ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: AUTOMATYKA z. 76 Nr kol. 812

Konrad Wojciechowski
Zdzisław Duda
Politechnika Śląska

STEROWANIE ROZDZIAŁEM ZASOBÓW W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI

Streszczenie. W artykule przedstawia się problem sterowania w warunkach niepewności na przykładzie rozdziału zasobów. Formułuje się model sterowanego procesu i dwuetapową koncepcję sterowania. Na etapie I wyznacza się w strukturze CL zbiory stanów dopuszczalnych i zbiory sterowań dopuszczalnych. Na etapie II wyznacza się prawo sterowania optymalnego. Ilustrację rozważań, w zakresie wyznaczania zbiorów stanów dopuszczalnych stanowi przykład numeryczny.

1. Wprowadzenie

Przy sterowaniu w warunkach niepewności uzyskanie deterministycznej wartości funkcji reprezentującej prawo sterowania okupione jest założeniami trudnymi do weryfikacji fizycznej, a niekiedy nawet interpretacji. Typowym przykładem jest tu agregacja niepewnego wskaźnika jakości, która może być pesymistyczna, optymistyczna lub mieszana i brak jest wyraźnych kryteriów wyboru jednej z nich.

Stąd w podejściu prezentowanym w pracy sterowanie wyznaczane jest dwuetapowo. Na etapie pierwszym , traktując wskaźnik jakości jako ograniczenie, wyznacza się w strukturze CL /Closed Loop/ zbiory sterowań dopuszczalnych i stanów dopuszczalnych, tj. takich, które spełniają z zadanym prawdopodobieństwem niepewne równania modelu sterowanego procesu i również niepewne ograniczenia na stan, sterowanie i dopuszczalną wartość wskaźnika jakości. Zakłada się, że ostateczną decyzję sterującą podejmuje operator procesu, dla którego wielkość i kształt obszarów dopuszczalnych stanowią dobrą informację o aktualnym "stanie" sterowanego procesu i możliwości dalszego sterowania.

W swojej decyzji operator uwzględnia własną informację bieżącą, która jest na ogół trudna do sformalizowania i uwzględnienia w ramach struktury CL. Jednak w przypadku gdy operator rezygnuje z przysługującego mu prawa decyzji, przyjęte sterowanie odpowiada sterowaniu wyznaczonemu na drugim etapie syntezy i minimalizuje np. średnią wartość wskaźnika jakości [4].

W pracy przedstawione powyżej podejście zrealizowano dla celów sterowania rozdziałem dyskretnych zasobów w systemie zawierającym ich magazyny połączone siecią transportową z odbiorcami i pomiędzy sobą. Zakłada się dodatkowo, że dopływ zasobów do systemu jest niesterowany, zachodzi tylko poprzez magazyny i jest zmienną losową o znanej gęstości.

Zapotrzebowanie odbiorców na zasoby jest określone przez znaną wartość nominalną. Dodatkowo każdy z odbiorców posiada swój lokalny magazyn, stąd w przypadku niedostarczenia w danej chwili dyskretnej pożądanej przez odbiorcę ilości zasobu powoduje zwiększenie zapotrzebowania w chwili następnej, ponad nominalne o powstały "dług".

2. Model sterowanego procesu i ograniczenia

Model sterowanego procesu wynika bezpośrednio z bilansu zasobów w magazynach z uwzględnieniem ich dopływu, poboru i przepływów między magazynami. Mamy:

$$y_{n+1}(i,j) = y_n(i,j) - \sum_{s=1}^{R} q_n(i,j,s) - \sum_{l=1}^{n} v_n(i,l,j) + \sum_{m=1}^{n} v_n(i,m,j) + d_n(i,j) \qquad /1/$$

gdzie:

- $y(\cdot)$ ilość zasobów w magazynie,
- $q(\cdot)$ ilość zasobów pobranych przez odbiorcę,
- $v(\cdot)$ ilość zasobów przeniesionych do innego magazynu lub otrzymanych z innego magazynu,
- $d(\cdot)$ ilość zasobów dostarczonych z zewnątrz.

Zakłada się, że y,q,v,d mogą przybierać wartości ze znanych skończenie elementowych zbiorów.

