

JÓZEF WRANIK

OBLICZANIE IZOTROPOWYCH TARCZ PROSTOKĄTNYCH PRZY ZASTOSOWANIU
ZASTĘPCZYCH USTROJÓW KRATOWYCH

Streszczenie. W pracy wskazuje się na możliwość obliczania tarcz przez wprowadzenie kratownic zastępczych, uzyskaną dzięki maszynom cyfrowym.

1. Wstęp

W pracy podjęto próbę rozwiązania tarcz prostokątnych obciążonych na brzegach lub w obszarze tarczy, przez zastąpienie ich odpowiednio dobranym ustrojem kratowym o wysokiej liczbie statycznej niewyznaczalności. Wykorzystano przy tym stwierdzony w pracy [2] fakt, że stan naprężenia w tarczy izotropowej może być określony na podstawie znajomości sił w prętach odpowiedniej kratownicy zastępczej.

Sposób określania stanu naprężenia w tarczy poprzez rozwiązanie odpowiednio dobranej kratownicy nie znalazł początkowo szerszego zastosowania. Okazało się, że konieczne do wykonania obliczenia były bardzo pracochłonne. Powodem tego były ograniczone środki techniczne, stojące wówczas do dyspozycji statyków.

Dopiero trudności związane z rozwiązywaniem pewnych szczególnych zadań z teorii sprężystości spowodowały nawrót do zarzuconych dawniej koncepcji obliczeniowych [1], [3], [4], [5].

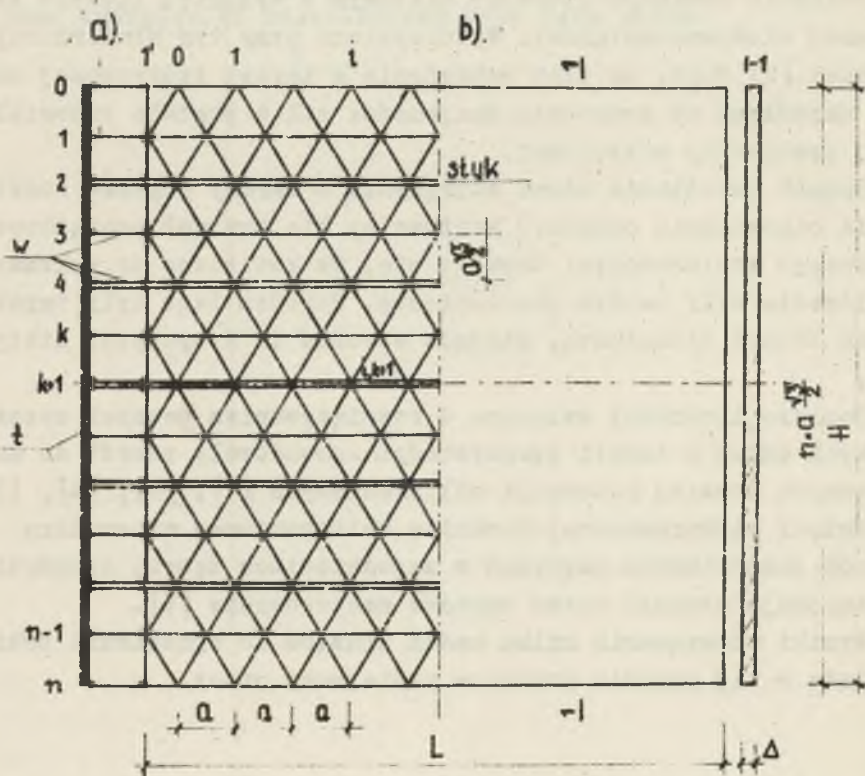
Dzięki elektronicznej technice obliczeniowej wspomniany sposób poszukiwania naprężeń w zagadnieniach teorii sprężystości znajduje obecnie coraz szersze zastosowanie [6].

Wyniki rozwiązania kilku zadań służące do wyrobienia sobie poglądu w tej sprawie podano w niniejszej pracy.

2. Zastępczy ustrój kratowy

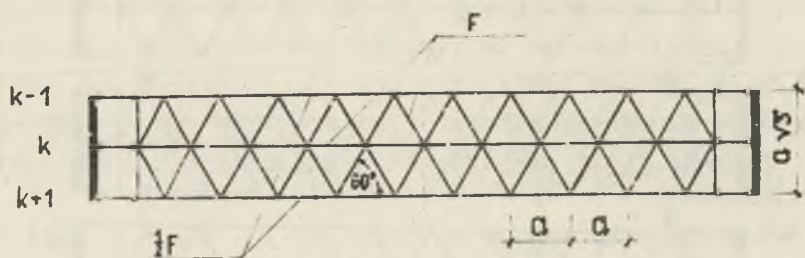
Propozowany przez autora ustrój zastępczy uwidoczniiony jest na rys. 1a. Ustrój ten składa się z trzypasowych elementów kratowych o siatce krzyżulców zbudowanej z trójkątów równobocznych (rys. 2). Do czół elementów kratowych przyłączone są za pośrednictwem wahaczów "w" stanowiących przedłużenie pasów, sztywne pręty przyczółkowe "t". Poszczególne elementy kratowe połączone są z sobą przegubami 1, k+1. Sztywne pręty przyczółkowe połączone są z sobą również przegubami.

