

HENRYK HAT

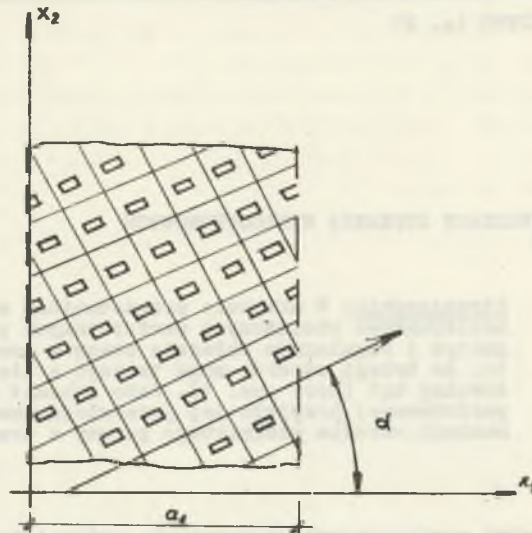
O PEWNYCH PRZYPADKACH ZGINANIA WIELOOTWOROWYCH  
PASM PŁYTOWYCH

Streszczenie: W artykule przedstawiono metodę obliczeń jednokierunkowo obciążonych perforowanych pasm płytowych, o gęstym i regularnym układzie otworów prostokątnych. Przyjęto, że brzegi otworów mogą tworzyć z kierunkiem obciążenia dowolny kąt (por. rys. 1). Jako schemat obliczeniowy płyty perforowanej przyjęto jej jednorodny model, oparty na równaniach ośrodką włóknistego podany w pracy [1].

1. Wstęp

Obliczenie płyt perforowanych na podstawie ogólnej teorii płyt Kirchhoffa prowadzi do rozwiązywania zagadnienia brzegowego dla równania różniczkowego ugięci płyty, które musi być spełnione w obszarze  $n + 1$  spójnym, gdzie  $n$  jest liczbą otworów. Gdy liczba otworów jest duża, uzyskanie na tej drodze rozwiązań, nawet przybliżonych, staje się praktycznie nieosiągalne. Dla płyt o gęstym i regularnym układzie otworów, jako schemat obliczeniowy płyty bywał w literaturze [2] przyjmowany schemat płyty ortotropowej bez otworów i o tak dobranych sżywnościach, by np. energia odkształcenia płyty ortotropowej pełnej, odpowiadała energii odkształcenia płyty perforowanej. Schemat ten, znany pod nazwą anizotropii konstrukcyjnej ztraca jakościowo charakter zachowania się płyty perforowanej, nie uwzględniając możliwości obrotów elementów takiej płyty, niezależnych od ich przesunięć (ugięć). Bardziej ogólny model obliczeniowy biorący pod uwagę zarówno obroty jak i przesunięcia elementów płyty perforowanej, podany był w pracy [1]; anizotropia konstrukcyjna jest szczególnym przypadkiem tego modelu.

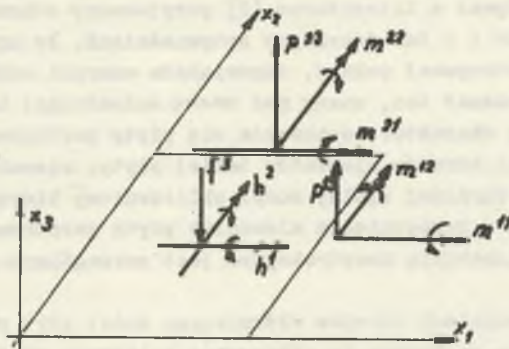
Oparty na równaniach ośrodką włóknistego model płyt perforowanych, znalazł zastosowanie zwłaszcza do obliczenia kolistych płyt perforowanych [3]. W tej pracy podamy jego zastosowanie do obliczenia perforowanych pasm płytowych, których fragment przedstawia rys. 1. Zakładamy, że pasmo jest jednokierunkowo obciążone; umożliwi to otrzymanie zamkniętej postaci końcowych wzorów. Uzyskane w pracy rozwiązanie można także bezpośrednio wykozystać do obliczenia jednokierunkowo obciążonych pasmowych siatek rusztowych [4].



Rys. 1

## 2. Podstawowe równania

Powierzchnię środkową płyty parametryzujemy prostokątnym układem współrzędnych kartezjańskich  $x_1, x_2$  zaznaczonym na rys. 1.



