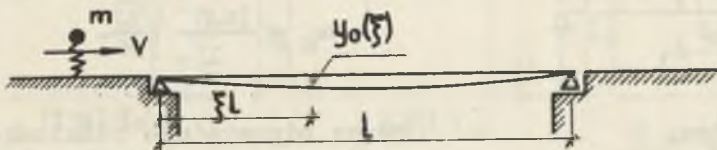


ZBIGNIEW KĄCZKOWSKI
Katedra Mechaniki Budowli
Politechniki Warszawskiej

O DRGANIACH BELKI MOSTOWEJ POD WPŁYWEM
PRZESUWAJĄCYCH SIĘ OBCIĄŻEŃ

Przedmiotem rozważań jest swobodnie podparta belka o stałym przekroju i równomiernie rozłożonej masie μ . Sztywność zginania belki oznaczamy przez EJ . W chwili $t = 0$ belka znajduje się w spoczynku, w położeniu równowagi statycznej. Jezdnia ma kształt znanej krzywej gładkiej o równaniu $y_0(\xi)$. Jezdnia po lewej stronie przyczółka jest prosta i pozioma, (rys. 1).



Rys. 1

Po belce przesuwa się ze stałą prędkością v pojazd o masie m , który w chwili $t = 0$ wjeżdża z lewej strony na belkę. Jako dynamiczny schemat pojazdu przyjęto masę skupioną na sprężynie o sztywności S $[T/m]^*$. W pracy nie uwzględniamy tłumienia ani w belce ani w sprężynie. Zadanie polega na znalezieniu ugięcia belki, jako funkcji współrzędnych czasoprzestrzennych.

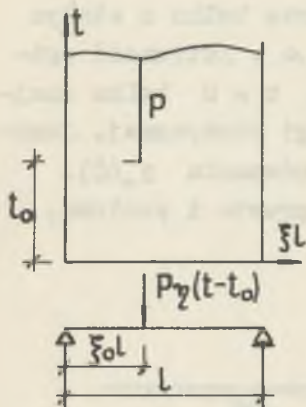
Na wstępie musimy rozwiązać kilka zadań pomocniczych. Chcąc znaleźć całkę znanego równania różniczkowego:

$$\frac{EJ}{I^4} \frac{\partial^4 y}{\partial \xi^4} + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(\xi, t) \quad (1)$$

o dowolnej prawej stronie $q(\xi, t)$, rozpatrzmy najpierw przypadek szczególny, w którym obciążenie wyraża funkcja:

$$q(\xi, t) = \frac{P}{l} \delta(\xi - \xi_0) \eta(t - t_0). \quad (2)$$

Tu δ oznacza funkcję Diraca a η - funkcję Heaviside'a. W układzie współrzędnych czaso-przestrzennych obciążenie to jest przedstawione na rys. 2. Ugięcie belki wywołane takim nagle przyłożonym obciążeniem jest znane [1]:



$$y_P = \frac{2Pl^3}{EJ} \sum_n \frac{1 - \cos \omega_n(t - t_0)}{(n\pi)^4} \sin n\pi \xi_0 \sin n\pi \xi. \quad (3)$$

gdzie

$$\omega_n = \frac{(n\pi)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}. \quad (4)$$

Rys. 2

Przez odpowiednie różniczkowanie funkcji (3) można z łatwością znaleźć inne rozwiązania podstawowe. Np. dla belki obciążonej nagle momentem M (rys. 3a) otrzymujemy następujące ugięcie:

$$y_M = \frac{M}{EI} \frac{\partial y_P}{\partial \xi_0} = \frac{2Ml^2}{EJ} \sum_n \frac{1 - \cos \omega_n(t - t_0)}{(n\pi)^3} \cos n\pi \xi_0 \sin n\pi \xi. \quad (5)$$

