

SZCZEPAN WYRA

ELIMINACJA WSPÓŁCZYNNIKÓW RÓWNAŃ KANONICZNYCH  
PRĘTA PRZESTRZENNEGO POPRZECZ TRANSLACJĘ  
SIĘ NADLICZBOWYCH

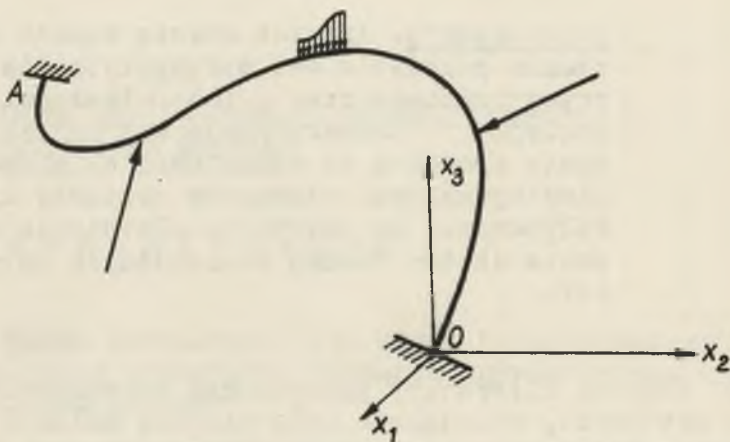
Streszczenie. Artykuł omawia sposób wyznaczenia położenia osi sprężystych dla pręta przestrzennego oraz ich własności redukcyjne. Transformacja sił na osie sprężyste prowadzi do częściowej eliminacji niediagonalnych elementów macierzy liczb wpływowych, co wpływa na ułatwienie rozwiązania układu równań kanonicznych metody sił.

1. Wśród bogatej literatury poświęconej zagadnieniom układów prętowych, stosunkowo mało miejsca zajmuje problematyka poszukiwania uproszczeń w obrębie równań liniowych, do których prowadzi obliczanie układów statycznie niewyznaczalnych. Większość opracowań w tej dziedzinie dotyczy układów płaskich i bazuje na koncepcji grupowych niewiadomych (przedstawionej m.in. w pracy [6]), czy też na wykorzystaniu własności redukcyjnych bieguna sprężystego (por. [3]). Z nielicznych prac podejmujących problematykę uproszczeń przy obliczaniu pręta przestrzennego wymienimy [2], [4], [5], [7]. Niniejszy artykuł jest przyczynkiem do powyższej tematyki i traktuje o pewnym sposobie wyznaczania położenia osi sprężystych dla pręta przestrzennego.

Transformacja niewiadomych na te osie prowadzi do częściowej redukcji niediagonalnych współczynników równań kanonicznych metody sił, a w związku z tym wpływa na ułatwienie rozwiązania układu równań. W rozważaniach zastosowano wzory transformacyjne podane w pracy [8]. Celem związku przedstawienia poszczególnych przekształceń wy-

korzystano w pracy elementy rachunku macierzowego, który znajduje coraz szersze zastosowanie w statyce konstrukcji (por. [1]). Artykuł stanowi fragment obszerniejszego opracowania [10].

2. Niech będzie dany pręt przestrzenny AO, obustronnie doskonale utwierdzony poddany działaniu wpływów zewnętrznych (rys. 1).

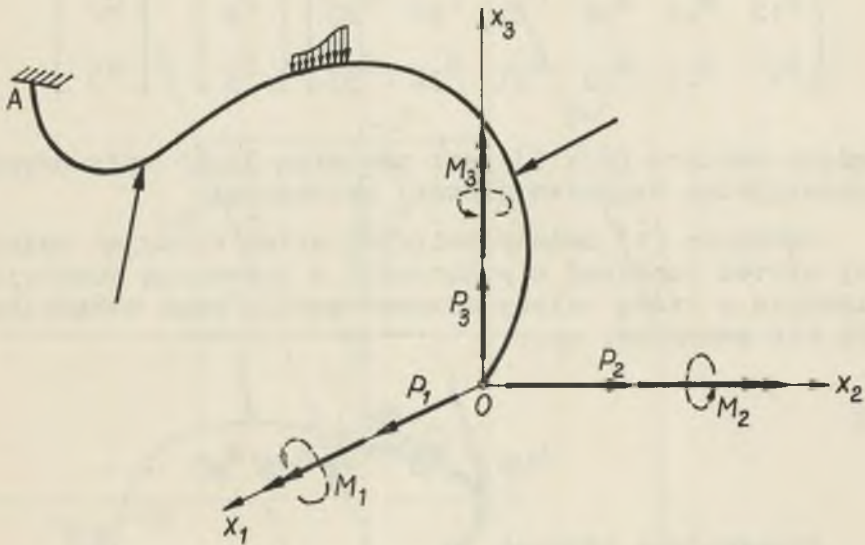


Rys. 1

Przyjmijmy jako wielkości nadliczbowe wektory momentu i siły w zamocowaniu O. Oznaczmy wektor momentu przez  $M$ , wektor siły przez  $P$ . Obierzmy w środku masy przekroju początek kartezjańskiego ortogonalnego układu współrzędnych  $Ox_1, x_2, x_3$ . Rozkładając wielkości  $M$  i  $P$  na kierunki  $x_1, x_2, x_3$  otrzymujemy układ sześciu wielkości statycznych  $M_1, M_2, M_3, P_1, P_2, P_3$ , obciążających przekrój O.