Znaczenia argumentów i,j,s,l,m,n są następujące:

- $i \in \{1,\dots,M\}$ numer magazynu,
- $j \in \{1,\dots,P\}$ numer rodzaju zasobu,
- $s \in \{1,\dots,R\}$ numer odbiorcy,
- $l \in \{1,\dots,M\}$ numer magazynu przyjmującego przenoszony zasób,
- $m \in \{1,\dots,M\}$ numer magazynu wydającego przyjmowany zasób,
- $n \in \{1,\dots,N\}$ indeks dyskretnej chwili czasu.

Dla dalszych celów pracy model /1/ będziemy zapisywać w postaci:

$$y_{n+1} = y_n + G\,q_n + H\,v_n + F\,d_n \qquad /2/$$

gdzie: G, H, F są odpowiednimi macierzami o elementach -1, 0, 1, zaś jednoznaczne związki pomiędzy zmiennymi y, q, v, d występującymi w równaniach /1/ i /2/ są dane poprzez następującą relację porządku leksykonograficznego:

$$(i_1,j_1) < (i_2,j_2) \Longleftrightarrow (i_1 < i_2) \vee (i_1 \leqslant i_2 \wedge j_1 < j_2)$$

podobnie:

$$(i_1,j_1,s_1) < (i_2,j_2,s_2) \Longleftrightarrow ((i_1,j_1) < (i_2,j_2)) \vee ((i_1,j_1) \leqslant (i_2,j_2) \wedge s_1 < s_2)$$

Model /2/ jest, podobnie zresztą jak i model /1/, niepewny, zawiera bowiem zmienną niepewną d, np. o losowym modelu niepewności.

Model wyrażający zapotrzebowanie odbiorców ma postać:

$$z_{n+1}(j,s) = w_{n+1}(j,s) + z_n(j,s) - \sum_{i=1}^{M} q_n(i,j,s) \qquad /3/$$

gdzie:

$w(\cdot)$ nominalne zapotrzebowanie,

$z(\cdot)$ aktualne zapotrzebowanie.

Znaczenia argumentów i, j, s i indeksu n są takie samo jak dla modelu /1/. Model /3/ będziemy dalej przedstawiać w postaci wektorowej:

$$z_{n+1} = w_{n+1} + z_n - D\, q_n \qquad /4/$$

gdzie: D jest macierzą o elementach 0, 1, zaś sposób przekształcenia postaci /3/ do /4/ analogiczny do opisanego już przekształcenia modelu /1/ do postaci /2/.

Rozdział zasobów jest oceniany poprzez wskaźnik jakości o postaci:

$$J = \sum_{n=1}^{N} (z_n - D\, q_n)^T (z_n - D\, q_n) \qquad /5/$$

Wskaźnik ten można interpretować jako sumaryczne straty w horyzoncie N wynikające z niedostarczenia odbiorcom pożądanych przez nich ilości zasobów. Kwadratową postać wskaźnika /5/ przyjęto jedynie dla ustalenia uwagi, bowiem ze względu na dyskretność zmiennych i opisywane dalej ograniczenia, wskaźnik o postaci /5/ nie daje żadnych uproszczeń przy rozwiązywaniu problemu.

Ograniczenia nierównościowe występujące w rozpatrywanym problemie rozdziału zasobów podzielić można na następujące grupy:

1. Ograniczenia transportowe

$$\underline{q} \leqslant q_k \leqslant \bar{q}$$
$$\underline{v} \leqslant v_k \leqslant \bar{v} \qquad /6/$$

Wyrażają one maksymalne przepustowości dróg transportowych oraz odwracalność lub nie kierunku transportu.

2. Ograniczenia minimalnych dostaw

$$m \leqslant D\, q_k \qquad /7/$$

co oznacza, że dostawy do poszczególnych odbiorców nie mogą być niższe od danych wielkości krytycznych.

3. Ograniczenia pojemności magazynów

$$\underline{y} \leqslant y_k \leqslant \bar{y} \qquad /8/$$

Właściwym ograniczem pojemności magazynu jest wielkość $\bar{x}$, natomiast $\underline{x}$ określa minimalne zapasy, które powinny być utrzymane w procesie sterowania.

4. Ograniczenie na dopuszczalną wartość wskaźnika jakości /5/

$$\underline{\zeta} \preceq \bar{\zeta} \qquad /9/$$

Ograniczenia typu 1, 2, 3, 4 rozpatrywane dla bieżącej chwili n obowiązują dla każdego $k = n,\ldots,N$ z rozpatrywanego horyzontu sterowania, a występujące w nich zmienne są powiązane przez /2/ i /4/.