Jak wykazały przeprowadzone przez autora badania (ustęp 3), pręty przyczółkowe gwarantują dla podstawowych przypadków obciążenia (czyste ściskanie, czyste zginanie i czyste ścinanie)



Rys. 1

identyczność stanu odkształcenia elementów kratowych ze stanem odkształcenia odpowiednich tarcz.



Rys. 2

Można stwierdzić [3], że przy zastosowanym rodzaju siatki przeprowadzone rozwiązania są ważne tylko dla tarczy wykonanej z materiału o współczynniku Poissona $\nu = \frac{1}{3}$, że pola F poprzecznych przekrojów poszczególnych elementów kratownicy zastępczej muszą mieć następujące wartości: $F = a \cdot \Delta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ dla krzyżulców i pasów środkowych oraz $F_1 = \frac{1}{2} F = a \cdot \Delta \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ dla pasów skrajnych, gdzie a i Δ oznaczają odpowiednio podstawę trójkąta równobocznego i grubość tarczy.

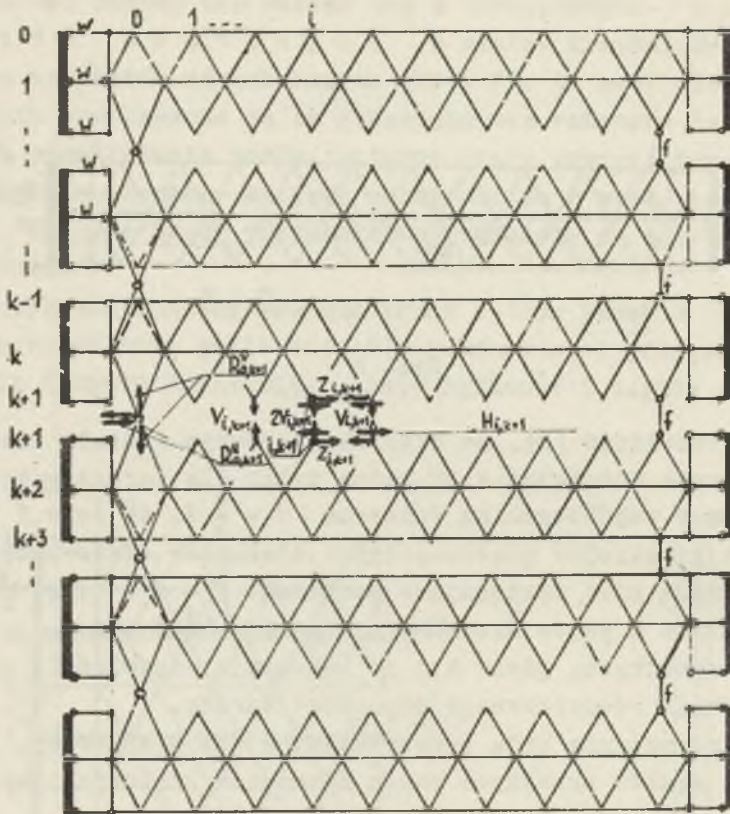
Dalsze rozważania będą przeprowadzone dla kratownicy, której liczba węzłów skrajnych pasów elementów kratowych jest parzysta.

2.1. Rozwiązanie zastępczego ustroju kratowego

Kratownicę zastępczą (rys. 1a) rozwiązano metodą sił, przyjmując ustrój podstawowy statycznie wyznaczalny przedstawiony na rysunku 3, zbudowany z szeregu ułożonych nad sobą statycznie wyznaczalnych elementów kratowych.

Dla dowolnego obciążenia tarczy przedstawionej na rys. 1b, zamienionego uprzednio na równoważny układ sił skupionych przyłożonych w węzłach kratownicy, otrzymano układ liniowych równań algebraicznych o 128 niewiadomych. Trudności związane z rozwiązaniem tak dużej liczby równań zmniejszono przez wykorzystanie symetrii ustroju, dzięki której rozwiązanie tych równań zastą-

pió można było rozwiązaniem czterech układów równań zawierających co najwyżej 24 niewiadome.

