

WOJCIECH SITKO

MACIERZOWY SPOSÓB OBLICZANIA WPŁYWÓW ZADANYCH PRZEMIESZCZEŃ W PŁASKICH UKŁADACH RAMOWYCH

W pracy autora [4] przedstawiono macierzowy sposób obliczania układów prętowych (rurociągów) w oparciu o zastosowanie prostej metody eliminacji niewiadomych. Rozważania dotyczyły układów poddanych działaniu zarówno obciążeń zewnętrznych jak i wpływu temperatury.

Wprowadzając do wspomnianego sposobu pewne uzupełnienia podstawowych relacji i założeń przy niezmiennym toku postępowania, można rozszerzyć zakres jego zastosowania również na układy prętowe, poddane działaniu zadanych przemieszczeń względnie kątów obrotu.

Podstawową relacją omawianego sposobu jest związek określający zależność pomiędzy wielkościami uogólnionych sił i przemieszczeń w dwóch przekrojach, z których początkowy wyróżniono indeksem 0:

$$[W]_n = (T_n \prod_{i=n-1}^{i=1} R_i T_i) [W]_0 + \left\{ \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\prod_{j=n}^{j=i+1} T_j R_{j-1} [q]_i \right) + [q]_n \right\} + T_n \left\{ \sum_{i=1}^{i=n-2} \prod_{j=n-1}^{j=i+1} R_j T_j [\bar{q}]_i + [\bar{q}]_{n-1} \right\}. \quad (1)$$

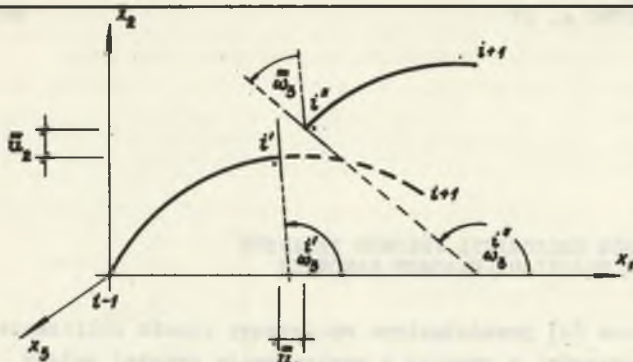
W przytoczonym wzorze (por. [4]):

- T_i - trójkątna macierz blokowa, zwana dalej macierzą transmisji, zależna od cech geometrycznych układu,
- R_i - trójkątna macierz blokowa, zwana dalej macierzą przejścia, uwzględniająca charakterystykę podpory pośredniej,
- $[q]_i$ - kolumna uwzględniająca wpływ obciążenia zewnętrznego,
- $[\bar{q}]_i$ - kolumna uwzględniająca wpływ obciążeń niemechanicznych (wpływ temperatury i osiadania podór),
- $[W]_n$ - kolumna uogólnionych sił i przemieszczeń w przekroju n - tym.

Jeżeli pomiędzy przekrojami n i 0 nie ma podpór pośrednich, to:

$$R_i = I, \quad [\bar{q}]_i = 0 \quad (2)$$

i związek (1) zapisać można w znacznie prostszej postaci.



Rys. 1

Przyjmijmy, że w przekroju i'' (po prawej stronie pkt. i) zadano wstępne przemieszczenia i kąty obrotu o składowych \bar{u}_β i $\bar{\omega}_\beta$ (rys. 1)'.
 Przy przesunięciu przekroju z i' do i'' winny być spełnione następujące warunki:

$$\begin{aligned} \text{geometryczne:} \quad & u_\beta = u_\beta + u_\beta, \quad \omega_\beta = \omega_\beta + \frac{1}{\omega_\beta} \\ \text{i statyczne:} \quad & P_\beta = P_\beta, \quad M_\beta = M_\beta \quad \text{dla } \beta = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