Zwolnijmy przekrój O od zamocowania i uzewnętrznijmy działające nań wielkości nadliczbowe. Otrzymany układ zastępczy, równoważny statycznie układowi rzeczywistemu, w postaci wspornika, jak na rys. 2. Układ ten traktować będziemy w naszych rozważaniach jako wyjściowy układ podstawowy.

Swobodny koniec  $O$  pręta na skutek działania wpływów zewnętrznych doznaje pewnych przemieszczeń. Oznaczmy wektory tych przemieszczeń przez  $\omega$  i  $u$ , przy czym  $\omega$  niech będzie wektorem małego obrotu przekroju  $O$ ,  $u$  - wektorem przesunięcia środka masy tego przekroju.



Rys. 2

Składowe wektorów  $\omega$  i  $u$  zorientowane wzdłuż osi  $x_1, x_2, x_3$  nazwijmy odpowiednio przez  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, u_1, u_2, u_3$ .

Warunki identyczności odkształcenia układów rzeczywistego i podstawowego prowadzą do równań kanonicznych metody sił.

Równania te, opisujące zależność między przemieszczeniami końca wspornika a działającymi nań wielkościami nadliczbowymi, można przedstawić w następującej postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ B_{11} & B_{21} & B_{31} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

gdzie macierz (6 x 6) jest macierzą liczb wpływowych<sup>x)</sup>, symetryczną względem głównej przekątnej.

Równanie (1) możemy zwięźlej podać stosując wskaźnikowy system oznaczeń w połączeniu z konwencją sumacyjną, zgodnie z którą należy sumować podług tego wskaźnika, który się powtarza, np.:

$$A_{\alpha\beta} \cdot M_{\beta} = \sum_{\beta}^{\text{df}} A_{\alpha\beta} \cdot M_{\beta}$$

