ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: BUDOWNICTWO z. 20 Nr kol. 201

STANISŁAW ANDRUSZEWICZ
Katedra Budowy Mostów
Politechniki Krakowskiej

DYNAMICZNE ODDZIAŁYWANIA OBCIĄŻEŃ RUCHOMYCH NA MOSTY

1. Postawienie zadania

Zagadnienie oddziaływań dynamicznych w ogólności sprowadza się do rozwiązania problemu, w jaki sposób należy statykę z praktycznie wystarczającą dokładnością uzupełnić, ażeby otrzymać zbliżone do rzeczywistości podstawy do wymiarowania konstrukcji mostowych obciążonych siłami okresowo zmiennymi, wywołującymi drgania.

Dotychczasowa praktyczna czynność projektowa inżynierów ogranicza się do zastosowania kilku empirycznych współczynników dynamicznych φ, przez które mnoży się obciążenie ruchome R, otrzymując w ten sposób zastępcze obciążenie spoczynkowe

$$P = \varphi \cdot R, \tag{1}$$

przy czym dla mostów kolejowych stalowych

$$\varphi = 1 + \frac{27}{30 + l} \leq 1,6 \tag{2a}$$

i dla mostów drogowych stalowych

$$\varphi = 1 + \frac{10}{20 + l} \leq 1,4 \tag{2b}$$

W tych wzorach l oznacza rozpiętość przęsła, a zatem wpływ wstrząsów uzależnia się wyłącznie i tylko od rozpiętości l. I na tym koniec, przy czym ta metoda od 120 lat cieszy się nieustannym powodzeniem na całej kuli ziemskiej.

Od dziesiątków lat ponawiano próby oparcia powyższych empirycznych wzorów na zasadach naukowych i próbowano dać odpowiedź na pytanie, jak zachowują się mosty pod działaniem okresowo zmiennych obciążeń ruchomych o znanej wielkości, położeniu i częstości oddziaływań. Odpowiedź na to pytanie jest trudna i przynależy do zagadnień dynamiki.

W moście występują naraz rozmaite formy drgań, a więc drgania pionowe, poziome i skrętne. Inaczej drga przęsło kratowe jako całość, inaczej drgają jego poszczególne pręty, inaczej poszczególne elementy prętów. Pozostaje więc tak wymiarować konstrukcję mostu, aby w najniekorzystniejszym przypadku występujące naprężenia materiałów nie przekraczały granicy sprężystości.

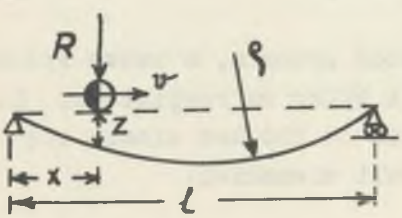
W czasie przebiegu pojazdu przez most głównymi czynnikami oddziaływań dynamicznych są:

1) prędkość przebiegu obciążenia bez uderzeń,
2) siła odśrodkowa kół napędowych pojazdu,
3) uderzenia wywołane nierównością drogi (np. styki szyn, dylatacje),
4) rezonans obrotów kół pojazdu z drganiami własnymi obciążonego dźwigara mostowego,
5) drgania wywołane przez hamowanie pojazdów,
6) współczynniki tłumienia drgań w moście.

2. Wpływ prędkości pojazdów

Spotyka się poglądy, że zasadniczym działaniem pojazdu, związanym z prędkością jego przejazdu na most jest siła odśrodkowa

$$c = \frac{R}{g} \cdot \frac{v^2}{\varrho}.$$



Rys. 1

Stąd współczynnik dynamiczny według rys. 1:

$$\varphi = 1 + \frac{v^2}{g} \cdot \frac{1}{\varrho} = 1 + \frac{v^2}{g} \cdot \frac{Rl}{3EJ} \tag{3}$$

To daje dla rozpiętości $l = 20$ m oraz nacisku 5 kół lokomotywy kusej (tj. bez tendra) $R = 5 \times 10 = 50$ Ton o rozstawie osi 1,5 m na dźwigar stalowy szerokostopowy I P 1000, swobodnie na obu końcach podparty, dla $J = 6{,}45 \cdot 10^{-3}$ m^4 przy prędkości jazdy $v = 100$ km/godz = 28 m/sek i przyspieszeniu ziemskim $g = 9{,}81$ m/sek^2

$$\varphi = 1 + \frac{28^2}{9{,}81} \cdot \frac{50 \cdot 20}{3 \cdot 21 \cdot 10^6 \cdot 6{,}45 \cdot 10^{-3}} = 1{,}2$$

Jednakowoż tę wartość współczynnika φ można zredukować, dając dźwigarom wypukłość do góry, określaną w przepisach mostowych jako podniesienie wykonawcze.

