablicy t - Studenta $t_{\alpha} = 2{,}704$ przy $\alpha = 0{,}01$ i liczbie stopni swobody r = 40 - 1 = 39 otrzymamy

$$P(372{,}0 - \frac{75}{\sqrt{40}} 2{,}704 < \mu = R_k < 372{,}0 + \frac{75}{\sqrt{40}} 2{,}704) = 0{,}99$$

stąd

$$337 \text{ kG/cm}^2 < \mu = R_k < 407 \text{ kG/cm}^2$$

Podobnie obliczamy przedział ufności dla szeregu rozdzielczego z tabl. 2.

Granice przedziału zmienności $R_{max(min)}$ zmiennej y o rozkładzie normalnym ($N_{(\mu,\sigma)}$) w całej konstrukcji lub badanym elemencie żelbetowym, możemy określić z dowolnie obranym prawdopodobieństwem $P = 1 - \alpha$, na podstawie charakterystyk uzyskanych z prób posługując się wzorem

$$R_{max(min)} = \bar{y} \pm t \cdot \sigma \tag{19}$$

Wartość t obliczamy z następującej zależności

$$0{,}50 - \phi_{(t)} = 0{,}5 \cdot (1 - P)$$

$$\phi_{(t)} = 0{,}50 - 0{,}5 \cdot (1 - P) \tag{20}$$

Znając wartość $\phi_{(t)}$ odczytujemy z tablicy rozkładu normalnego odpowiadającą jej wartość t.

Długość przedziału zmienności R_o zmiennej y wyznaczamy ze wzoru

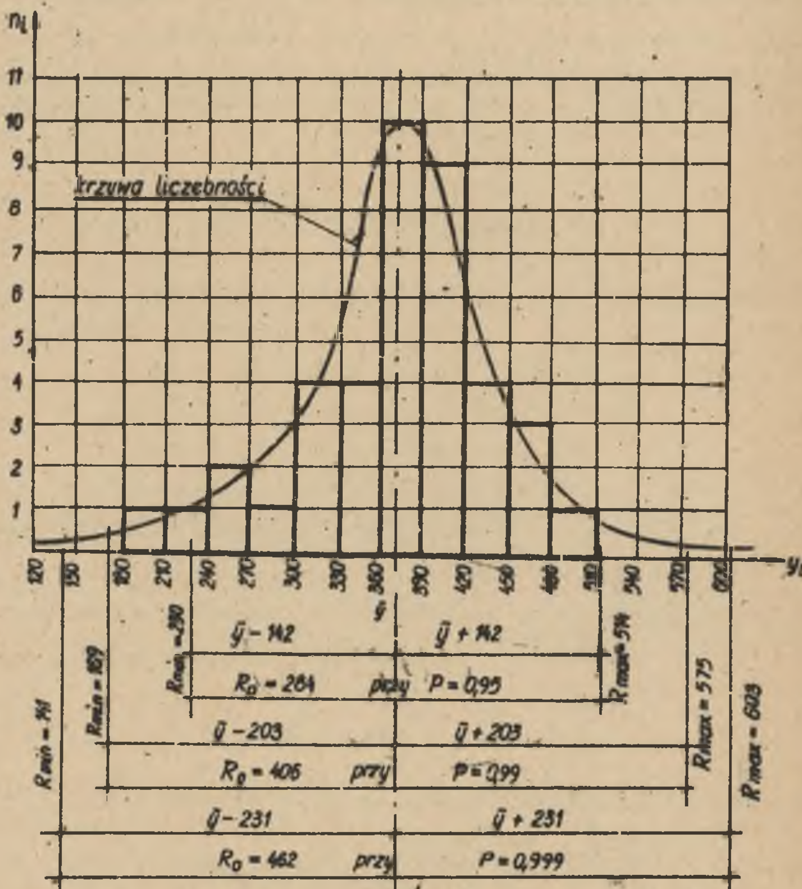
$$R_o = R_{max} - R_{min} \tag{21}$$

W tablicy 6 obliczono przy pomocy wzorów (19), (20) i (21) wartości= $\phi_{(t)}$, t, $R_{max(min)}$, $t \cdot \sigma$, R_o przy prawdopodobieństwie P = 0,95, 0,99 i 0,999 dla zmiennej y z tabl. 4. Wyniki obliczeń z tabl. 6 przedstawiono na rys. 6.

Tablica 6

Obliczenie przedziału zmienności R_o przy prawdopodobieństwie $P = 1 - \alpha$.