Rys. 2

Składowe gęstości sił przekrojowych i momentów pokazujemy na rys. 2; wielkości te odnoszą się nie bezpośrednio do płyty perforowanej, lecz do jej jednorodnego modelu obliczeniowego. Elementy płyty perforowanej doznają przesunięcia w kierunku prostopadłym do płaszczyzny  $x_1, x_2$ , oraz obrotów względem osi  $x_1 = \text{const.}, x_2 = \text{const.}$ , przechodzących przez środek elementu; stan przemieszczenia rozpatrywanej płyty perforowanej określamy więc funkcją ugięcia  $w_3(x_1)$  oraz funkcjami obrotów  $v_1(x_1)$  i  $v_2(x_1)$  kolejno względem osi  $x_1 = \text{const.}$  i  $x_2 = \text{const.}$  Te trzy składowe stanu prze-

mieszczenia w ogólnym przypadku są od siebie niezależne. Podstawowe równania dla pasma płytowego otrzymamy bezpośrednio z równań podanych w [1] przyjmując, że wszystkie funkcje zależą tylko od jednej zmiennej  $x_1$ . Równania geometryczne przyjmą postać

$$\begin{aligned} x_{11} &= \partial_1 v_1, & x_{12} &= \partial_1 v_2, & x_{21} &= 0, & x_{22} &= 0 \\ \varphi_1 &= \partial_1 w_3 + v_2, & \varphi_2 &= -v_1, \end{aligned} \quad (2.1)$$

w której  $x_{11}, x_{12}, \dots, \varphi_2$  są składowymi stanu odkształcenia. Związki między składowymi stanu odkształcenia a składowymi stanu napięcia prowadzą się do

$$\begin{aligned} m^{11} &= C^{1111} x_{11} + C^{1112} x_{12}, \\ m^{12} &= C^{1212} x_{12} + C^{1211} x_{11}, \\ m^{21} &= C^{1212} x_{12} + C^{2111} x_{11}, \\ m^{22} &= C^{2211} x_{11} + C^{2212} x_{12}, \\ p^{13} &= A^{1313} \varphi_1 + A^{1323} \varphi_2, \\ p^{23} &= A^{2323} \varphi_2 + A^{1323} \varphi_1, \\ C^{KLMN} &= C^{MNKL}, \quad A^{KLMN} = A^{MNKL}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

przy czym  $C^{1111}, C^{1112}, \dots, A^{1323}$  są znanymi składowymi tensorów sztywności sprężystej, zależnymi od materiałowej i geometrycznej struktury płyty perforowanej lub siatki rusztowej; budowę tych składowych podano w [1] w związku z czym nie będziemy jej tu omawiać. Równania równowagi wyrażające zależności składowych stanu napięcia z obciążeniami, mają postać

$$\begin{aligned} \partial_1 p^{13} + f^3 &= 0 \\ \partial_1 m^{11} + p^{23} + h^1 &= 0 \\ \partial_1 m^{12} - p^{13} + h^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Układ równań (2.1) - (2.3), który musi być spełniony dla  $0 < x_1 < a_1$  (por. rys. 1), należy uzupełnić warunkami brzegowymi; liczba tych warunków wynosi sześć, po trzy na każdym z brzegów  $x_1 = 0$  oraz  $x_1 = a_1$ . Przykładowo, dla brzegu doskonale sztywno utwierdzonego zachodzi

$$w_3 = v_1 = v_2 = 0, \quad (2.4)$$

dla brzegu swobodnie podpartego i nieobciążonego mamy

$$w_3 = 0, m^{12} = 0, m^{11} = 0 \quad (2.5)$$

lub

$$w_3 = 0, m^{12} = 0, v_1 = 0, \quad (2.6)$$

a dla brzegu swobodnego i nieobciążonego zachodzi

$$m^{12} = m^{11} = p^{13} = 0. \quad (2.7)$$

Warunki (2.5) zachodzą, gdy elementy brzegowe nie są usztywnione na obrót względem osi  $\chi_1 = \text{const.}$ , a warunki (2.6) - w przypadku przeciwnym.