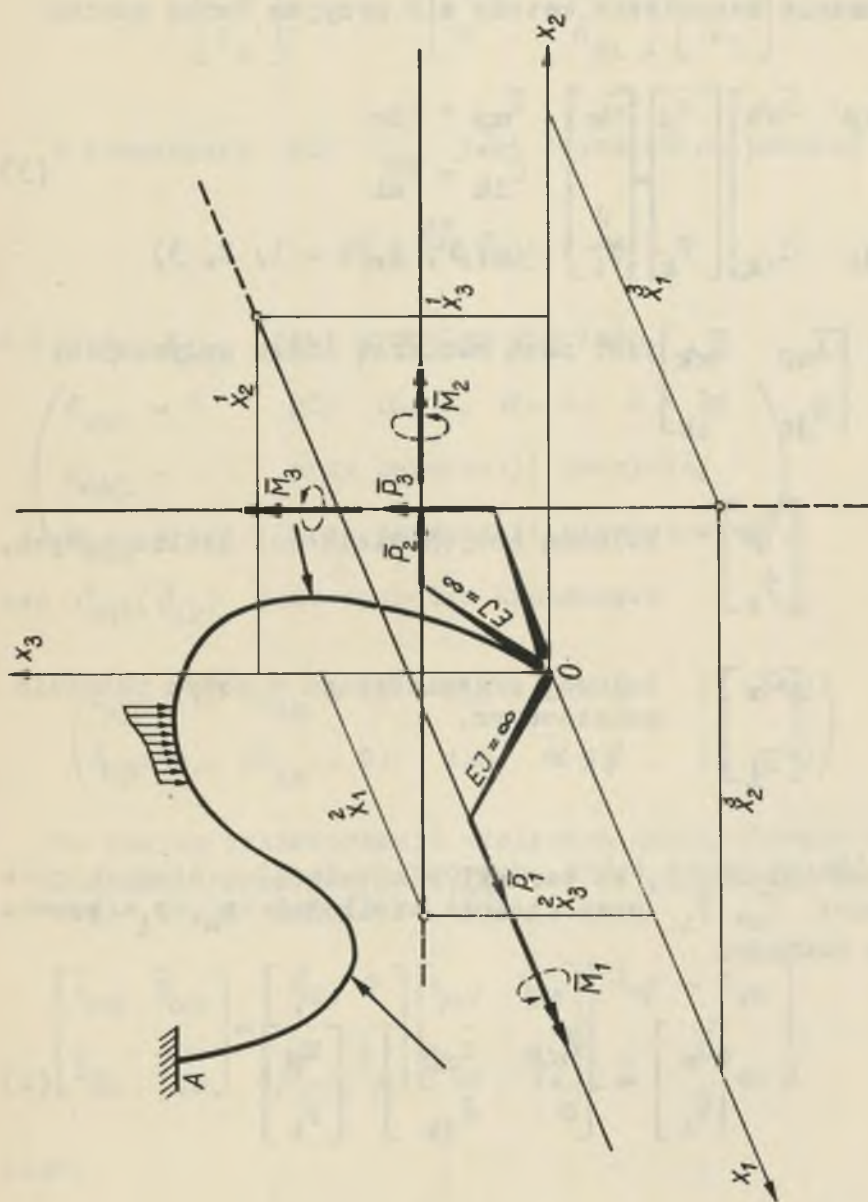
Otrzymujemy wówczas

$$\begin{bmatrix} A_{\alpha\beta} & B_{\alpha k} \\ B_{\beta i} & C_{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{\beta} \\ P_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{\alpha} \\ u_i \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha} \\ C_{ik} = C_{ki} \end{matrix} \quad (2)$$

( $\alpha, \beta, i, k = 1, 2, 3$ )

3. Przyjmijmy nowy układ podstawowy przenosząc siły  $P_i$  na trzy proste skośne, równoległe do osi  $x_1, x_2, x_3$ . Siły te działają na punkt 0 pręta za pośrednictwem nieskończeniem sztywnych ramion (rys. 3).

<sup>x)</sup> Ogólne wzory dla liczb wpływowych pręta przestrzennego zostały przedstawione m.in. w pracy [9].



Rys. 3

Wprowadźmy nadkreślenia (-) celem zaznaczenia wielkości odpowiadających nowemu układowi podstawowemu.

Równania kanoniczne metody sił przyjmą teraz postać

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{\alpha\beta} & \bar{B}_{\alpha k} \\ \bar{B}_{\beta i} & \bar{C}_{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}_{\beta} \\ \bar{P}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\omega}_{\alpha} \\ \bar{u}_i \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \bar{A}_{\alpha\beta} &= \bar{A}_{\beta\alpha} \\ \bar{C}_{ik} &= \bar{C}_{ki} \end{aligned} \quad (3)$$

$(\alpha, \beta, i, k = 1, 2, 3)$

gdzie:  $\begin{bmatrix} \bar{A}_{\alpha\beta} & \bar{B}_{\alpha k} \\ \bar{B}_{\beta i} & \bar{C}_{ik} \end{bmatrix}$  jest nową macierzą liczb wpływowych,

$\begin{bmatrix} \bar{M}_{\beta} \\ \bar{P}_k \end{bmatrix}$  kolumną nowych wielkości nadliczbowych,

$\begin{bmatrix} \bar{\omega}_{\alpha} \\ \bar{u}_i \end{bmatrix}$  kolumną przemieszczeń w nowym układzie podstawowym.

Łatwo sprawdzić, że warunki równowartości sześciu wielkości  $\bar{M}_{\alpha}$ ,  $\bar{P}_i$  oraz sześciu wielkości  $M_{\alpha}$ ,  $P_i$  prowadzą do równości

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_{\alpha} \\ \bar{P}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{\alpha\beta} & T_{\alpha k} \\ 0 & \delta_{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{\beta} \\ P_k \end{bmatrix} \quad (4)$$

oraz

$$\begin{bmatrix} M_{\beta} \\ P_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{\beta\alpha} - T_{\beta i} \\ 0 \quad \delta_{ki} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}_{\alpha} \\ \bar{P}_i \end{bmatrix} \quad (5)$$

W równaniach tych  $T_{\alpha k}$  jest dwuwektorem postaci

$$T_{\alpha k} \stackrel{\text{df}}{=} \epsilon_{\alpha k l} \cdot x_l^k, \quad (6)$$

w którym  $\epsilon_{\alpha k l}$  jest symbolem Ricciego

$$\left( \begin{array}{ll} \epsilon_{\alpha k l} = 0 & \text{gdy } \alpha = k, \alpha = l, k = l \\ \epsilon_{\alpha k l} = +1 & \text{przy permutacji parzystej} \\ \epsilon_{\alpha k l} = -1 & \text{przy permutacji nieparzystej} \end{array} \right),$$

zaś  $\delta_{\alpha\beta} (\delta_{ik})$  jest symbolem Kroneckera

$$\left( \begin{array}{ll} \delta_{\alpha\beta} = 1, (\delta_{ik} = 1) & \text{dla } \alpha = \beta \quad (i = k) \\ \delta_{\alpha\beta} = 0, (\delta_{ik} = 0) & \text{dla } \alpha \neq \beta \quad (i \neq k) \end{array} \right).$$