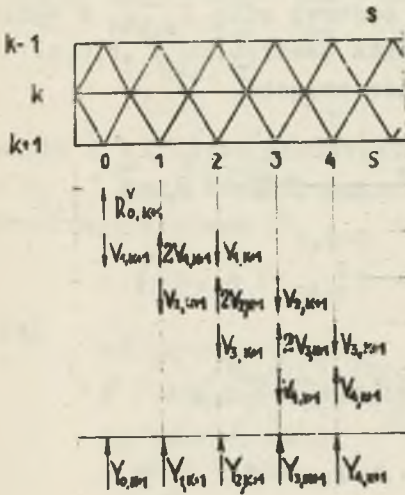


Rys. 3

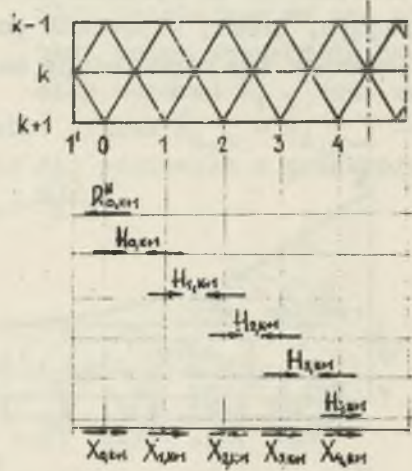
W obliczeniach posłużono się grupowymi niewiadomymi pionowymi $V_{1,k+1}$ i poziomymi $H_{1,k+1}$ (rys. 3). Oprócz tych niewiadomych występują również w miejscach usuniętych pasów niewiadome siły $Z_{1,k+1}$.

Dla obliczenia współczynników układów równań przyjęto jako wielkości jednostkowe: $V_{1,k+1} = \sqrt{3}$, $H_{1,k+1} = 1$, $Z_{1,k+1} = 1$. Aby otrzymać rzeczywiste wartości oddziaływań pionowych $V_{1,k+1}$, należy ich wartości bezpośrednio otrzymane z rozwiązania układu równań pomnożyć przez $\sqrt{3}$.

Zastosowane niewiadome grupowe V i H związane są ze składowymi pionowymi Y i poziomymi X wzajemnego oddziaływania na siebie elementów kratowych (rys. 4 i rys. 5), zależnościami



Rys. 4



Rys. 5

$$Y_{0,k+1} = R_{0,k+1}^V - V_{1,k+1}$$

$$Y_{1,k+1} = -V_{1-1,k+1} + 2V_{1,k+1} - V_{1+1,k+1}$$

(1)

$$X_{0,k+1} = H_{0,k+1} - R_{0,k+1}^H$$

$$X_{1,k+1} = H_{1,k+1} - H_{1-1,k+1}$$

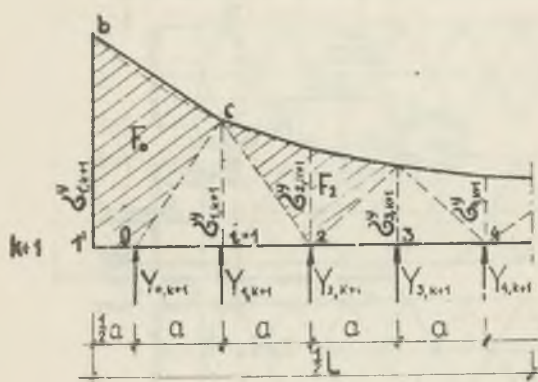
gdzie:

$R_{0,k+1}^V$ - oddziaływanie wahaczy pionowych wywołane przez obciążenie zewnętrzne w ustroju podstawowym,

$R_{0,k+1}^H$ - oddziaływanie poziome w lewym węźle skrajnym (rys. 3) wywołane przez obciążenie zewnętrzne w ustroju podstawowym.

2.2. Naprężenia normalne $\sigma_{1,k+1}^y$

Naprężenia normalne $\sigma_{1,k+1}^y$ występujące w otoczeniu punktu $1, k+1$, wyznaczono przy założeniu, że skupionej sile $Y_{1,k+1}$ w węźle pośrednim, odpowiada trójkątne pole wykresu naprężeń przedstawione na rysunku 6. Wyjątek stanowi siła $Y_{0,k+1}$ w węźle skrajnym, której odpowiada powierzchnia czworoboku i', b, c, o . Założeniom tym odpowiadają następujące związki.



Rys. 6

$$Y_{0,k+1} = \frac{1}{4}(3\sigma_{1,k+1}^y + \sigma_{1,k+1}^y) a \cdot \Delta ; \quad (2)$$

$$Y_{1,k+1} = \sigma_{1,k+1}^y \cdot a \cdot \Delta ; \quad \text{dla } i \geq 1,$$

$$\text{stąd otrzymano rzędne naprężeń normalnych}$$

$$\sigma_{1,k+1}^y = \frac{1}{3}(4 Y_{0,k+1} - Y_{1,k+1}) \frac{1}{a \cdot \Delta} ; \quad (3)$$

$$\sigma_{1,k+1}^y = Y_{1,k+1} \cdot \frac{1}{a \cdot \Delta} ; \quad \text{dla } i \geq 1.$$

2.3. Naprężenia styczne $\tau_{1,k+1}$

Postępując podobnie jak w p.2.2 otrzymano rzędne naprężeń $\tau_{1,k+1}$ (rys. 7)

$$\tau_{0,k+1} = \frac{1}{3} X_{0,k+1} \cdot \frac{1}{a \cdot \Delta} ;$$

$$\tau_{1,k+1} = X_{1,k+1} \cdot \frac{1}{a \cdot \Delta} \quad \text{dla } i \geq 1. \quad (4)$$