### 3. Rozwiązanie ogólne

Rugując z układu równań (2.1) - (2.3) składowe stanu napięcia i składowe stanu odkształcenia, dochodzimy do następującego układu równań przemieszczeniowych

$$\begin{aligned} \partial_1 \left[ A^{1313} (\partial_1 w_3 + v_2) - A^{1323} v_1 \right] &= -r^3, \\ \partial_1 (c^{1111} \partial_1 v_1 + c^{1112} \partial_1 v_2) - A^{2323} v_1 + & \quad (3.1) \\ + A^{1323} (\partial_1 w_3 + v_2) &= -h^1, \\ \partial_1 (c^{1212} \partial_1 v_2 + c^{1211} \partial_1 v_1) - A^{1313} (\partial_1 w_3 + & \\ + v_2) &= +A^{1323} v_1 = -h^2. \end{aligned}$$

Całkując pierwsze z równań i korzystając z (2.2)<sub>5</sub>, mamy

$$A^{1313} (\partial_1 w_3 + v_2) - A^{1323} v_1 = p^{13}, \quad (3.2)$$

gdzie

$$p^{13}(\chi_1) = - \int_0^{\chi_1} r^3(\xi) d\xi + \bar{p}^{13} \quad (3.3)$$

$$\bar{p}^{13} \equiv p^{13}(0).$$



Podstawiając (3.2) do (3.1)<sub>3</sub> i ponownie całkując otrzymamy po wykorzystaniu (2.2)<sub>2</sub>

$$c^{1212} \partial_1 v_2 + c^{1211} \partial_1 v_1 = m^{12} \quad (3.4)$$

gdzie

$$m^{12}(x_1) = \int_0^{x_1} [p^{13}(\eta) - h^2(\eta)] d\eta + \bar{m}^{12}, \quad (3.5)$$

$$\bar{m}^{12} \equiv m^{12}(0).$$

Z (3.3) i (3.5) wynika

$$m^{12}(x_1) = \int_0^{x_1} \left[ - \int_0^{\eta} f^3(\xi) d\xi - h^2(\eta) \right] d\eta + \bar{p}^{13} x_1 + \bar{m}^{12}. \quad (3.6)$$

Składowe stanu napięcia  $p^{13}$ ,  $m^{12}$  są więc określone wzorami (3.3) i (3.6). Korzystając z (3.2) i (3.4) mamy następnie

$$\begin{aligned} \partial_1 w_3 + v_2 &= \frac{A^{1323}}{A^{1313}} v_1 + \frac{p^{13}}{A^{1313}}, \\ \partial_1 v_2 &= - \frac{c^{1211}}{c^{1212}} \partial_1 v_1 + \frac{m^{12}}{c^{1212}}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

gdyż zawsze  $c^{1212} \neq 0$ ,  $A^{1313} \neq 0$ . Na podstawie (3.7) można teraz równanie (3.1)<sub>2</sub> doprowadzić do postaci zawierającej tylko jedną niewiadomą funkcję  $v_1(x_1)$ . Po prostych przekształceniach otrzymamy

$$p \partial_1^2 v_1 - q v_1 = b, \quad (3.8)$$

gdzie oznaczono

$$p \equiv \frac{c^{1111} c^{1212} - (c^{1112})^2}{c^{1212}}, \quad q \equiv \frac{A^{1313} A^{2323} - (A^{1323})^2}{A^{1313}}, \quad (3.9)$$

$$b \equiv -h^{1*} - \frac{A^{1323}}{A^{1313}} p^{13} - \frac{c^{1112}}{c^{1212}} \partial_1 m^{12}.$$

Jeżeli uda nam się wyznaczyć całkę ogólną  $V_1(X_1)$  równania różniczkowego (3.8), to z (3.7)<sub>2</sub> wyznaczmy postać funkcji  $V_2(X_1)$

$$V_2(x_1) = - \int_0^{x_1} \left( \frac{C}{C} \frac{1211}{1212} \partial_1 V_1 - \frac{m}{C} \frac{12}{1212} \right) d\xi + \bar{v}_2; \quad (3.10)$$

$$\bar{v}_2 \equiv V_2(0)$$

a następnie ze wzoru (3.7)<sub>1</sub> określimy  $w_3(X_1)$

$$w_3(X_1) = - \int_0^{X_1} \left( v_2 - \frac{A}{A} \frac{1323}{1313} v_1 - \right. \\ \left. - \frac{p}{A} \frac{13}{1313} \right) d\xi + \bar{w}_3; \quad \bar{w}_3 \equiv w_3(0). \quad (3.11)$$

Funkcja  $m^{12}$  występująca w (3.10) jest znana; przedstawia ją wyrażenie (3.6). Również funkcja  $p^{13}$  we wzorze (3.11) jest znana, zgodnie z (3.3). Tym samym rozwiązanie ogólne zagadnienia jest określone równaniem różniczkowym (3.8) oraz wzorami (3.10) i (3.11), przy oznaczeniach (3.3), (3.6). W zagadnieniu występuje sześć stałych całkowania; są to  $\bar{p}^{13}$ ,  $\bar{m}^{12}$ ,  $\bar{v}_2$ ,  $\bar{w}_3$  oraz dwie stałe całki ogólnej równania (3.8). Stałe te określimy na podstawie trzech warunków dla brzegu  $X_1 = 0$  oraz trzech warunków dla brzegu  $X_1 = a_1$ .