Na skutek transformacji wielkości nadliczbowych nastąpiła zmiana liczb wpływowych, którą można opisać przez równanie macierzowe (por. [8]):

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{\alpha\beta} & \bar{B}_{\alpha k} \\ \bar{B}_{\beta i} & \bar{C}_{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{\mu\alpha} & 0 \\ -T_{\mu i} & \delta_{ri} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\mu\nu} & B_{\mu s} \\ B_{\nu r} & C_{rs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{\nu\beta} - T_{\nu k} \\ 0 & \delta_{sk} \end{bmatrix} \quad (7)$$

skąd:

$$\bar{A}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} \quad (8)$$

$$\bar{B}_{\alpha k} = B_{\alpha k} - A_{\alpha\beta} \cdot T_{\beta k} \quad (8)$$

$$\bar{C}_{ik} = C_{ik} + T_{\mu i} \cdot A_{\mu\nu} \cdot T_{\nu k} - (B_{\mu i} T_{\mu k} + B_{\mu k} T_{\mu i})$$

Podstawiając do (8)<sub>2</sub> prawą stronę (6) i kładąc

$$\bar{B}_{\alpha k} = 0 \quad (\text{przy } \alpha \neq k) \quad (9)$$

otrzymujemy układ równań

$$\left. \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} B_{21} + A_{22} \cdot \overset{1}{X}_3 - A_{23} \cdot \overset{1}{X}_2 = 0 \\ B_{31} + A_{32} \cdot \overset{1}{X}_3 - A_{33} \cdot \overset{1}{X}_2 = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} B_{12} - A_{11} \cdot \overset{2}{X}_3 + A_{13} \cdot \overset{2}{X}_1 = 0 \\ B_{32} - A_{31} \cdot \overset{2}{X}_3 + A_{33} \cdot \overset{2}{X}_1 = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} B_{13} + A_{11} \cdot \overset{3}{X}_2 - A_{12} \cdot \overset{3}{X}_1 = 0 \\ B_{23} - A_{21} \cdot \overset{3}{X}_2 + A_{22} \cdot \overset{3}{X}_1 = 0 \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (10)$$

Równania (10) przedstawiają geometrycznie trzy pary płaszczyzn równoległych do  $X_1, X_2, X_3$ .

Krawędziami przecięcia się poszczególnych par płaszczyzn są proste skośne określone przez równania

$$\overset{1}{X}_2 = \frac{A_{22} \cdot B_{31} - A_{23} \cdot B_{21}}{A_{22} \cdot A_{33} - A_{23}^2}, \quad \overset{1}{X}_3 = \frac{A_{23} \cdot B_{31} - A_{33} \cdot B_{21}}{A_{22} \cdot A_{33} - A_{23}^2}, \quad (11)$$

$$\overset{2}{X}_1 = \frac{A_{13} \cdot B_{12} - A_{11} \cdot B_{32}}{A_{11} \cdot A_{33} - A_{13}^2}, \quad \overset{2}{X}_3 = \frac{A_{33} \cdot B_{12} - A_{13} \cdot B_{32}}{A_{11} \cdot A_{33} - A_{13}^2} \quad (12)$$



$$\frac{3}{X_1} = \frac{A_{11} \cdot B_{23} - A_{12} \cdot B_{13}}{A_{11} \cdot A_{22} - A_{12}^2}, \quad \frac{3}{X_2} = \frac{A_{12} \cdot B_{23} - A_{22} \cdot B_{13}}{A_{11} \cdot A_{22} - A_{12}^2} \quad (13)$$