2.4. Naprężenia normalne

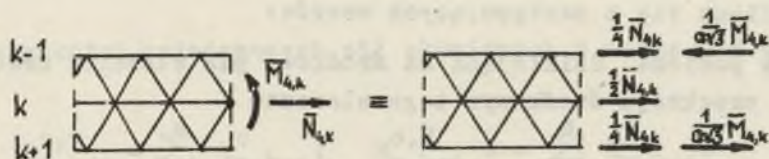
$$\sigma_{1,k+1}^x$$

Rozpatrzmy przekrój pionowy w osi symetrii k-tego elementu kratowego rys. 8. Siły działające na ten element można sprowadzić do siły osiowej $\bar{N}_{4,k}$ oraz mo-

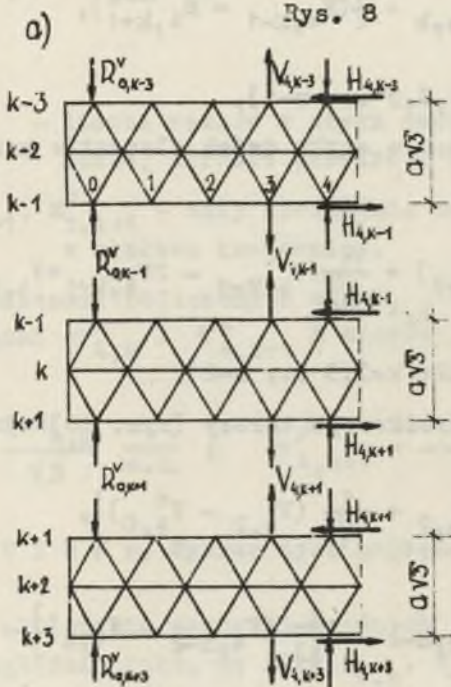


Rys. 7

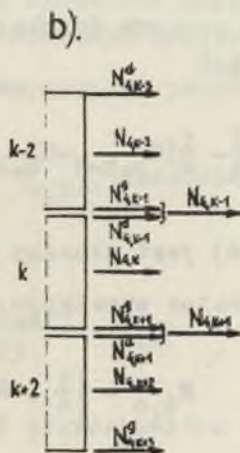
mentu $\bar{M}_{4,k}$. Łatwo stwierdzić, że siła osiowa $\bar{N}_{4,k} = H_{4,k-1} - H_{4,k+1}$, zaś momenty pochodzące od sił poziomych w przekroju środkowym wynoszą $(H_{4,k-1} + H_{4,k+1}) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$,



Rys. 8



Rys. 9



a od sił pionowych $(V_{4,k-1} - V_{4,k+1}) \cdot a$. Układy tych sił przedstawiono na rys. 9a. Redukcja wszystkich sił, położonych po lewej stronie przekroju, do wspomnianych par sił (rys. 9a) wynika z faktu, że zastosowane grupowe niewiadome stanowią równoważące się układy sił (rys. 4 i rys. 5). Siłę \bar{N}_{4k} działającą w osi elementu kratowego k , zastąpiono trzema siłami działającymi w liniach pasów tego elementu kratowego o wartościach $\frac{1}{4} \bar{N}_{4k}$ dla pasów skrajnych i $\frac{1}{2} \bar{N}_{4k}$ dla pasa środkowego. Moment M_{4k} zastąpiono parą sił o wartościach $\frac{1}{a\sqrt{3}} \bar{M}_{4k}$ działających w liniach pasów skrajnych elementu kratowego (rys. 8).

W środkowym przekroju całej kratownicy zastępczej otrzyma się tym samym układ sił przedstawiony na rys. 9b. Wartości tych sił oblicza się z następujących wzorów:

siła pozioma działająca na środkowy pas elementu kratowego k w przekroju środkowym tego elementu

$$N_{4k} = \frac{1}{2} \bar{N}_{4,k} = \frac{1}{2}(H_{4,k-1} - H_{4,k+1}), \quad (5)$$

(wzór jest ważny dla $k=1,3,5 \dots n-1$),

siła pozioma działająca w styku dwóch elementów kratowych k i $k+2$

$$N_{4,k+1} = \left[-\frac{1}{4}(H_{4,k-1} - H_{4,k+3}) + \frac{1}{\sqrt{3}}(V_{4,k-1} - 2V_{4,k+1} + V_{4,k+3}) \right] \quad (6)$$

(wzór (6) jest słuszny dla $k=3,5 \dots n-2$).