Ograniczenia te zawierają zmienne niepewne, wobec czego występujące w nich nierówności nie są znakami relacji większy lub równy w zbiorze liczb rzeczywistych. W zapisach /6/ - /9/ jest to zasygnalizowane przez ich inny kształt.

Obecnie przechodzimy do określenia sterowania i jego struktury w powiązaniu z informacją bieżącą. Zakładamy, opierając się na przesłankach fizycznych, że bieżącą informację, $x_n^T = \left[y_n^T, z_n^T\right]$ stanowią dane o aktualnej ilości zasobów w magazynach, y_n i aktualnym zapotrzebowaniu odbiorców z_n. Wielkościami sterującymi są $q_n(\cdot)$ jako zasoby wydawane w chwili n-tej poszczególnym odbiorcom oraz $v_n(\cdot)$ stanowiące przepływy mię$\left[y_n^T, z_n^T\right]$, c.

Wobec powyższego argumentami praw sterowania dla etapu I są wektory $x_n^T = \left[y_n^T, z_n^T\right]$, zaś wartościami zbiory sterowań dopuszczalnych.

Mając sprecyzowaną informację bieżącą możemy powtórnie powrócić do ograniczeń /6/ - /9/ i rozpatrzyć ich dalsze przekształcenia.

Uwzględniając, że zgodnie z przyjętą strukturą, w chwili bieżącej n, zmienne q_k, v_k są funkcjami x_k, oraz że x_k jest przez zależność od x_n i $d_n,\ldots,d_{k-1}$ zmienną losową dla $k = n+1,\ldots,N$, zastępujemy rozpatrywane ograniczenia niepewne ograniczeniami deterministycznymi. Postać tych ograniczeń, a dokładniej występujące w nich operacje agregacji nie są jedynymi możliwymi, a ich przyjętą postać należy wiązać z przesłankami wynikającymi z treści fizycznej zadania rozdziału. Ostatecznie dla chwili bieżącej n powinny być spełnione ograniczenia deterministyczne dla tej chwili, oraz ograniczenia dla chwil dalszych o postaci:

$$\forall\, d_n,\ldots,d_{k-1} : \quad \begin{cases} \underline{q} \leqslant q_k(x_k) \leqslant \bar{q} \\ \underline{v} \leqslant v_k(x_k) \leqslant \bar{v} \end{cases} \qquad /6a/$$

$$\forall\, d_n,\ldots,d_{k-1} : \quad m \leqslant D\, q_k(x_k) \qquad /7a/$$

$$\forall\, d_n,\ldots,d_{k-1} : \quad \underline{x} \leqslant x_k \leqslant \bar{x} \qquad /8a/$$

$$E\, \zeta \leqslant \bar{\zeta} \qquad /9a/$$

gdzie $k = n+1,\ldots,N$.

3. Sformułowanie problemu

Dysponując modelem /2/ bilansu zasobów w magazynach, modelem /4/ zapotrzebowania odbiorców oraz modelem /6a/ - /9a/ ograniczeń możemy sformułować zadania sterowania dla etapu I i II. W dalszych zapisach dla ich uproszczenia $q^{*T} = [q,v]^T$.

Dla etapu I mamy:

Wyznaczyć zbiór $Q_n^*(x_n)$, takich $q_n^*(x_n)$, dla których spełnione są ograniczenia /6a/ - /9a/ i /2/, /4/, k = n,...,N.

Zbiór $Q_n^*(x_n)$ nazywamy zbiorem sterowań dopuszczalnych dla chwili dyskretnej n i dla wartości x_n.

Odwzorowanie (funkcję) $Q_n^*(x_n)$ nazywamy prawem sterowania dopuszczalnego dla n-tej chwili dyskretnej.

Zbiór X_n elementów x_n takich, że dla każdego z nich istnieje niepusty zbiór $Q_n^*(x_n)$ nazywamy zbiorem stanów dopuszczalnych w chwili dyskretnej n.

Dla etapu II mamy:

Dla każdego x_n wyznaczyć $q_n^o(x_n)$ takie, że spełnione są ograniczenia /6a/ - /8a/ i /2/, /4/ dla n,...,N a wskaźnik jakości E(J) osiąga wartość minimalną.

Sterowanie $q_n^o(x_n)$ nazywamy sterowaniem optymalnym dla chwili dyskretnej n i dla wartości x_n.

