ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1969

Seria: BUDOWNICTWO z. 25 Nr kol. 264

Jan Kubik

METODA SIŁ I PRZEMIESZCZEŃ - UKŁADY LEPKOSPRĘŻYSTE

W referacie podamy równania metody sił i przemieszczeń dla ośrodka lepkosprężystego. Model ośrodka lepkosprężystego może służyć do opisu właściwości tych materiałów w których wpływ pełzania nie może zostać pominięty w obliczeniach (np. żelbet w pewnych warunkach). W układach hyperstatycznych pełzanie wyznacza zupełnie inny (aczkolwiek również liniowy) charakter zależności między siłami a przemieszczeniami, a tym samym inną postać równań metody sił i przemieszczeń. Równania te, podane dalej, zezwalają na rozwiązywanie hyperstatycznych układów ramowych. W szczególności zaś, na podstawie ich wyników można uzyskać rozeznanie w przegrupowywaniu się sił wewnętrznych w ustroju.

Ośrodek charakteryzują zależności:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, 0), \quad \tau \in [0, t], \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}, \; \mathring{\varepsilon} = \frac{\partial \mathring{u}}{\partial x} \tag{1}$$

$$\sigma = E\left[\varepsilon(\mathbf{x}, t) - \int_0^t \psi(t-\tau)\,\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)\, d\tau\right] \tag{2}$$

$$\varepsilon = E^{-1}\left[\sigma(\mathbf{x}, t) - \int_0^t \varphi(t-\tau)\,\sigma(\mathbf{x}, \tau)\, d\tau\right] \tag{3}$$

gdzie σ - jest naprężeniem ε - odkształceniem u - przemieszczeniem punktu $\mathbf{X}$ o współrzędnych x_1, x_2, x_3, $t = 0$; - układu prętowego π $\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \in \pi$ $X_i = (X_{1i}, X_{2i}, X_{3i}, 0)$ $\mathbf{X}_r = (X_{1r}, X_{2r}, X_{3r}, \tau_r)$ Φ, Ψ, $H(t)$ - są funkcjami: pełzania, relaksacji i Heaviside'a (równą jedności dla $t \geq 0$ i zeru dla $t < 0$).

Oznaczając przemieszczenie $U_{ij}(X_j, t)$ w miejscu X_i wywołane jednostkową siłą (stałą w czasie) $1(X_i)\,H(t)$ w miejscu X_i uzyskujemy: dla dowolnej siły $X_i(X_i, \tau)$ zależność

$$U_j(x_i, t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} X_i(x_i, \tau)\, U_{ij}(X_j, t-\tau)\, d\tau \tag{4}$$

Podobnie, oznaczając siłę $M_{ij}(x_j, t)$ w miejscu x_j wywołaną jednostkowym przemieszczeniem (stałym w czasie) $1(X_i)\,H(t)$ w miejscu X_i uzyskujemy dla dowolnego przemieszczenia $\varphi_{ij}(X_i, t)$ zależność:

$$M_j(X_i, t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_i(X_i, \tau)\, M_{ij}(X_j, t-\tau)\, d\tau \tag{5}$$

Uwzględniając również wpływ obciążenia $q_r(X_r, \tau, \tau_r)$ otrzymujemy układ równań metody sił dla układów lepkosprężystych:

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} X_i(\tau)\, U_{ij}(X_j, t-\tau)\, d\tau + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} q_r(x_r, \tau, \tau_r)\, U_{jr}(X_j, t-\tau)\, d\tau = 0 \tag{6}$$

($i, j = 1, 2 \ldots n$) po powtarzających się indeksach sumować) Analogiczny układ równań metody przemieszczeń uzyskujemy przyjmując dodatkowo, że $M_o(X_j, t)$ jest siłą uogólnioną w X_j układu geometrycznie wyznaczalnego, zaś $\varphi_o(X_j, \tau)$ przemieszczeniem w miejscu X_j w układzie geometrycznie wyznaczalnym:

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_i(X_i, \tau)\, M_{ij}(X_j, t-\tau)\, d\tau + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_o(X_r, \tau, \tau_r)\, M_{oj}(X_j, t-\tau)\, d\tau = M_o(X_j, t) \tag{7}$$

Metoda rozwiązania równań (6) i (7), będących układami równań całkowych Volttery o jądrach typu splotu opiera się na zastosowaniu transformacji Laplace'a.

W krańcowym przypadku układy (5) i (6) dają się sprowadzić do jednego równania całkowego Volttery II rodzaju.

Podane metody będą ilustrowane konkretnymi przypadkami rozwiązań układów ramowych.