#### 4. Pasmo jednorodne

Jeżeli pasmo jest jednorodne, to składowe  $C^{1111}$ ,  $C^{1112}$ , .....,  $A^{1323}$  są stałymi. Równanie różniczkowe (3.8) napiszemy wtedy w postaci

$$\partial_1^2 v_1 - \alpha^2 v_1 = b \cdot p^{-1}, \quad (4.1)$$

gdzie oznaczono

$$\alpha^2 \equiv \frac{q}{p} = \text{const.} \quad (4.2)$$

Całka ogólna równania (4.1) ma postać

$$v_1(X_1) = \bar{v}_1 \text{ch}(\alpha X_1) + \bar{\bar{v}}_1 \text{sh}(\alpha X_1) + \frac{1}{\alpha p} \int_0^{X_1} b(\xi) \text{sh}[\alpha(X_1 - \xi)] d\xi, \quad (4.3)$$

gdzie  $\bar{v}_1$ ,  $\bar{\bar{v}}_1$  są stałymi całkowania, przy czym  $\bar{v}_1 \equiv v_1(0)$ .

Korzystając z (3.9)<sub>3</sub> oraz (3.3) i (3.6), a ponadto oznaczając

$$F(X_1) \equiv \frac{1}{\alpha p} \left[ -h^1 + \frac{C^{1112}}{C^{1212}} h^2 + \left( \frac{A^{1323}}{A^{1313}} + \frac{C^{1112}}{C^{1212}} \right) \int_0^{X_1} f(\xi) d\xi \right], \quad (4.4)$$

wzór (4.3) po przekształceniach doprowadzimy do postaci

$$v_1(X_1) = \bar{v}_1 \operatorname{ch}(\alpha X_1) + \bar{v}_1 \operatorname{sh}(\alpha X_1) + \frac{1 - \operatorname{ch}(\alpha X_1)}{\alpha^2 p} \left( \frac{A^{1323}}{A^{1313}} + \frac{C^{1112}}{C^{1212}} \right) \bar{p}^{13} + \int_0^{X_1} F(\xi) \operatorname{sh}[\alpha(X_1 - \xi)] d\xi. \quad (4.5)$$

Na podstawie (3.10), dla pasma jednorodnego mamy teraz

$$v_2(X_1) = -\frac{C^{1211}}{C^{1212}} [v_1(X_1) - \bar{v}_1] + \frac{1}{C^{1212}} \int_0^{X_1} \int_0^\varphi \left[ -\int_0^\eta f^3(\xi) d\xi - h^2(\eta) \right] d\eta d\varphi + \frac{\bar{p}^{13} X_1^2}{2 C^{1212}} + \frac{\bar{m}^{12} X_1}{C^{1212}} + \bar{v}_2 \quad (4.6)$$

a następnie na podstawie (3.11) otrzymujemy po wyliczeniach

$$w_3(X_1) = \frac{C^{1211}}{C^{1212}} \left[ \int_0^{X_1} v_1(\xi) d\xi - \bar{v}_1 X_1 \right] + \frac{A^{1323}}{A^{1313}} \int_0^{X_1} v_1(\xi) d\xi - \frac{1}{A^{1313}} \int_0^{X_1} \int_0^\xi f^3(\xi) d\xi d\varphi + \frac{1}{C^{1212}} \int_0^{X_1} \int_0^\xi \int_0^\varphi \left[ -\int_0^\eta f^3(\mu) d\mu - h^2(\eta) \right] d\eta d\varphi d\xi + \frac{\bar{p}^{13} (X_1)^3}{6 C^{1212}} + \frac{\bar{p}^{13} X_1}{A^{1313}} - \frac{\bar{m}^{12} (X_1)^2}{2 C^{1212}} - \bar{v}_2 X_1 + \bar{w}_3. \quad (4.7)$$

Do wzorów (4.6) i (4.7) należy za  $V_1$  podstawić wyrażenie (4.5). Wyrażenia (4.5) - (4.7), zależne od sześciu stałych całkowania  $\bar{p}^{13}$ ,  $\bar{m}^{12}$ ,  $\bar{v}_2$ ,  $\bar{w}_3$ ,  $\bar{v}_1$ ,  $\bar{v}_1$ , stanowią rozwiązanie ogólne pasm jednorodnych.