3. Częstość drgań jako znamię mostu. Wpływ rezonansu

Każdy most posiada dwa ważne znamiona:

1) znamię statyczne tj. ugięcie "z" oraz
2) znamię dynamiczne tj. cykliczną częstość drgań własnych ω, zależną od sztywności EJ ustroju drgającego.

Pytanie z jaką częstotliwością występują drgania w moście i jaka jest postać drgania, jest bardzo ważne dla określenia rezonansu oraz krytycznej prędkości jazdy.

Stosunek częstości swobodnych drgań własnych ω przęsła mostowego do częstości obrotów kół napędowych pojazdu α nazywa się strojeniem mostu. Odróżniamy mosty nisko strojone gdy $\omega < \alpha$ oraz mosty wysoko strojone gdy $\omega > \alpha$. Krytyczny przypadek gdy $\omega = \alpha$ oznacza rezonans drgań. Ideałem byłoby projektowanie mostów wysoko strojonych, co nie zawsze ma miejsce. Ponieważ cykliczną częstością drgań własnych belki mostowej obliczamy podług wzoru

$$\omega = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot J \cdot g}{q + \frac{63}{31} \cdot \frac{R}{l}}} \qquad (4)$$

przeto im większa rozpiętość l oraz im cięższy dźwigar mostowy, tym niższa jest częstość jego drgań własnych i tym niższe strojenie.

Tłumienie drgań w mostach stalowych jest na ogół małe, zaś w mostach żelazobetonowych duże. Jeśli założyć analogię zjawisk dynamicznych w mostach i fundamentach pod maszyny to wpływ tłumienia drgań można uwzględnić posługując się następującym wzorem na współczynnik dynamiczny

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha^2}{\varepsilon^2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\omega}\right)^2}} \tag{5}$$

Tu Δ oznacza logarytmiczny dekrement tłumienia drgań, który zwykle przyjmujemy: dla żelbetu $\Delta = 0{,}31$, dla muru ceglanego $\Delta = 0{,}157$, dla konstrukcji stalowej $\Delta = 0{,}05$. Jeżeli więc w mostach stalowych pominiemy tłumienie Δ jako nieznaczne, to wtedy uproszczony wzór na współczynnik dynamiczny opiewa:

$$\varphi = \frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{\omega^2}} \tag{6}$$

Najniekorzystniejszy stan drgań wypada, gdy przęsło mostowe drga w półfali jak na rys. 1 o okresie $\frac{T1}{2}$, czyli gdy rozpiętość

$$l = V \cdot t = V \cdot \frac{T_1}{2}$$

a ponieważ $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$, zatem krytyczna prędkość pojazdu

$$V_k = \frac{2l}{T_1} = \frac{l}{\pi} \cdot \omega \quad \text{albo} \quad \omega = \frac{\pi \cdot V_k}{l} \tag{7}$$

Rezonans wystąpi gdy $\alpha = \omega$,
przeto

$$V_k = \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{EJg}{q + \frac{63}{31} \cdot \frac{R}{l}}} \tag{8}$$

Dla naszego wyżej podanego przykładu z belką szerokostopową I p 1000 o ciężarze własnym wraz z nawierzchnią q = 0,36 T/m przy braku tłumienia wypadnie krytyczna prędkość rezonansowa

$$V_k = \frac{3,14}{20} \cdot \sqrt{\frac{135000 \cdot 9,81}{0,36 + \frac{63}{31} \cdot \frac{50}{20}}} = 78 \text{ m/sek} = 280 \text{ km/godz.}$$

oraz przynależna częstość drgań własnych belki mostowej w jednej sekundzie, wyrażona w hercach:

$$\nu_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{V_k}{2l} = \frac{78}{40} \text{ Hz} \sim 2 \text{ Hz}$$

Stwierdzono, że istnieje zależność pomiędzy częstością drgań własnych ν a rozpiętością mostu i z tej przyczyny wprowadzono w przepisach mostowych współczynniki dynamiczne zależne tylko od rozpiętości przęsła l.