Zgodnie z (8) i (9) relacje na poszczególne liczby wpływowe przyjmują postać

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_{11} &= A_{11} \\ \bar{A}_{12} &= \bar{A}_{21} = A_{12} = A_{21} \\ \bar{A}_{13} &= \bar{A}_{31} = A_{13} = A_{31} \\ \bar{A}_{22} &= A_{22} \\ \bar{A}_{23} &= \bar{A}_{32} = A_{23} = A_{32} \\ \bar{A}_{33} &= A_{33} \\ \bar{B}_{11} &= B_{11} + A_{12} \cdot \frac{1}{X_3} - A_{13} \cdot \frac{1}{X_2} \\ \bar{B}_{22} &= B_{22} - A_{21} \cdot \frac{2}{X_3} + A_{23} \cdot \frac{2}{X_1} \\ \bar{B}_{33} &= B_{33} + A_{31} \cdot \frac{3}{X_2} - A_{32} \cdot \frac{3}{X_1} \\ \bar{B}_{12} &= \bar{B}_{21} = \bar{B}_{13} = \bar{B}_{31} = \bar{B}_{23} = \bar{B}_{32} = 0 \\ \bar{C}_{11} &= C_{11} + B_{21} \cdot \frac{1}{X_3} - B_{31} \cdot \frac{1}{X_2} \\ \bar{C}_{12} &= \bar{C}_{21} = C_{12} + B_{22} \cdot \frac{1}{X_3} - B_{32} \cdot \frac{1}{X_2} - \bar{B}_{11} \cdot \frac{2}{X_3} \\ \bar{C}_{13} &= \bar{C}_{31} = C_{13} + B_{23} \cdot \frac{1}{X_3} - B_{33} \cdot \frac{1}{X_2} + \bar{B}_{11} \cdot \frac{3}{X_2} \\ \bar{C}_{22} &= C_{22} - B_{12} \cdot \frac{2}{X_3} + B_{32} \cdot \frac{2}{X_1} \end{aligned} \right\} (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_{23} &= \bar{C}_{32} = C_{23} - B_{13} \cdot \overset{2}{X}_3 + B_{33} \cdot \overset{2}{X}_1 - \bar{B}_{22} \cdot \overset{3}{X}_1 \\ \bar{C}_{33} &= C_{33} + B_{13} \cdot \overset{3}{X}_2 - B_{23} \cdot \overset{3}{X}_1 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Wyznaczone trzy proste, tzw. osie sprężyste charakteryzują się zatem szczególnymi własnościami, mianowicie:

S i ł a działająca wzdłuż jednej z prostych nie powoduje obrotów wokół dwóch pozostałych prostych.

Z zasady Bettiego wynika, że:

M o m e n t działający w płaszczyźnie prostopadłej do jednej z prostych nie powoduje przesunięć w kierunkach dwóch pozostałych.

Zmianę kolumny przemieszczeń przy przejściu do nowego układu podstawowego opisuje relacja (por. [8])

$$\left[ \begin{array}{c} \bar{u}_\alpha \\ \bar{u}_i \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} \delta_{\beta\alpha} & 0 \\ -T_{\beta i} & \delta_{ki} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \omega_\beta \\ u_k \end{array} \right] \quad (15)$$

skąd

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}_\alpha &= \omega_\alpha \\ \bar{u}_i &= u_i - T_{\beta i} \cdot \omega_\beta \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Wprowadzając do (16) dwuwektor (6) obliczamy

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= \omega_1, \quad \bar{\omega}_2 = \omega_2, \quad \bar{\omega}_3 = \omega_3 \\ \bar{u}_1 &= u_1 + \omega_2 \cdot \overset{1}{X}_3 - \omega_3 \cdot \overset{1}{X}_2 \\ \bar{u}_2 &= u_2 - \omega_1 \cdot \overset{2}{X}_3 + \omega_3 \cdot \overset{2}{X}_1 \\ \bar{u}_3 &= u_3 + \omega_1 \cdot \overset{3}{X}_2 - \omega_2 \cdot \overset{3}{X}_1 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Retransformację wielkości nadliczbowych z nowego układu podstawowego (-) do układu wyjściowego przeprowadzić możemy w oparciu o wzór (5) z którego otrzymujemy

$$\left. \begin{aligned} M_{\beta} &= \bar{M}_{\beta} - T_{\beta i} \cdot \bar{P}_i \\ P_k &= \bar{P}_k \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Po podstawieniu do (18) prawej strony równości (6) uzyskujemy

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \bar{M}_1 - \bar{P}_2 \cdot \bar{X}_3 + \bar{P}_3 \cdot \bar{X}_2 \\ M_2 &= \bar{M}_2 + \bar{P}_1 \cdot \bar{X}_3 - \bar{P}_3 \cdot \bar{X}_1 \\ M_3 &= \bar{M}_3 - \bar{P}_1 \cdot \bar{X}_2 + \bar{P}_2 \cdot \bar{X}_1 \\ P_1 &= \bar{P}_1, \quad P_2 = \bar{P}_2, \quad P_3 = \bar{P}_3 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

4. Gdy rozpatrywany ustrój AO będzie prętem płaskim, obustronnie sztywno zamocowanym, wówczas można z relacji (11), (12), (13) otrzymać znane wyrażenia na współrzędne biegunów sprężystych.