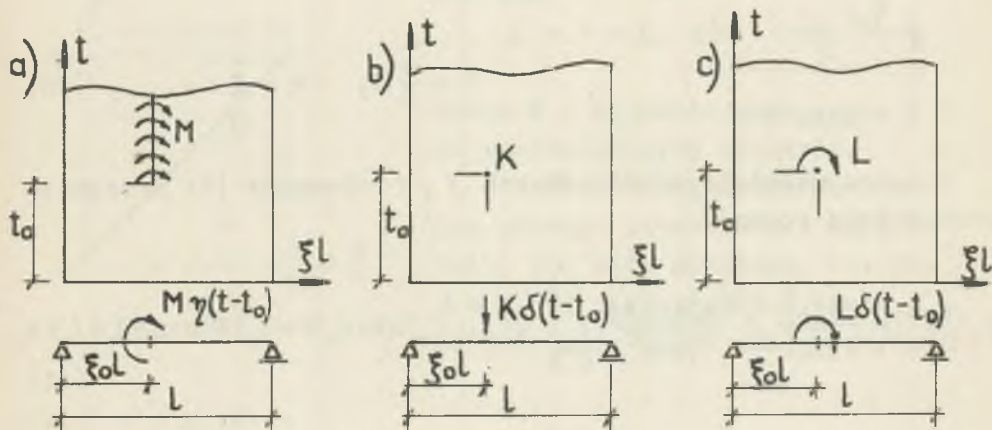
Podobnie dla impulsu $K = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P \Delta t_0$ (rys. 3b) ugięcie wynosi:

$$y_K = -\frac{K}{P} \frac{\partial y_P}{\partial t_0} = \frac{2Kl}{\sqrt{EJ\mu}} \sum_n \frac{\sin \omega_n(t - t_0)}{(n\pi)^2} \sin n\pi \xi_0 \sin n\pi \xi, \quad (6)$$

a dla impulsu $L = \lim_{\Delta t_0 \rightarrow 0} M \Delta t_0 = \lim_{\Delta \xi_0 \rightarrow 0} Kl \Delta \xi_0$ (rys. 3c) mamy:

$$y_L = -\frac{L}{M} \frac{\partial y_M}{\partial t_0} = \frac{L}{Kl} \frac{\partial y_K}{\partial \xi_0} = -\frac{L}{Pl} \frac{\partial^2 y_P}{\partial \xi_0 \partial t_0} =$$

$$= \frac{2L}{\sqrt{EJ\mu}} \sum_n \frac{\sin \omega_n (t-t_0)}{n\pi} \cos n\pi \xi_0 \sin n\pi \xi. \quad (7)$$



Rys. 3

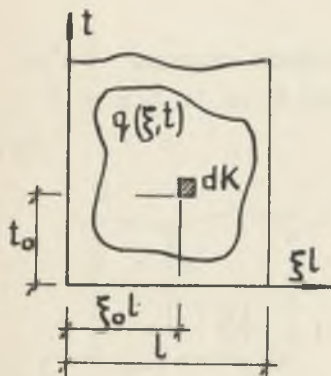
Wszystkie powyższe rozwiązania: (3), (5-7) ważne są tylko dla $t > 0$, bo dla $t < 0$ jest zawsze $y = 0$.

W oparciu o wzór (6) możemy już ogólnie rozwiązanie dla dowolnego obciążenia $q(\xi, t)$ zapisać w następującej formie (rys. 4):

$$y_q = \frac{2l^2}{\sqrt{EJ\mu}} \sum_n \frac{\sin n\pi \xi}{(n\pi)^2} \int_0^t \int_0^1 q(\xi_0, t_0) \sin \omega_n (t-t_0) \sin n\pi \xi_0 d\xi_0 dt_0. \quad (8)$$

Następne zadanie pomocnicze polega na znalezieniu ugięcia belki pod wpływem stałej siły P przesuwejcej się ze stałą prędkością v wzdłuż belki

(rys. 5). W tym przypadku obciążenie $q(\xi, t)$ wyraża następujący wzór:



Rys. 4

$$q(\xi, t) = \frac{P}{l} \delta\left(\xi - \frac{vt}{l}\right) = \frac{P}{l} \delta(\xi - \tau), \quad (9)$$

w którym występuje zmienna bezwymiarowa:

$$\tau = \frac{v}{l} t, \quad t = \frac{l}{v} \tau. \quad (10)$$

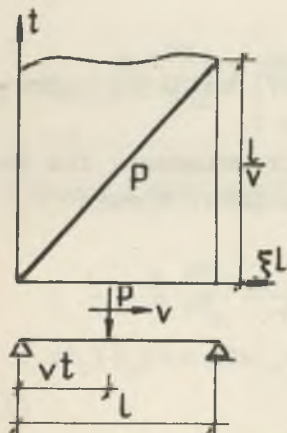
W nowym układzie współrzędnych ξ, τ równanie (8) przyjmuje następującą postać:

$$y_q(\xi, \tau) = \frac{2 l^3}{v \sqrt{EJ\mu}} \sum_n \frac{\sin n\pi\xi}{(n\pi)^2} \int_0^{\tau l} \int_0^{\tau l} q(\xi_0, \tau_0) \sin \beta_n(\tau - \tau_0) \sin n\pi\xi_0 d\xi_0 d\tau_0 \quad (11)$$

gdzie:

$$\beta_n = \omega_n \frac{l}{v} = \frac{(n\pi)^2}{\sigma}, \quad \sigma = vl \sqrt{\frac{\mu}{EJ}}. \quad (12)$$

Po podstawieniu wyrażenia (9) i wykonaniu całkowania otrzymujemy (por. też [1]):



Rys. 5

$$y(\xi, \tau) = \frac{2Pl^3}{EJ} \left[\sum_n \frac{\sin n\pi\xi \sin n\pi\tau}{(n\pi)^2 [(n\pi)^2 - \sigma^2]} - \sigma \sum_n \frac{\sin n\pi\xi \sin \beta_n\tau}{(n\pi)^3 [(n\pi)^2 - \sigma^2]} \right]. \quad (13)$$

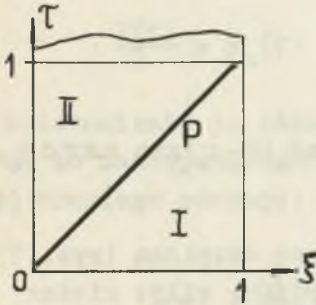
W pracy [2] pokazaliśmy, że pierwszy z szeregów (13) o słabszej zbieżności daje się wyrazić w zamkniętej formie:

$$y_I = \frac{Pl^3}{EJ\sigma^2} \left\{ \frac{\sin\sigma\xi' \sin n\pi\tau}{\sigma \sin\sigma} - \xi'\tau - 2\sigma^3 \sum_n \frac{\sin n\pi\xi \sin \beta_n \tau}{(n\pi)^3 [(n\pi)^2 - \sigma^2]} \right\} (\tau < \xi) \quad (14)$$

$$y_{II} = \frac{Pl^3}{EJ\sigma^2} \left\{ \frac{\sin\sigma\xi \sin\sigma\tau'}{\sigma \sin\sigma} - \xi\tau' - 2\sigma^3 \sum_n \frac{\sin n\pi\xi \sin \beta_n \tau'}{(n\pi)^3 [(n\pi)^2 - \sigma^2]} \right\} (\tau > \xi)$$

gdzie:

$$\xi' = 1 - \xi, \quad \tau' = 1 - \tau.$$



Rys. 6

Rysunek 6 wyjaśnia oznaczenia I i II poszczególnych obszarów.