Funkcję $q_n^o(x_n)$ nazywamy prawem sterowania optymalnego dla n-tej chwili dyskretnej.

4. Opis algorytmu wyznaczania zbiorów sterowań i stanów dopuszczalnych

Problem sformułowany w p. 3 zarówno dla etapu I, jak i dla etapu II nie posiada rozwiązania analitycznego. Dla wskaźnika jakości o postaci /5/ jest to wynikiem przyjęcia ograniczeń /6a/ - /8a/.

W przedstawionym poniżej algorytmie dla etapu I uwagę zwrócono na technikę uwzględnienia bieżącej informacji przy rozwiązywaniu postawionego problemu. W związku z tym dla uproszczenia zakładano, że tworzenie odpowiednich zbiorów odbywa się metodą przeglądu zupełnego. W przypadku większej liczby elementów należałoby zastąpić przegląd zupełny metodą bardziej efektywną.

Przystępując do omawiania algorytmu, rozpocznijmy od n = N.
Dla ostatniej chwili dyskretnej horyzontu sterowania obowiązujący układ nierówności ma postać:

$$\underline{q} \leq q_N(x_n) \leq \bar{q}$$

$$\underline{v} \leq v_N(x_N) \leq \bar{v}$$

$$m \leq D\, q_N(x_N)$$

$$\underline{y} \leqslant y_N \leqslant \bar{y}$$

$$(z_N - D\,q_N(x_N))^T\,(z_N - D\,q_N(x_N)) \leqslant \bar{\gamma}\,/\,N \qquad /10/$$

Traktując x_N jako parametr i stosując metodę przeglądu zupełnego wyznaczamy zdefiniowane w p. 3 zbiory:

$$Q_N^*\,|\,x_N\,,\quad X_N$$

Przechodząc do chwili dyskretnej N-1 mamy układ:

$$\forall d_{N-1} : x_N = x_{N-1} + G^* q_{N-1}(x_{N-1}) + H^* v_{N-1}(x_{N-1}) + F^* d_{N-1} + M^* w_N \qquad /11/$$

$$\underline{q} \leqslant q_{N-1}\,(x_{N-1}) \leqslant \bar{q}$$

$$\underline{v} \leqslant v_{N-1}\,(x_{N-1}) \leqslant \bar{v}$$

$$m \leqslant D\,q_{N-1}\,(x_{N-1})$$

$$\underline{x} \leqslant x_{N-1} \leqslant \bar{x}$$

$$(z_{N-1} - D\,q_{N-1}\,(x_{N-1}))^T\,(z_{N-1} - D\,q_{N-1}\,(x_{N-1})) +$$

$$\underset{|x_{N-1}}{E}\Big\{\big[w_{N-1} + z_{N-1} - D\,q_{N-1}\,(x_{N-1}) - D\,q_N\,(x_{N-1} + G^* q_{N-1}\,(x_{N-1}) + M^* w_N +$$

$$+ H^* v_{N-1}(x_{N-1}) + F^* d_{N-1})\big]^T \big[w_{N-1} + z_{N-1} - D\,q_{N-1}(x_{N-1}) - D\,q_N(x_{N-1} + M^* w_N +$$

$$+ G^* q_{N-1}(x_{N-1}) + H^* v_{N-1}\,(x_{N-1}) + F^* d_{N-1})\big]\Big\} \leqslant 2\,\bar{\gamma}\,/\,N \qquad /12/$$

gdzie:

$$G^* = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & -D \end{bmatrix} \qquad H^* = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad F^* = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Wykonując uśrednianie przy ustalonym x_{N-1}, przyjmuje się, że rozkład $q_N^*|x_N$ jest równomierny. Inaczej oznacza to, że będąc w chwili N-1 przewidujemy, że w chwili N operator wybierze przy ustalonym x_N z równym prawdopodobieństwem każdą z wartości ze zbioru $Q_N^*\,|\,x_N$.

Dla układu warunków /11/, /12/, traktując x_{N-1} jako parametr, wyznaczamy zbiory:

$$Q_{N-1}^*\,|\,x_{N-1}\,,\quad X_{N-1}$$

Omówione powyżej dwa kroki algorytmu sugerują jego następującą wersję rekurencyjną.