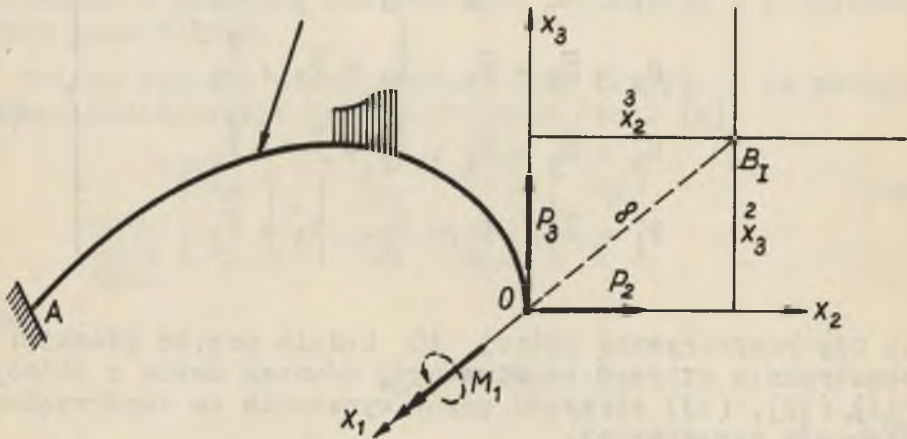
Dla pręta płaskiego AO płasko obciążonego (rys. 4) macierz liczb wpływowych ma postać

$$[I] = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & C_{22} & C_{23} \\ B_{13} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}, \quad C_{23} = C_{32} \quad (20)$$

Dokonując transformacji równoległej sił i uwzględniając  $\bar{B}_{12} = \bar{B}_{13} = 0$  otrzymujemy

$$\begin{matrix} 2 \\ \bar{x}_3 \end{matrix} = \frac{B_{12}}{A_{11}}, \quad \begin{matrix} 3 \\ \bar{x}_2 \end{matrix} = -\frac{B_{13}}{A_{11}} \quad (21)$$

a więc współrzędne bieguny sprężystego  $B_I$  (por. [3], str. 15).

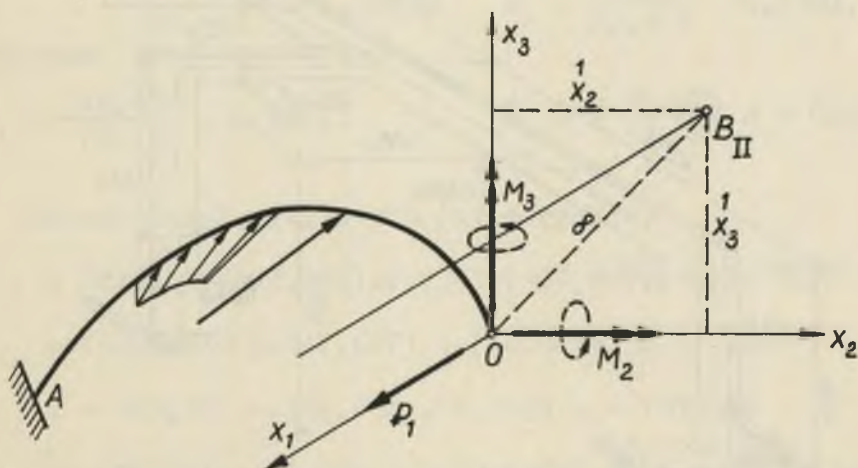


Rys. 4

Dla pręta płaskiego AO obciążonego normalnie do swojej płaszczyzny (rys. 5), macierz liczb wpływowych ma postać

$$[L] = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} & B_{21} \\ A_{32} & A_{33} & B_{31} \\ B_{21} & B_{31} & C_{11} \end{bmatrix} \quad A_{23} = A_{32} \quad (22)$$

Po dokonaniu transformacji równoległej otrzymujemy z warunków  $\bar{B}_{21} = \bar{B}_{31} = 0$  relacje zgodne z (11), a więc współrzędne bieguna sprężystego  $B_{II}$  (por. [3], str.61).