W dalszych rozważaniach będzie nas głównie interesowało ugięcie belki pod siłą skupioną, tj. dla $\xi = \tau$. Po zastąpieniu ξ przez τ na podstawie wzoru (14) otrzymujemy:

$$y(\tau, \tau) = P y_B(\tau) = \frac{Pl^3}{EJ\sigma^2} \left\{ \frac{\sin\sigma\tau \sin\sigma(1-\tau)}{\sigma \sin\sigma} - \tau(1-\tau) - 2\sigma^3 \sum_n \frac{\sin n\pi\tau \sin \beta_n \tau}{(n\pi)^3 [(n\pi)^2 - \sigma^2]} \right\}. \quad (15)$$

Wreszcie, gdy po belce ze stałą prędkością przesuwa się siła dowolnie zmienna w czasie, $P(\tau)$, to na podstawie równania (11) otrzymujemy:

$$y(\xi, \tau) = \frac{2 l^2}{\sqrt{EJ\mu}} \sum_n \frac{\sin n\pi\xi}{(n\pi)^2} \int_0^\tau P(\tau_0) \sin \beta_n (\tau - \tau_0) \sin n\pi\tau_0 d\tau_0 \quad (16)$$

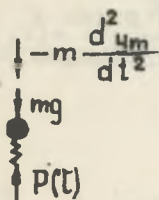
Siłą $P(\tau)$ działającą na belkę jest siła w sprężynie (resorze) pojazdu. Siłę tę można przedstawić w postaci sumy dwóch składników.

$$P(\tau) = mg + X(\tau). \quad (17)$$

Pierwszy z nich, mg , oznacza ciężar własny pojazdu (g jest przyspieszeniem ziemskim), a drugi, $X(\tau)$, jest dodatkową siłą wywołaną skracaniem się lub wydłużaniem sprężyny. Podstawiając teraz τ w miejsce ξ i wykorzystując związek (17) oraz (15) otrzymujemy ugięcie belki w miejscu przyłożenia dowolnie zmiennej w czasie siły $P(\tau)$:

$$y(\tau, \tau) = y_b(\tau) = mg y_B(\tau) + \frac{2 l^2}{v \sqrt{EJ\mu}} \sum_n \frac{\sin n\pi \xi}{(n\pi)^2} \int_0^\tau X(\tau_0) \sin \beta_n(\tau - \tau_0) \sin n\pi \tau_0 d\tau_0. \quad (18)$$

Rozpatrzmy z kolei masę skupioną (rys. 7), na którą działają następujące siły: ciężar własny mg , oddziaływanie sprężyny $-P(\tau)$ i siła bezwładności $-m d^2 y_m / dt^2$. Wszystkie te siły muszą spełniać warunek równowagi dynamicznej:



Rys. 7

$$-m \frac{d^2 y_m}{dt^2} + mg - P(t) = 0. \quad (19)$$

Wprowadzamy i tu bezwymiarową współrzędną τ i po wykorzystaniu związku (17) dochodzimy do następującego równania różniczkowego:

$$\frac{d^2 y_m}{d\tau^2} = -\frac{l^2}{mv^2} X(\tau). \quad (20)$$

Uwzględniając warunki początkowe ruchu masy skupionej:

$$y_m(0) = \frac{mg}{g}, \quad \frac{dy_m}{d\tau}(0) = 0, \quad (21)$$

całkę równania różniczkowego (20) zapisujemy następująco:

$$y_m(\tau) = \frac{mg}{S} - \frac{1^2}{mv^2} \int_0^\tau (\tau - \tau_0) X(\tau_0) d\tau_0. \quad (22)$$

Znamy już teraz przesunięcia dolnego końca sprężyny: $y_0 + y_b$ i górnego końca: y_m . W obu równaniach, które te przesunięcia opisują pozostaje jednak jako niewiadoma wielkość siły $X(\tau)$. Niewiadomą tę wyznaczymy z warunku, że różnica między obu przesunięciami jest proporcjonalna do siły w sprężynie:

$$\frac{P(\tau)}{S} = y_m(\tau) - y_b(\tau) - y_0(\tau), \quad (\xi = \tau). \quad (23)$$