Dotychczas prędkości pojazdów kolejowych nie przekraczają połowy wyżej obliczonej wartości krytycznej V_k = 280 km/godz i wynoszą V = 140 km/godz. Przynależny współczynnik dynamiczny φ otrzymamy, podstawiając

$$\alpha = \frac{\pi \cdot V}{l} = \frac{3,14}{20} \cdot 39 = 6,12$$

oraz

$$\omega = \frac{\pi V_k}{l} = \frac{3,14}{20} \cdot 78 = 12,25$$

Wówczas podany wyżej we wzorze (6) współczynnik dynamiczny przy pominięciu tłumienia drgań opiewa:

$$\varphi = \frac{1}{1 - \left(\frac{V}{V_k}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{6,12}{12,25}\right)} = 1,33 \tag{9}$$

Przy oddziaływaniach dynamicznych uwzględniano dotychczas tylko wpływ lokomotywy natomiast pomijano wpływ taboru, ponieważ sądzono, że ten ostatni wykazuje dążność do tłumienia drgań mostu.

W mostach żelazobetonowych, gdzie tłumienie drgań jest duże, wypada ze wzoru (5) rezonansowy współczynnik dynamiczny:

$$\varphi = \frac{\pi}{\Delta} = \frac{3,14}{0,31} = 10 \tag{10}$$

4. Naprężenie dynamiczne

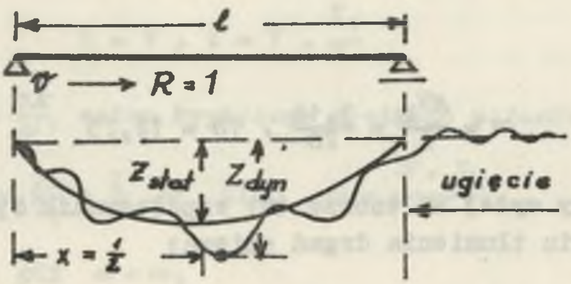
Na ogół problem drgań mostu sprowadzał się dotychczas do rozwiązania zadania, jak dalece występujące w elementach mostu naprężenia dodatkowe na skutek drgań powiększają obliczone statyczne naprężenia materiałów.

Zwykle otrzymuje ten współczynnik dynamiczny postać

$$\varphi_\sigma = \frac{\sigma_{dyn}}{\sigma_{stat}} \tag{11}$$

lub

$$\varphi_z = \frac{z_{dyn}}{z_{stat}} \tag{12}$$



Rys. 2

Oprócz powyższych czynników konieczne jest ustalenie postaci (formy) drgania przęsła mostowego, którą na ogół przy posłużeniu się analizą harmoniczną wyrażamy za pomocą równania

$$Z_{(t)} = A_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \cdot \sin \omega t \tag{13}$$

i tu ważną rolę odgrywa zagadnienie ustalenia największych amplitud drgania:

$$A_1 = A_{max} = \varphi_{max} \cdot z_{stat} = \frac{\varphi \cdot R}{m \cdot \omega^2} \leq A_{dopuszczalne} \tag{14}$$

gdzie: $m = \frac{q}{g}\int_0^l dx$ oznacza masę przęsła mostowego.

Przy wymiarowaniu konstrukcji przęsła mostowego można by posłużyć się dynamicznymi momentami gnącymi i dynamicznymi siłami poprzecznymi, które przy pominięciu oporu tłumienia drgań opiewają:

dynamiczny moment gnący:

$$M_x = \varphi \frac{4ql^2}{\pi^3} \sin\frac{\pi x}{l} \sin\omega t = \frac{l^2}{\pi^2} \cdot \frac{q}{g} \cdot \omega^2 z_{(t)} \tag{15}$$

dynamiczna siła poprzeczna:

$$Q_x = \varphi \frac{4ql}{\pi^2} \cos\frac{\pi x}{l} \sin\omega t\, \frac{l}{\pi} \cdot \frac{q}{g} \omega^2 \frac{\partial z_{(t)}}{\partial x} \tag{16}$$

Natomiast przy uwzględnieniu oporu tłumienia drgań dochodzi jeszcze w powyższych wzorach wpływ przynależnego ciężaru

$$\frac{\Delta}{\pi} \cdot \omega \cdot \frac{q}{g} \cdot \frac{\partial z_{(t)}}{\partial t} \ (T/m)$$

Dla porównania analogiczne wzory na statyczne napięcia opiewają następująco:

statyczny moment gnący:

$$M_x = \frac{q}{2} \cdot x(l - x)$$

statyczna siła poprzeczna:

$$Q_x = q\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

Dla środka belki swobodnie podpartej na obu końcach przy obciążeniu równomiernym rozłożonym q (T/m) wypada przy pominięciu tłumienia drgań
największa amplituda ugięcia:

$$A_1 = \frac{4}{\pi^5} \cdot \frac{ql^2}{EJ} \cdot \varphi$$

największy dynamiczny moment gnący:

$$\max M = \frac{4ql^2}{\pi^3} \cdot \varphi$$

i największa dynamiczna siła poprzeczna:

$$\max Q = \frac{4ql}{\pi^2} \cdot \varphi$$

5. Inne wpływy

Wpływ hamowania pojazdu na środku przęsła mostowego może spowodować wzrost obciążenia na oś pojazdu w wysokości 10–15% obciążenia statycznego. W pewnych przypadkach ten wpływ może nawet podwoić drgania wywołane przez pojazd poruszający się po moście.