1. Niech będą dane zbiory:

$$Q_n^*\,|\,x_n\,,\quad X_n$$

2. Zbiory:

$$Q^{*}_{n-1} \, | x_{n-1} \, , \quad X_{n-1}$$

wyznaczamy na podstawie następującego układu warunków

$$\forall d_{n-1} : \; x_n \in X_n$$

$$\underline{q} \leqslant q_{n-1}(x_{n-1}) \leqslant \bar{q}$$

$$\underline{v} \leqslant v_{n-1}(x_{n-1}) \leqslant \bar{v}$$

$$m \leqslant D\, q_{n-1}(x_{n-1})$$

$$\underline{x} \leqslant x_{n-1} \leqslant \bar{x}$$

$$(z_{n-1} - D\, q_{n-1}(x_{n-1}))^T (z_{n-1} - D\, q_{n-1}(x_{n-1})) +$$

$$+ \underset{|x_{n-1}}{E} (z_n - D\, q_n(x_n))^T (z_n - D\, q_n(x_n)) + \ldots$$

$$+ \underset{|x_{N-1}}{E} (z_N - D\, q_N(x_N))^T (z_N - D\, q_N(x_N)) \leqslant \gamma$$

w których:

$$x_k = \begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix}$$

$$y_{k+1} = y_k + G\, q_k(x_k) + H\, v_k(x_k) + F\, d_k$$

$$z_{k+1} = z_k + w_{k+1} - D\, q_k(x_k)$$

5. Przykład numeryczny

Celem przykładu jest przedstawienie wyników otrzymanych z algorytmu wyznaczania zbiorów stanów dopuszczalnych i sterowań dopuszczalnych dla etapu I. W związku ze stosowaną techniką przeglądu zupełnego i dążeniem do graficznej ilustracji wyników w przykładzie wprowadzono szereg uproszczeń w stosunku do pełnego sformułowania problemu.

Przyjmuje się, że rozpatrywany system zawiera tylko dwa magazyny i dwu odbiorców, zasoby są tylko jednego rodzaju oraz każdy z odbiorców może pobierać je tylko z jednego magazynu. Odbiorcy nie posiadają swoich magazynów buforowych i ich aktualne zapotrzebowanie jest równe nominalnemu. W takim przypadku zbiory stanów dopuszczalnych i zbiory sterowań są funkcjami tylko dwu zmiennych wyrażających ilości zasobów w poszczególnych magazynach i łatwo przedstawić je graficznie.

Magazyny zasobów są połączone pomiędzy sobą, a zasoby dostarczane są do jednego z nich.

Zakłada się dalej $\bar{j} = \infty$, co oznacza, że na etapie I nie rozpatruje się wskaźnika jakości. Rzeczywiście, ograniczenie na wartość dopuszczalną tego wskaźnika jest zawsze spełnione.
Podobnie założenie, że każdy z odbiorców korzysta tylko z dostaw jednego magazynu, powoduje, że ograniczenie typu minimalnych dostaw może być już uwzględnione w ograniczeniu transportowym jako q.
Do obliczeń przyjęto:

$$0,2 \leqslant q_{1k} \leqslant 1,0$$
$$0,2 \leqslant q_{2k} < 1,0$$
$$0, \leqslant v_{1k} < 1,4$$
$$0,2 < v_{2k} \leqslant 1,4$$
$$0. \leqslant y_{1k} \leqslant 1,6$$
$$0. \leqslant y_{2k} \leqslant 1,6$$

Dla zmiennych q , v , y założono kwant 0,2, co określa liczbę wyróżnionych poziomów dyskretnych.

Założone losowe dostawy zasobów określa tablica 1, zaś nominalne deterministyczne zapotrzebowania, równe dla obu odbiorców, określono w tablicy 2. W tablicach tych numer chwili dyskretnej może być interpretowany jako numer miesiąca stąd N = 12.