Po podstawieniu do równania (23) związków (18) i (22) dochodzimy do następującego równania całkowego typu *V o l t e r r y* drugiego rodzaju:

$$X(\tau) + \frac{S1^2}{mv^2} \int_0^\tau X(\tau_0) K(\tau, \tau_0) d\tau_0 = SF(\tau), \quad (24)$$

którego jądro K oraz wyraz wolny F zawierają nieskończone szeregi:

$$K(\tau, \tau_0) = \tau - \tau_0 + \frac{2m}{\mu l} \sigma \sum_n \frac{\sin \alpha_n (\tau - \tau_0)}{(n\pi)^2} \sin n\pi\tau \sin n\pi\tau_0, \quad (25)$$

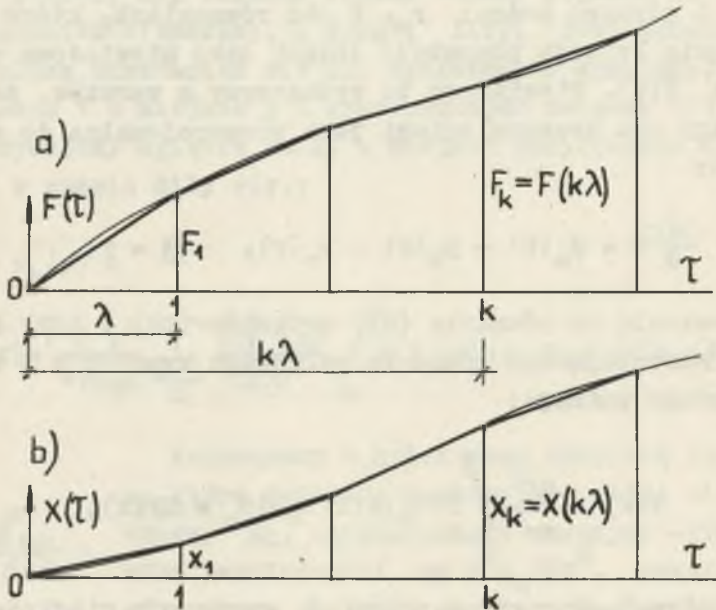
$$F(\tau) = - y_0(\tau) -$$

$$- \frac{mg1^3}{EJ\sigma^2} \left[\frac{\sin \sigma \tau \sin \sigma (1-\tau)}{\sigma \sin \sigma} - \tau(1-\tau) - 2\sigma^3 \sum_n \frac{\sin n\pi\tau \sin \alpha_n \tau}{(n\pi)^3 [(n\pi)^2 - \sigma^2]} \right]. \quad (26)$$

Z tego też względu metoda iteracyjna nie bardzo nadaje się do rozwiązania równania (24). Równanie to rozwiązujemy numerycznie.

Przedział, w którym ważne jest rozwiązanie: $0 < \tau < 1$ dzielimy na s możliwie małych równych części:

$$\lambda = 1/s \quad (27)$$



Rys. 8

Wykresy znanej funkcji F i poszukiwanej funkcji X aproksymujemy za pomocą linii łamanych (rys. 8). Rezygnując ze ścisłego spełnienia równania (24) w każdym punkcie przedziału $(0,1)$, chcemy spełnić je w sposób przybliżony w poszczególnych punktach podziału: $1, 2, \dots, s$. W ten sposób równanie całkowe (24) przechodzi w układ równań algebraicznych:

$$X_k + \frac{S1^2}{mv^2} \sum_{i=1}^k \int_{(i-1)\lambda}^{i\lambda} \left[X_{i-1} \frac{i\lambda - \tau_0}{\lambda} + X_i \frac{\tau_0 - (i-1)\lambda}{\lambda} \right] K(k\lambda, \tau_0) d\tau_0 = SF_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, s. \quad (28)$$

z którego wynika następujący wzór rekurencyjny dla kolejnych wartości X_k :