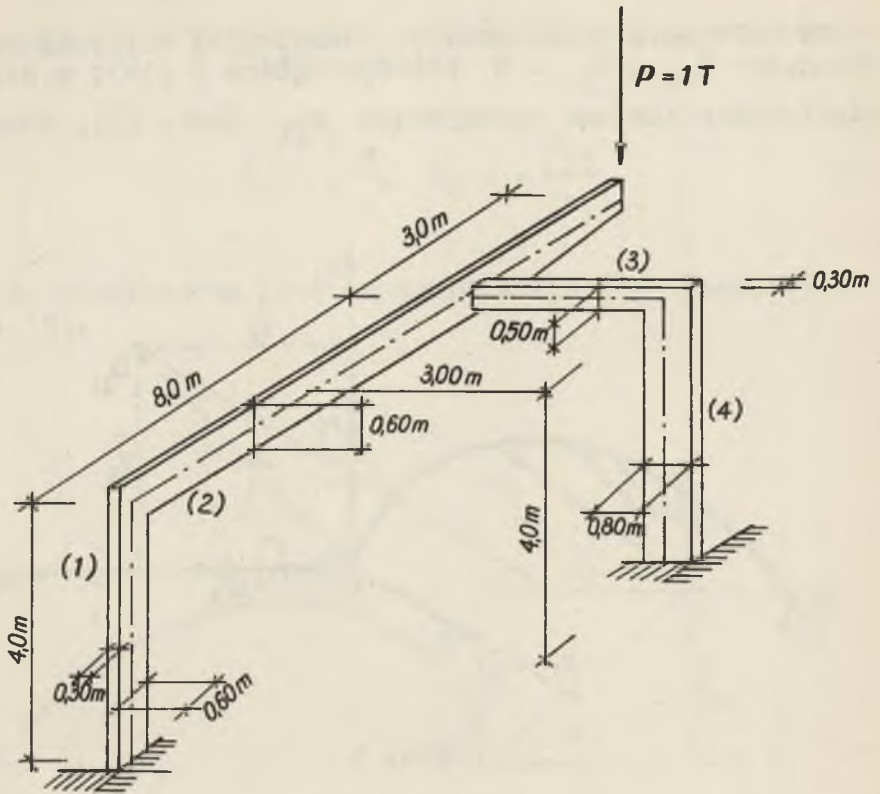


Rys. 5

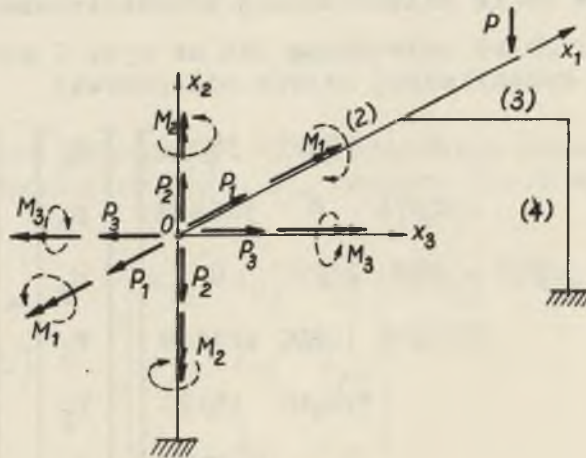
5. Przykład liczbowy ([4], str. 37). Obliczyć wielkości nadliczbowe w ramie przestrzennej przedstawionej na rys. 6.

Przyjmując układ podstawowy jak na rys. 7 otrzymujemy układ równań kanonicznych metody sił postaci

$$\begin{bmatrix}
 53,429 & 0 & 0 & 0 & 12,835 & 35,376 \\
 & 72,141 & 0 & -52,976 & 0 & 326,888 \\
 & & 38,953 & -32,00 & 24,627 & 0 \\
 & & & 222,669 & 192,00 & 423,839 \\
 & & & & 1926,417 & 10,127 \\
 & & & & & 2368,127 \\
 \text{S Y M.} & & & & & 
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 M_1 \\
 M_2 \\
 M_3 \\
 P_1 \\
 P_2 \\
 P_3
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 12,835 \\
 0 \\
 80,860 \\
 -72,000 \\
 -616,154 \\
 10,126
 \end{bmatrix}$$



Rys. 6



Rys. 7

Na podstawie (11), (12), (13) obliczamy

$$\overset{1}{x}_2 = -\frac{32,00}{38,953} = -0,8215, \quad \overset{1}{x}_3 = -\frac{(-52,976)}{72,141} = 0,7343,$$

$$\overset{2}{x}_1 = -\frac{(-247,627)}{38,953} = 6,3571, \quad \overset{2}{x}_3 = \frac{12,835}{53,429} = 0,2403,$$

$$\overset{3}{x}_1 = \frac{326,888}{72,141} = 4,5312, \quad \overset{3}{x}_2 = -\frac{35,376}{53,429} = -0,6621.$$

Zmiana liczb wpływowych (na mocy (14))

$$\bar{c}_{11} = 222,669 + (-52,976) \cdot 0,7343 - (-32,00) \cdot (-0,8215) = 157,481$$

$$\bar{c}_{12} = 192,000 - (-247,627) \cdot (-0,8215) = -11,427$$

$$\bar{c}_{13} = -423,839 + 326,888 \cdot 0,7343 = -183,790$$

$$\bar{c}_{22} = 1926,417 - 12,835 \cdot 0,2403 + (-247,627) \cdot 6,3571 = 349,143$$

$$\bar{c}_{23} = 10,127 - 35,376 \cdot 0,2403 = 1,629$$

$$\bar{c}_{33} = 2368,127 + 35,376 \cdot (-0,6621) - 326,888 \cdot 4,5312 = 863,510$$