Lp.	$P=1-\alpha$	$\phi(t)$	t	$t \cdot \sigma$ kG/cm^2	$\bar{y}$ kG/cm^2	R_{min} kG/cm^2	R_{max} kG/cm^2	R_o kG/cm^2	R kG/cm^2
1	0,95	0,475	1,90	± 142	372	230	514	284	330
2	0,99	0,495	2,58	± 203	372	169	575	406	330
3	0,999	0,4995	3,30	± 231	372	141	603	462	330



Rys. 6. Długość przedziałów zmienności R_o

5. Zakończenie i wnioski

Opierając się na zasadach rachunku prawdopodobieństwa i teorii statystyki matematycznej możemy określić wytrzymałość całego elementu, dokonując pomiarów wytrzymałości w określonej liczbie punktów pomiarowych konstrukcji (np. przy pomocy sklerometru E. Schmidta lub pobrania określonej liczby próbek). Potrzebna jest do tego znajomość typu rozkładu wytrzymałości betonu w próbie. Znając rozkład w próbie możemy przy założeniu analogicznego rozkładu w konstrukcji obliczyć średnią wytrzymałość oraz przedział zmienności wytrzymałości całej konstrukcji z określonym prawdopodobieństwem. Należy podkreślić, że wartość średnia wytrzymałości w całej konstrukcji nie jest nam znana a wiemy tylko, że jest ona zawarta w określonym przedziale.

Prawdopodobieństwo występowania małej wytrzymałości w stosunku do wartości średniej $\bar{y}$ (którą powinna być równa projektowanej marce betonu) jak i dużej wytrzymałości jest bardzo małe (patrz tabl. 4 i 5 kolumna 4) i dąży ono do zera w miarę oddalania się tych wytrzymałości od wartości średniej. Jak wynika z przeprowadzonych obliczeń rozkład wytrzymałości betonu jest typu normalnego ($N_{(\mu,\sigma)}$).

Opisana metoda pozwala więc w stosunkowo prosty sposób, przy wykorzystaniu danych doświadczalnych, zweryfikować hipotezę statyczną w oparciu o rachunek prawdopodobieństwa.

LITERATURA

[1] Cramer H.: Metody matematyczne w statystyce PWN W-wa 1958.

[2] Fisz M.: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna PWN W-wa 1958 r.

[3] Indan F., Platt Cz.: Zbiór zadań z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej PWN Łódź W-wa 1961 r.

[4] Kuczyński W.: O wytrzymałości betonu badanej na próbkach różnych kształtów i wielkości. Archiwum Inżynierii Lądowej tom V zeszyt 2 PWN W-wa 1959 r.

[5] Oktaba W.: Elementy statystyki matematycznej i metodyka doświadczalnictwa PWN Łódź W-wa 1963 r.

[6] Orzeczenie techniczne dotyczące wytrzymałości betonu w płytach panwiowych zastosowanych w dachu hali automatyzacji Zakładów Konstr. Mech. PW w Zabrzu. Opracowanie Katedry Budowli Komunalnych Politechniki Śląskiej - niepublikowane.

[7] Vorlicek M.: Metody statystyczne określania jednorodnosci betonu, Archiwum Inżynierii Lądowej tom IV zeszyt 4. PWN W-wa 1958 r.

[8] Ziobron W.: **Probabilistyczna** postać współczynników bezpieczenstwa w kablach Freyssineta Inżynieria i Budownictwo nr 6/63.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДЛЯ ОЦЕНКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ БЕТОНА

С о д е р ж а н и е

В статье описан метод определения прочности бетона с применением теории вероятности и математической статистики. Была принята гипотеза о том, что прочность бетона данного элемента имеет распределение $N(\mu,\sigma)$ после чего она была проверена с помощью критерия χ^2 В исследуемых случаях не было оснований для того, чтобы отбросить эту гипотезу. В дальнейшей части рассчитывались доверительные интервалы прочности бетона исследуемых элементов при вероятности $p = 1 - \alpha$.

APPLICATION OF CALCULUS OF PROPABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS THEORY TO EVALUATION OF CONCRETE STRENGHT TESTS RESULTS

S u m m a r y

This paper deals with the method of determination of concrete strenght by application of calculus of propability and mathematical statistics. The adopted hypothesis was that the concrete strenght of a given element has a pattern $N_{(\mu,\sigma)}$. This hypothesis was then verified by means of criterion χ^2. The investigated examples gave no reason to reject this hypothesis. Then, there were calculated the confidence limits of concrete strenght of tested elements at propability $p=1-\alpha$.