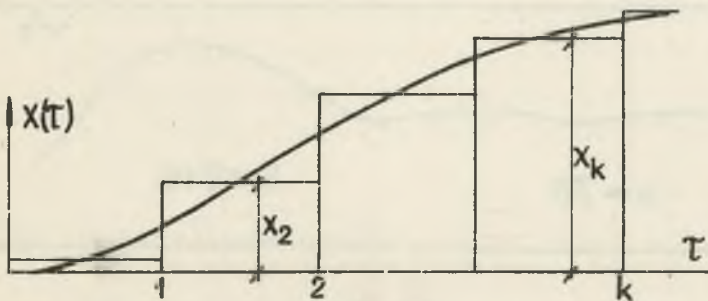
$$X_k = \frac{F_k - \frac{1^2}{mv^2} \sum_{i=1}^{k-1} X_i B_{ik}}{\frac{1}{S} + \frac{1^2}{mv^2} \int_{(k-1)\lambda}^{k\lambda} K(k\lambda, \tau_0) \frac{\tau_0 - (k-1)\lambda}{\lambda} d\tau_0}, \quad (29)$$

gdzie:

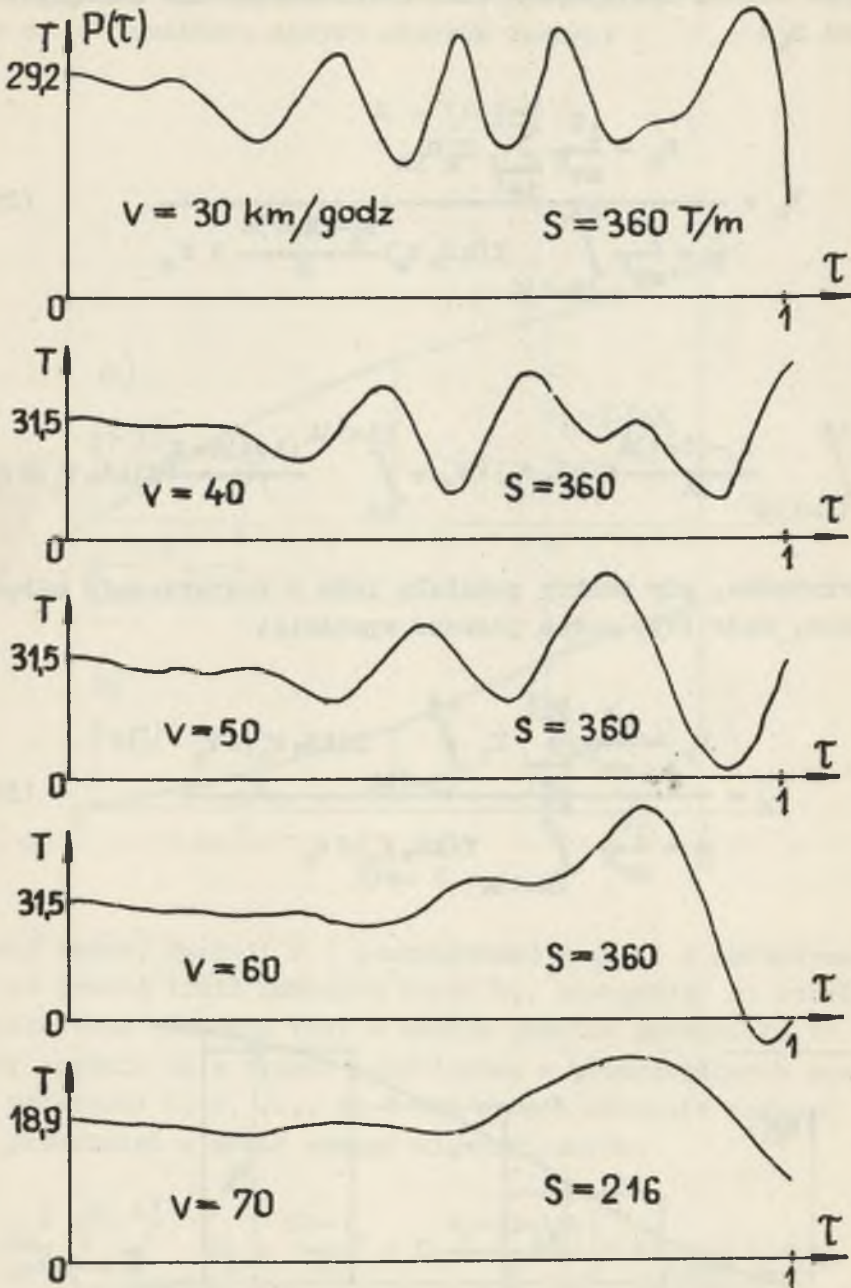
$$B_{ik} = \int_{(i-1)\lambda}^{i\lambda} \frac{\tau_0 - (i-1)\lambda}{\lambda} K(k\lambda, \tau_0) d\tau_0 + \int_{i\lambda}^{(i+1)\lambda} \frac{(i+1)\lambda - \tau_0}{\lambda} K(k\lambda, \tau_0) d\tau_0.$$