Siły skrajne przekroju środkowego tarozy (rys. 10) wynoszą

$$N_{4,0} = \left[\frac{1}{4} \cdot H_{4,2} + \frac{1}{\sqrt{3}} (V_{4,2} - V_{4,0}^0) \right], \quad (6a)$$

$$N_{4,n} = \left[-\frac{1}{4} H_{4,n-2} + \frac{1}{\sqrt{3}} (V_{4,n-2} - V_{4,n}) \right].$$

Można udowodnić, że jeżeli każdą z sił obciążenia zewnętrznego przyłożonych w węzłach pasa, zastąpimy przez układ grupowy, podobny do stosowanego przy obliczaniu sił wewnętrznych, wówczas wzór (6) będzie słuszny również dla $k=1$ i $k=n-1$. Te następne grupowe siły obciążenia zewnętrznego w i -tym węźle $k+1$ pasa obliczamy z następujących wzorów:

$$V_{1,k+1}^c = \sum_{r=1}^{i-1} x Y_{r,k+1}^o - 1 \sum_{r=1}^s Y_{r,k+1}^o; \quad (7)$$

$$H_{1,k+1}^o = - \sum_{r=1+1}^s X_{r,k+1}^o;$$

zaś wielkości pojedynczych sił skupionych w węźle 0 z wzorów:

$$R_{0,k+1}^{O,V} = \sum_{r=0}^s Y_{r,k+1}^o; \quad R_{0,k+1}^{O,H} = - \sum_{r=0}^s X_{r,k+1}^o;$$

gdzie:

s - liczba węzłów w styku dwóch elementów kratowych po jednej stronie przekroju środkowego tarozy,

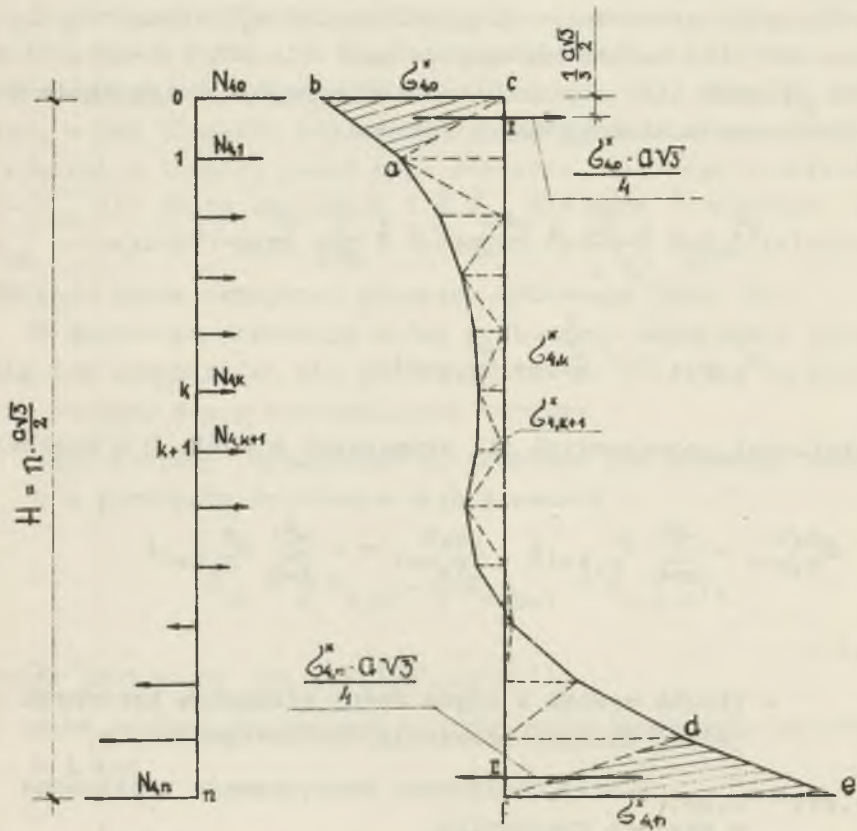
$Y_{r,k+1}^o, X_{r,k+1}^o$ - siły obciążenia zewnętrznego przyłożone w węzłach kratownicy.

Na podstawie obliczonych sił $N_{4,k}$ i $N_{4,k+1}$ znajdziemy rzędne naprężeń $\sigma_{4,k}^x$ i $\sigma_{4,k+1}^x$ z wzorców

$$\sigma_{4,k}^x = \frac{2 N_{4,k}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{a \cdot \Delta}; \quad \sigma_{4,k+1}^x = \frac{2 N_{4,k+1}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{a \cdot \Delta} \quad (8)$$

dla $k \neq 0$ i $k \neq n$. Wykres tych naprężeń przedstawiono na rysunku 10.

Przy obliczaniu wartości rzędnych $\sigma_{4,0}^x, \sigma_{4,n}^x$ (rys. 10) należy uwzględnić fakt, że siły $N_{4,0}, N_{4,n}$ nie przechodzą przez środek ciężkości trójkątów $a b c, d e f$ i obliczyć te rzędne



Rys. 10

z warunku równości momentów od sił $N_{4,0}$, $N_{4,n}$ i $\frac{1}{4}$ a $\sqrt{3} \sigma_{4,0}^x$, $\frac{1}{4}$ a $\sqrt{3} \sigma_{4,n}^x$ względem p. II, I. Siły $\frac{1}{4}$ a $\sqrt{3} \sigma_{4,0}^x$ i $\frac{1}{4}$ a $\sqrt{3} \sigma_{4,n}^x$ są wypadkowymi powierzchniami trójkątów a b c i d e f.