Transformacja przemieszczeń zgodnie z (17)

$$\bar{u}_1 = -72,000 - 80,860 \cdot (-0,8215) = -5,574$$

$$\bar{u}_2 = -616,154 - 12,835 \cdot 0,2403 + 80,860 \cdot 6,3571 = -105,203$$

$$\bar{u}_3 = 10,126 + 12,835 \cdot (-0,6621) = 1,628$$

Otrzymujemy układ równań postaci

$$\begin{array}{cccccc}
 53,429 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 72,141 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 38,953 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 157,481 & -11,427 & -183,79 \\
 & & & & 349,143 & 1,629 \\
 \text{S Y M} & & & & & 863,510
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 \bar{M}_1 \\
 \bar{M}_2 \\
 \bar{M}_3 \\
 \bar{P}_1 \\
 \bar{P}_2 \\
 \bar{P}_3
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 12,835 \\
 0 \\
 80,860 \\
 -5,574 \\
 -105,203 \\
 1,628
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{Obliczamy: } \bar{M}_1 = 0,2402, & \bar{P}_1 = -0,0725, \\
 \bar{M}_2 = 0 & \bar{P}_2 = -0,3036, \\
 \bar{M}_3 = 2,0758, & \bar{P}_3 = -0,0129,
 \end{array}$$

Retransformacja nadliczbowych (zgodnie z wzorami (19))

$$M_1 = 0,2402 - (-0,3036) \cdot 0,2403 + (-0,0129) \cdot (-0,6621) = 0,3216 \text{ Tm}$$

$$M_2 = 0,0 + (-0,0725) \cdot 0,7343 - (-0,0129) \cdot 4,5312 = 0,0052 \text{ Tm}$$

$$M_3 = 2,0758 - (-0,0725) \cdot (-0,8215) + (-0,3036) \cdot (6,3571) = 0,0862 \text{ Tm}$$

$$P_1 = -0,0725 \text{ T}, \quad P_2 = -0,3036 \text{ T}, \quad P_3 = -0,0129 \text{ T}$$



Tablica porównawcza wyników

I

	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
Mbs (por. [4], str. 45).	0,3217	0,005596	0,0859	-0,07257	-0,3037	-0,0130
osie spręż.	0,3216	0,0052	0,0862	-0,0725	-0,3036	-0,0129

## LITERATURA

- [1] ASPLUND S.D.: Zastosowanie algebry macierzy w statyce konstrukcji, Wyd. PAN Wrocław-Warszawa-Kraków 1964 r.
- [2] BARON FR. Matrix analysis of structures curved in space, Journal of the Structural Division Proceedings of the ASCE, March 1961.
- [3] BUDZIANOWSKI Zb.: Biegun sprężysty jako reduktor równań sprężystości, Wrocław 1955 r.
- [4] BUDZIANOWSKI Zb.: Obliczanie ram przestrzennych za pomocą biegunów sprężystych, Zesz. Nauk. Pol. Śl., Budownictwo Z. 2., Kraków 1957.
- [5] GAGE A., Le calcul des tuyaneries a haute temperature, Paris 1957.
- [6] NOWACKI W.: Mechanika budowli, tom I, PWN Warszawa 1957 r.
- [7] SILBERING L.: Obliczanie wytrzymałościowe rurociągów, Warszawa 1959 r.
- [8] WOŹNIAK Cz.: O matematycznych podstawach teorii układów Clapeyrona, Arch. Inż. Łąd., Tom IX, 1/1963 r.
- [9] WOŹNIAK Cz.: Statyka rozgałęzionych przestrzennych rurociągów samokompensacyjnych, Rozprawy Inżynierskie, 4/1962 r.

- [10] WYRA S., Redukcja elementów macierzy sprężystości poprzez transformację wielkości nadliczbowych, Rozprawa doktorska nieopublikowana.

Wpłynęło do Redakcji 14.01.1965 r.

ЭЛИМИНАЦИЯ ЧИСЕЛ ВЛИЯНИЯ КАНОНИЧЕСКИХ  
УРАВНЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СТЕРЖНЯ ЧЕРЕЗ  
ТРАНСЛАСЯ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИЛ

Р е з ю м е

В статье представлен способ определения положения упругих осей для пространственного стержня, а тоже способ определения редуционных свойств. Трансформация сил на упругие оси приводит к частичной элиминации недиагональных элементов матрицы чисел влияния, что одновременно ускоряем решение канонических уравнений метода сил.

ELIMINATION DER EINFLUSSZAHLEN DES RÄUMLICH GEKRÜMMTEN  
STABES DURCH TRANSLATION DER STATISCH UNBESTIMMTEN KRÄFTE

Z u s a m m e n f a s s u n g

Der Artikel betrachtet über einer Methode der Bezeichnung der elastischen Achsen des räumlich gekrümmten Stabes und über ihre Reduktionsmöglichkeiten. Die Transformation der statisch unbestimmten Kräfte auf die elastischen Achsen leitet zur teilweisigen Elimination der nabendiagonalischen Einflußzahlen. Die Elastizitätsgleichungen sind wesentlich einfacher geworden, so das die Schwierigkeiten der Auflösung linearer Gleichungen kleiner sind.