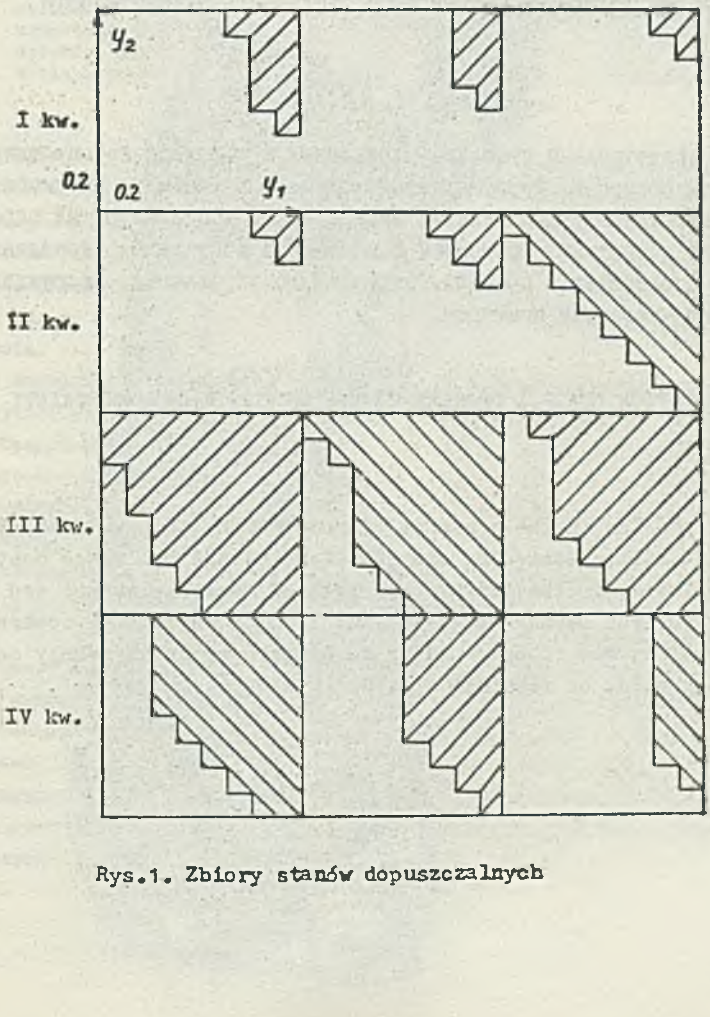
Tablica 1

n \ d	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
1	0	0	0.5	0.5	0	0	0	0
2	0	0	0.3	0.6	0.1	0	0	0
3	0	0	0	0	0.2	0.6	0.2	0
4	0	0	0	0	0.1	0.1	0.8	0
5	0	0	0	0	0	0	0.5	0.5
6	0	0	0.2	0.6	0.2	0	0	0
7	0.4	0.6	0	0	0	0	0	0
8	0.8	0.2	0	0	0	0	0	0
9	0.4	0.6	0	0	0	0	0	0
10	0.9	0.1	0	0	0	0	0	0
11	0.5	0.5	0	0	0	0	0	0
12	0.5	0.5	0	0	0	0	0	0

Tablica 2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
w	0.2	0.2	0.4	0.6	0.6	0.8	0.8	0.6	0.6	0.4	0.4	0.4

Otrzymane w wyniku zastosowania opisanego algorytmu zbiory stanów dopuszczalnych przedstawia rys. 1.



Rys.1. Zbiory stanów dopuszczalnych

LITERATURA

[1] Åstrom K.J. Introduction to Stochastic Control Theory. Ac. Press. New Jork - London.

[2] Duda Z., Wojciechowski K.: Optimal resources allocation in a statical-dynamical problem. Int. Conf. Lyon 7-11.08.1981 France.

[3] Duda Z., Wojciechowski K.: Decentralized resources allocation in large scale system with uncertainty. System Science, Wrocław 1983.

[4] Gessing R., Wojciechowski K., Duda Z., Cieślak Z.: Metoda syntezy stochastycznie optymalnych reguł decyzyjnych rozdziału zasobów w strukturze hierarchicznej. Praca NB, Warszawa 1981.

Recenzent: Doc.dr hab.inż.Roman Słowiński

Wpłynęło do Redakcji do 30.03.1984r.

УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ РЕСУРСОВ В УСЛОВИЯХ НЕУВЕРЕННОСТИ

Р е з ю м е

В работе представлена проблема управления в условиях неуверенности распределением ресурсов. Формулируется модель управляемого процесса и двухэтапная процедура управления. В первом этапе в структуре ЦЛ определяются множества допустимых состояний и множества допустимых управлений. Во втором этапе определяется правило оптимального управления. Рассуждения иллюстрируются численным примером.

RESOURCE ALLOCATION CONTROL PROBLEM IN THE PRESENCE OF UNCERTAINTY

S u m m a r y

A control problem in the presence of uncertainty is presented. Resource allocation problem states as example. A model and two stage control idea is formulated. In the first stage sets of feasible states are found in CL structure. The second stage is used to find an optimal control law. The considerations are illustrated by an example which is mainly concerned with the problem of feasible states.