Otrzymamy więc

$$\sigma_{4,0}^x = \frac{(3n-1)N_{4,0} + N_{4,n}}{(3n-2)} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{a \cdot \Delta}$$

$$\sigma_{4,n}^x = \frac{(3n-1)N_{4,n} + N_{4,0}}{(3n-2)} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{a \cdot \Delta} \quad (9)$$

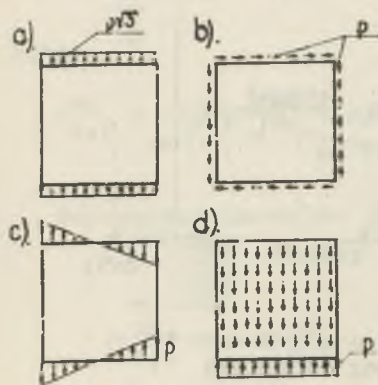
Naprężenia dla obciążeń znajdujących się wewnątrz obszaru tarczy będą w przypadku zastosowanej kratownicy ważne jedynie dla współczynnika Poissona $\nu = \frac{1}{3}$. Dowodu na to nie przeprowadza się w niniejszej pracy. Sposób obliczania tych naprężeń na podstawie znanego stanu naprężenia w kratownicy zasadniczo nie różni się od omówionego sposobu dla obciążeń brzegowych. Jednak przy obliczaniu naprężeń σ^x w styku, wzdłuż którego rozłożone jest obciążenie zewnętrzne, nie sumujemy sił z sąsiadujących z sobą elementów kratowych, jak to miało miejsce przy obciążeniu brzegowym. Tym samym w styku będą przyłożone dwie różne siły, które przy zamianie na odpowiadające im naprężenia będziemy rozpatrywać oddzielnie.

Wykres naprężeń σ^x i σ^y będzie w punkcie przyłożenia obciążenia zewnętrznego nieciągły, tzn. będzie w tym miejscu występował skok naprężeń.

3. Wyniki kilku obliczeń tarcz prostokątnych

W celu sprawdzenia poprawności stosowanego sposobu i dokładności wyników rozpatrzone zostały cztery przypadki elementarne, których rozwiązania ściśle są znane (rys. 11): a) czyste ściskanie, b) czyste ścinanie, c) czyste zginanie oraz d) obciążenie ciężarem własnym. Dla dwu pierwszych przypadków otrzymano, przy obciążeniu $p\sqrt{3}$ dla czystego ściskania i p dla czystego ścinania, wyniki z dokładnością do $2 \cdot 10^{-4}$ p. Stwierdzono,

że ten mały błąd jest wynikiem rozwiązywania równań o dużej ilości niewiadomych. Dla przypadku czystego zginania i obciążenia ciężarem własnym błąd jest nieco większy, lecz nie przekracza wartości 1% obciążenia głównego i wynika nie tylko z faktu ograniczonej dokładności rozwiązania równań algebraicznych, ale w głów-

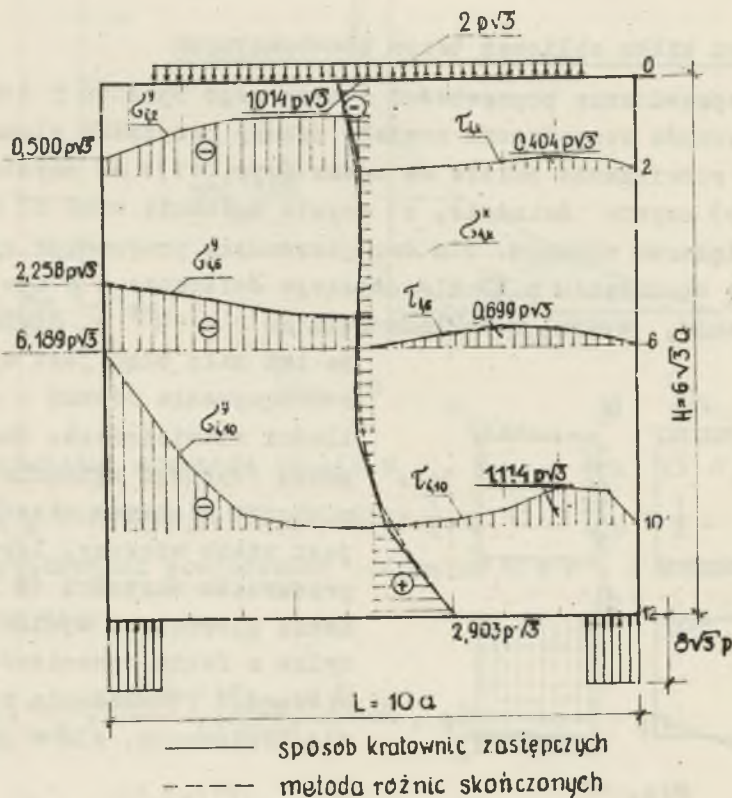


Rys. 11

nej mierze z przyjętej do obliczeń gęstości siatki kratownicowej.