Uderzenia wywołane nierównością nawierzchni na moście, stykami szyn, spłaszczeniem kół, mogą wywierać duży wpływ na mostach o małej rozpiętości. Natomiast w mostach o dużej rozpiętości one nie odgrywają większej roli. Jeśli przez $h_{stat.}$ (h_{st}) oznaczymy wysokość spadania na styku szyn ruchomego ciężaru jadącego z prędkością V, to wpływ dynamiczny uderzenia uwzględnimy przez wprowadzenie współczynnika dynamicznego:

$$\varphi = \frac{V}{\sqrt{g \cdot h_{st}}} \tag{17}$$

Wpływ niezrównoważonych mas na kołach napędowych pojazdów wywołuje kołysanie się i kiwanie się pojazdów, co z kolei wpływa na most. Ten wpływ obliczamy dla największej dopuszczalnej prędkości pojazdu V i traktujemy jako obciążenie statyczne, dodawane do nacisków osi pojazdu o rozmaitej wielkości, lecz najwyżej $P = 0{,}15\ R \cdot \sin \alpha t$.

Naturalną ochroną, jaka broni most przed nadmiernymi drganiami, jest tłumienie drgań. W mostach o dużej rozpiętości tłumienie jest małe, drgania utrzymują się przez dłuższy czas. Natomiast w mostach o małej rozpiętości wpływ tłumienia drgań jest wyraźny.

Najniekorzystniejsze oddziaływania dynamiczne w mostach kolejowych wywołują nie lokomotywy pociągów pospiesznych z dużymi średnicami kół, lecz parowozy pociągów towarowych z ich małymi średnicami kół oraz kuse tendrzaki.

Jeżeli chodzi o prędkość rozprzestrzeniania się drgań, to obliczamy ją podług wzoru $V = \sqrt{E/\gamma}$, przy czym E oznacza współczynnik sprężystości podłużnej materiału, zaś γ oznacza gęstość materiału, tj. ciężar właściwy podzielony przez przyspieszenie ziemskie. W mostach stalowych pomierzona prędkość rozprzestrzeniania się drgań wynosi $V = 4{,}4$ km/sekundę, zaś w mostach betonowych ponad 2 km/sekundę.

6. Wnioski

Należy zaznaczyć, że dotychczas stosowana metoda, polegająca na uwzględnieniu wpływów dynamicznych przez pomnożenie obciążenia spoczynkowego przepisowym współczynnikiem dynamicznym φ, daje tylko przybliżone wyniki. Natomiast ważnym punktem wyjściowym dla obliczenia rozmaitych dynamicznych wielkości oraz pierwszorzędnym kryterium każdorazowego stanu przęseł mostowych może być ich częstość drgań własnych ω, pomijana w dotychczasowych przepisach mostowych.

W latach 1960-1965 Katedra Budowy Mostów Politechniki Krakowskiej wykonywała liczne badania drgań mostów drogowych i kolejowych przy prędkościach pojazdów do 60 km/godz. Tu okazało się, że przy tych prędkościach ugięcia dynamiczne są tego samego rzędu co ugięcia statyczne pod długotrwałym ciężarem spoczynkowym i że największe ugięcia występują, gdy pojazd przekroczył połowę rozpiętości mostu. Na ogół w mostach żelbetowych pomierzone ugięcia statyczne i dynamiczne nie przekraczają $\frac{1}{2000}$ rozpiętości przęsła mostowego przy obciążeniach ruchomych dla danej klasy mostu.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ВЛИЯНИЯ ПОДВИЖНЫХ НАГРУЗОК НА МОСТЫ

Р е з ю м е

В работе рассмотрено некоторые взгляды на динамические расчеты мостов с учетом скорости средств передвижения и частоты собственных колебаний мостов.

DYNAMIC ACTIONS OF MOVABLE LOADS ON BRIDGES

S u m m a r y

Discussion of some opinions on the dynamic computations of bridges, taking into consideration the speed rate of vehicles and the frequency of bridges own vibrations.