### 5. Pasma ortotropowe

Przyjmijmy teraz, że kąt  $\alpha$  pokazany na rys. 1 jest równy zero. Wtedy kierunki ortotropii perforowanego pasma płytowego pokrywają się z prostymi  $X_1 = \text{const.}$  oraz  $X_2 = \text{const.}$  Dla przypadku tego w związkach (2.2) zachodzi

$$C^{1112} = C^{1211} = C^{2111} = C^{2212} = A^{1323} = A^{2313} = 0 \quad (5.1)$$

co wynika bezpośrednio ze wzorów podanych w [1]. Równanie różniczkowe (3.8) redukuje się do

$$C^{1111} \sigma_1^2 v_1 - A^{2323} v_1 = -h^1 \quad (5.2)$$

wzór (3.10) przyjmuje postać

$$v_2(X_1) = \int_0^{X_1} \frac{m^{12}}{C^{1212}} d\xi + \bar{v}_2 \quad (5.3)$$

a wzór (3.11) sprowadza się do

$$w_3(X_1) = - \int_0^{X_1} \left( v_2 - \frac{p^{13}}{A^{1313}} \right) d\xi + \bar{w}_3 \quad (5.4)$$

przy czym występujące w (5.3) i (5.4) funkcje  $m^{12}$  oraz  $p^{13}$  są określone wyrażeniami (3.3) i (3.6). Obrotu  $v_2(X_1)$  oraz ugięcie  $w_3(X_1)$  mogą być teraz wyznaczone w sposób niezależny od obrotów  $v_1(X_1)$ ; zagadnienie rozpada się więc na dwa zagadnienia od siebie niezależne. Zgodnie z (3.3) i (3.6), w wyrażeniach (5.3) i (5.4) występują cztery stałe całkowania  $\bar{v}_2$ ,  $\bar{w}_3$ ,  $\bar{p}^{13}$  oraz  $\bar{m}^{12}$ , które można wyznaczyć obecnie niezależnie od dwóch stałych całki ogólnej równania (5.2). Wzory (5.2) - (5.3) upraszczają się znacznie, gdy pasmo jest nie tylko ortotropowe lecz także jednorodne; odnośne wyrażenia otrzymamy wtedy przyjmując (5.1) we wzorach (4.5) - (4.7).

Przypadek ten w odniesieniu do siatek rusztowych był omówiony w pracy [5].



## LITERATURA

- [1] Cz. WOŹNIAK, Bending and stability problems of plates with lattice, structure, Arch. Mech. Stos., 6, 18 (1966).
- [2] J.W. JAKOWLEW, Issledowanie żestkosti gустo perforirowanych plit, Trudy Chark. Awiacionnogo Instituta, 1965.
- [3] P. KLEMM, Cz. WOŹNIAK, Perforated cirkular plates under large deflection, Arch. Mech. Stos., 1, 19 (1967).
- [4] Cz. WOŹNIAK, Modele ciągłe gęstych siatek prętowych, Arch.Inż. Łąd., 2, 11 (1965).
- [5] B. BOCZKAJ, H. HAT. Jednokierunkowo obciążone pasma rusztowe, Zesz.Naukowe Polit. Śląskiej, seria Budownictwo, z. 21, 1967.

ABOUT CERTAIN CASES OF BENDING OF  
MULTIHOLE PLATE BANDS

## S u m m a r y

In this paper has been presented the method of calculation of unidirectionally loaded perforated plate bands with a dense and regular pattern of rectangular holes; the edges of the holes may form an angle with the direction of the load, the size of the angle being optional. (cf fig.1). As calculating scheme of the perforated plate has been taken its simply connected model based on equations of the centre of fibres presented in paper [1].

## ОБ НЕКОТОРЫХ ПРИКЛЮЧЕНИЯХ ИЗГИБА ПЕРФОРИРОВАННЫХ ПЛАСТИНОК

## Р е з ю м е

В статье представляется метод решения однонаправленно нагруженных перфорированных пластинок бесконечной длины имеющих густой и равномерной структурой прямоугольных отверстии.

Принято, что береги отверстии создать из направлением нагрузки любой угол (см. рис. 1). В качестве расчётной схемы перфорированной пластинки принято ея непрерывной модель основаный на уравнениях волокнистой среды поданных в работе [1].