Dla przypadków bardziej złożonego obciążenia niż w przypadkach elementarnych, przeprowadzono obliczenia tarczy, których wyniki porównano z wynikami otrzymanymi metodą różnic skończonych [7]. Na rys. 12 pokazano wyniki obliczeń tarczy kwadratowej swobodnie podpartej, obciążonej równomiernie wzdłuż brzegu górnego. Kratownicę zastępczą dla tej tarczy skonstruowano w sposób podany na rys. 1a.

W obliczeniach wykorzystano symetrię ustroju otrzymując dwa układy równań kanonicznych metody sił o 34 niewiadomych dla układu symetrycznego i 29 niewiadomych dla układu antysymetrycznego. Przyjęto, że grubość tarczy $\Delta = 1$.



Rys. 12

Jak widać z wykresów, różnice pomiędzy wynikami uzyskanymi sposobem kratownic zastępczych i metodą różnic skończonych są bardzo małe.

Otrzymane wyniki wskazały na możliwość posługiwania się sposobem kratownic zastępczych przy obliczaniu taroz. Dało to asumpt do przeprowadzania obliczeń dwu taroz, których rozwiązania nie są spotykane w literaturze technicznej:

- a) tarcza prostokątna (rys. 13),
- b) tarcza kwadratowa sowobodnie podparta obciążona równomiernie wzdłuż swojej poziomej osi symetrii (rys. 14).

Tarozę prcstokątną obciążoną na brzegach symetrycznie względem osi pionowej w sposób przedstawiony na rys. 13, rozwiązano dla stosunku boków $\frac{H}{L} = 2,85$. Przy wykorzystaniu symetrii ustroju wymagało to rozwiązania układów 19 i 20 równań.

Tarozę kwadratową (rys. 14) obciążoną wewnątrz obszaru, rozwiązano z wykorzystaniem symetrii ustroju względem osi poziomej. Dla składowego obciążenia symetrycznego, które występuje tylko na brzegu tarczy naprężenia obliczono wg wzorów podanych w p. 2.4. Dla składowego obciążenia antysymetrycznego, siły w linii obciążenia ($N_{4,6}$), obliczono z osobna dla części górnej i dolnej (patrz ustęp 2.4) wg wzoru

$$N_{4,6}^g = -N_{4,6}^d = \left[-\frac{1}{4} (H_{4,4} + 3 H_{4,6}) + \frac{1}{\sqrt{3}} (V_{4,4} - V_{4,6}^{og}) \right], \quad (10)$$

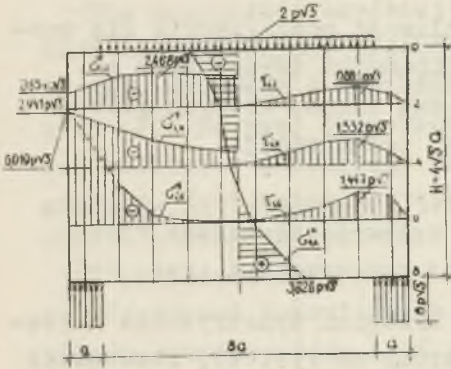
gdzie:

$$V_{4,6}^{og} = -10 p \sqrt{3} \text{ w wyniku zamiany obciążenia zewnętrznego na wielkości grupowe.}$$

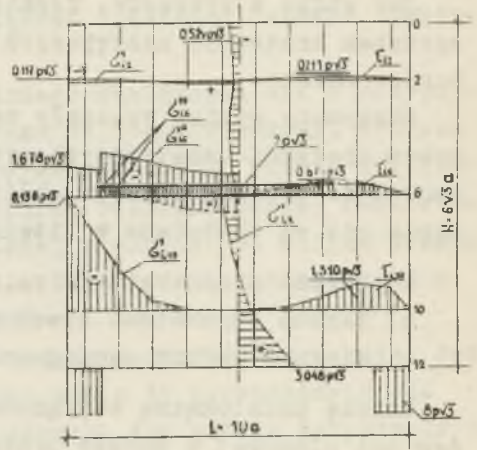
Naprężenia normalne $\sigma_{4,6}^{xg}$ w styku 6 obliczymy wg wzoru

$$\sigma_{4,6}^{xg} = -\sigma_{4,6}^{xd} = \frac{(3n-2)N_{4,0} + 2 N_{4,6}^g}{(3n-4)} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{a \cdot \Delta}, \quad (11)$$

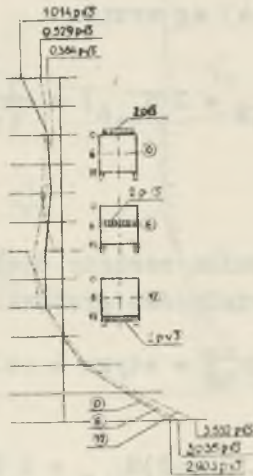
gdzie: $n = 12,$



Rys. 13



Rys. 14



Rys. 15

Wykresy naprężeń przedstawiono na rys. 14.