W przypadku, gdy punkty podziału leżą w dostatecznie małych odstępach, wzór (29) można jeszcze uprościć:

$$X_k = \frac{F_k - \frac{1^2}{mv^2} \sum_{i=1}^{k-1} X_i \int_{(i-1)\lambda}^{i\lambda} K(k\lambda, \tau_0) d\tau_0}{\frac{1}{S} + \frac{1^2}{mv^2} \int_{(k-1)\lambda}^{k\lambda} K(k\lambda, \tau_0) d\tau_0}. \quad (30)$$



Rys. 9



Rys. 10

Wówczas wartości X_1 nie są wartościami występującymi na końcach przedziałów, lecz przedstawiają wielkości średnie z poszczególnych przedziałów. Niewiadoma $X(\tau)$ jest aproksymowana linią schodkową (rys. 9).

Wzory (29) i (30) nadają się bardzo dobrze do zaprogramowania na elektroniczną maszynę cyfrową. W Katedrze Mechaniki Budowli na Wydziale Inżynierii Budowlanej Politechniki Warszawskiej Bronisław Wyborski wykonał pracę dyplomową na ten temat. Dla danych wartości liczbowych dotyczących sztywności belki i sprężyny oraz masy belki i pojazdu, przy założeniu $y_0 = 0$ zostały wykonane odpowiednie obliczenia na maszynie ZAM-2.

Wyniki dla rozmaitych prędkości v i różnych pojazdów zostały na rys. 10 przedstawione graficznie. Znajomość wielkości przesuwającej się siły umożliwia na podstawie wzoru (16) określić ugięcie belki a następnie siły wewnętrzne. W ten sposób zadanie zostało rozwiązane.

LITERATURA

- [1] Timoshenko S.: *Vibration problems in engineering*, 2 ed., Toronto - New York - London 1937.
- [2] Kączkowski Z.: *Vibration of a beam under a moving load*, *Proceed. Vibr. Probl.*, 1963, 4, nr 4, 357-373.

КОЛЕБАНИЯ МОСТОВОЙ БАЛКИ ВЫЗЫВАЕМЫЕ ВЛИЯНИЕМ
ДВИЖУЩИХСЯ НАГРУЗОК

Р е з ю м е

Вопрос упругой весомой балки, соединенной упруго с перемещающейся массой, приведено к интегральному уравнению Вольтери второй степени. Уравнение решено при помощи цифровой вычислительной машины.

ON THE VIBRATIONS OF A BRIDGE GIRDER UNDER
THE ACTION OF MOVING LOADS

S u m m a r y

Problem of an elastic ponderable beam connected in an elastic way with a passing mass has been reduced to the integral VOL-TERRY's equation of the second kind. The equation has been solved by means of a digital computer.