Na rys. 15 przedstawiono wykresy naprężeń σ_{4k}^x w tarczy kwadratowej dla trzech rozpatrzonych przypadków obciążeń. Jak widać, przy przesuwaniu się obciążenia z brzegu górnego na brzeg dolny naprężenia w części górnej maleją, zaś w dolnej rosną.

4. Wnioski

W oparciu o przytoczone wyniki można sformułować następujące wnioski.

1. Zastosowanie zastępczych kratownic przy obliczaniu tarcz staje się dzięki stojącej do dyspozycji elektronicznej technice obliczeniowej, możliwe w praktyce projektowej.

2. Przy przyjętej w pracy gęstości siatki dokładność wyników w rozpatrywanych przypadkach jest zadowalająca.

3. Z porównania sposobu kratownic zastępczych i różnic skończonych, przy gęstości siatek w przybliżeniu odpowiadających sobie, można wnioskować, że dokładność wyników obu sposobów jest podobna.

Porównanie sprawności obu sposobów obliczeń jest obecnie przedwczesne. W wyniku przeprowadzonych obliczeń wydaje się, że przy obliczaniu tarcz prostokątnych o stałej grubości obciążonych na brzegach, metoda różnic skończonych jest sprawniejsza.

Natomiast w przypadkach o wiele bardziej złożonych, aniżeli te, które zostały przedstawione w artykule, a to: tarcz wielotworowych, tarcz o niejednakowej grubości na swej wysokości, tarcz wzmocnionych słupami, tarcz skonstruowanych z różnych materiałów lub tarcz łączących w sobie kilka wyżej wymienionych cech, sposób kratownic zastępczych będzie prawdopodobnie korzystniejszy.

Pełne potwierdzenie tego wniosku jest jednak możliwe dopiero po bliższym zbadaniu sprawy.

LITERATURA

- [1] Grodecki Z.: Kratownice powierzchniowe w zastosowaniu do analizy bezmomentowego stanu napięcia otwartych powłok obrotowo symetrycznych. Zeszyt 12. Wrocław 1962. Politechnika Wrocławska.
- [2] Wieghardt K.: Über einen Grenzübergangung der Elastizitätslehre und seine Anwendung auf die Statik hochgradigstatisch unbestimmter Fachwerke. Verhandl d. Vereins d. Gewerbeleisses Bd. 1906.
- [3] Hrennikoff A.: Framework Method and its Technique for Solving Plane Stress Problems. Volum 9. International Association for Bridge and Structurel Engineering 1949.
- [4] Kloppel K.: Systematische Ableitung der Differentialgleichungen für ebene anisotrope Flächentragwerke. Der Stalbau 1960/2.
- [5] Rżanicyn A.D.: Predstawlenije spłosznowo izotropnowo uprugowo dieła w widie szarnirno - stierżniewoj systemu. Isledowanija po waprosom stroitelnoj mechaniki i teorii płas-ticznosti. Moskwa 1956.
- [6] Mc Cormic C.W.: Plane stress analysis. Part 1. Volum 89. Anglia 1963. Proceedings of the American Society of civil engeneers.
- [7] Andermann F.: Tarce prostokątne. Obliczenia statyczne. Warszawa 1966. Arkady.

РАСЧЁТ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ БОЛОК - СТЕНОК ПРИ ПОМОЩИ ЗАМЕНЯЮЩИХ
РЕШЕТЧАТЫХ ФЕРМ

Резюме

Цель работы это получение метода решения задач плоского напряженного состояния по пути замены болки - стенки решетчатой фермой, которую характеризует высокий ступень статической неопределимости.

В работе применена ферма с решеткой сложенной из равносторонних треугольников.

Решение системы наступило методом сил при чём применено групповые неизвестные.

Система около 30 уравнений решена на вычислительной машине. Соответственно подобрана основная система фермы в методе сил дает возможность перейти из найденных групповых сил к напряжениям, без необходимости исчисления сил в стержнях фермы.

CALCULATION OF RECTANGULAR SHIELDS BY APLICATION OF SUBSTITUTIONAL LATTICED SYSTEMS

Summary

The purpose of the paper is to find a way of solution of plane stress problems by replacing shields systems with high degree statically indeterminate trusses.

An equilateral triangle pattern truss, solved by means of the method of forces by use of "unknown groups" has been applied. Sets of about 30 equations have been solved by digital computers. Suitable chosen basic system of the force method has allowed on the direct computation of stress from the unknown groups without the necessity of calculation of truss member forces.