którym można uczynić zadość mnożąc kolumnę uogólnionych sił i przemieszczeń dla przekroju i' - $[w]_i$, przez macierz przejścia $R_i = I$ i dodając do otrzymanego iloczynu kolumnę uwzględniającą wpływy zadanych przemieszczeń:

$$[\bar{q}]_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\omega}_\beta \\ \bar{u}_\beta \end{bmatrix}$$

zgodnie z relacją:

$$[w]_{i''} = I [w]_{i'} + [\bar{q}]_i.$$

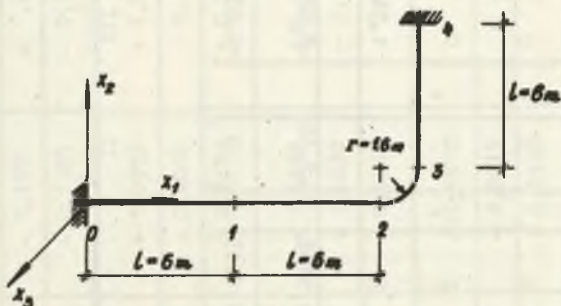
Dla układu składającego się z n - odcinków z zadanymi przemieszczeniami na granicy każdego z nich, związek pomiędzy wielkościami uogólnionych sił i przemieszczeń w przekrojach n - tym i początkowym - 0 przedstawić można następująco:

$$[w]_n = (T_n \prod_{i=n-1}^{i=1} T_i) [w]_0 + T_n \left\{ \sum_{i=1}^{i=n-2} \prod_{j=n-2}^{j=i+1} T_j [\bar{q}]_i + [\bar{q}]_{n-1} \right\}. \quad (4)$$

W powyższej relacji dla czytelności zapisu pominięto wpływ obciążeń zewnętrznych i podpór pośrednich.

Sposób praktycznego zastosowania omawianych rozważań przedstawiono w przytoczonym przykładzie.

Przykład



Rys. 2

Gałąź rurociągu o schemacie i wymiarach jak na rysunku 2 przeprowadza medium o temperaturze $\Delta t = 500^{\circ}\text{C}$. W przekroju 1-1 zadano następujące uogólnione przemieszczenia $\lambda = -5$ cm (skrócenie, w kierunku osi x_1) oraz obrót $\varphi = +1^{\circ}$. Określić wielkości uogólnionych sił i przemieszczeń w przekrojach: 0, 1, 2, 3 i 4 od poszczególnych wpływów. Sztywność przekroju $EJ = 2200 \cdot 10^4 \text{ Nm}^2$ przy $D = 31,8$ cm i grubości ścianki $t = 1,20$ cm; współczynnik KARMANA $\kappa = 0,502$.

Dla uproszczenia obliczeń i przejrzystości zapisu wielkości obliczeniowe wyrażono przez umowne jednostki porównawcze dla długości $l = 2$ m i dla sił $P = 100 \cdot 10^4$ N; kolumny uwzględniające wpływy zmiany temperatury i zadanych uogólnionych przemieszczeń przemnożono przez stały współczynnik $m = 100$.

W oparciu o [4], uwzględniając dane przytoczone w temacie oraz wykorzystując warunki brzegowe dla przekroju 4:

$$\overset{4}{u}_{\beta} = 0 \quad \text{I} \quad \overset{4}{\omega}_{\beta} = 0 \quad (\beta = 1, 2, 3)$$

schematy obliczeniowe prowadzą do układu równań liniowych:

W przytoczonej relacji (5) idneksami oznaczone:

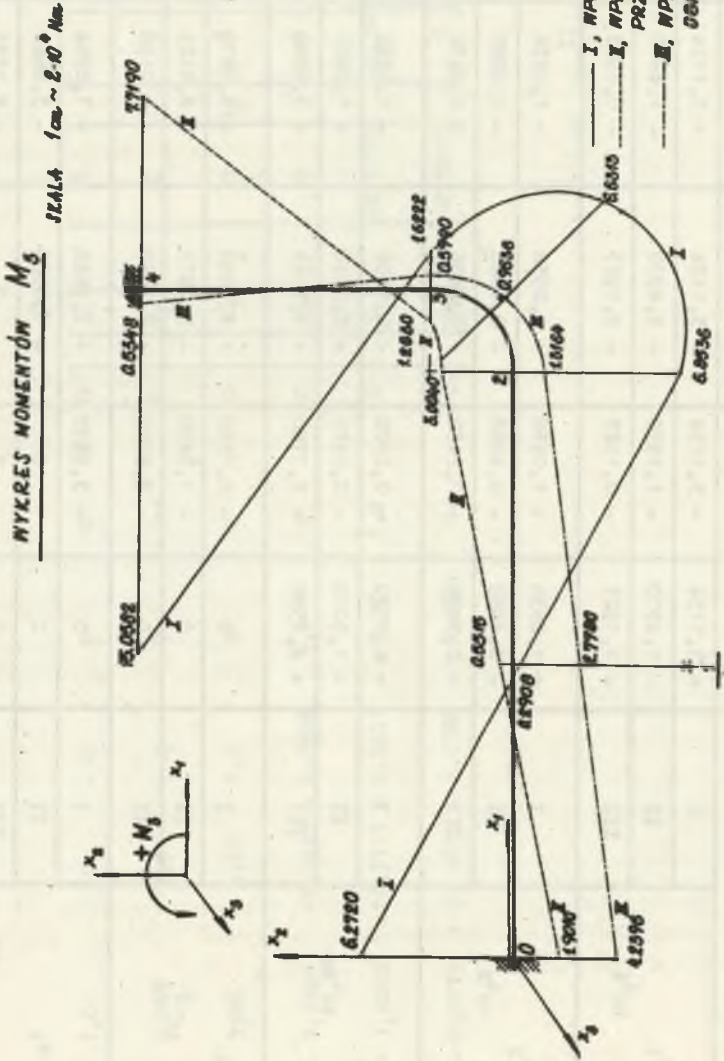
- I, - wpływ podgrzania o $\Delta t = + 500^{\circ}$
- II, - wpływ zadanego przemieszczenia
- III, - wpływ zadanego obrotu.

Wzór (5)

$$\begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,80 & -6,80 & 1,0 & 0 & 0 \\ -1,3869 & +9,9447 & -2,0916 & 1,0 & 0 \\ +1,9095 & -28,3715 & +6,5611 & -3,80 & 1,0 \\ -0,0131 & +9,9975 & -4,2780 & +6,80 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M_3 \\ \omega_3 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ +4,5118 \\ +2,5213 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,745 \\ -6,631 \\ +6,631 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \quad 0$$

Tablica 1

| P r z e k r ó j | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------------------|-----|----------|----------|----------|----------|----------|
| P_1 $10^4 N$ | I | + 3,1134 | + 3,1134 | + 3,1134 | + 3,1134 | + 3,1134 |
| | II | - 1,4970 | - 1,4970 | - 1,4970 | - 1,4970 | - 1,4970 |
| | III | - 0,1923 | - 0,1923 | - 0,1923 | - 0,1923 | - 0,1923 |
| P_2 $10^4 N$ | I | + 1,0938 | + 1,0938 | + 1,0938 | + 1,0938 | + 1,0938 |
| | II | - 0,4088 | - 0,4088 | - 0,4088 | - 0,4088 | - 0,4088 |
| | III | + 0,2436 | + 0,2436 | + 0,2436 | + 0,2436 | + 0,2436 |
| P $10^4 N m$ | I | + 6,2720 | + 0,2908 | - 6,8536 | - 1,6222 | +15,0582 |
| | II | - 1,9010 | + 0,5515 | + 3,0040 | + 1,2630 | - 7,7190 |
| | III | + 4,2396 | + 2,7780 | + 1,3164 | + 0,5990 | - 0,5348 |
| ω 10^{-3} rad | I | 0 | - 8,1580 | + 1,5860 | -15,5970 | 0 |
| | II | 0 | + 1,8400 | - 3,0075 | - 8,8125 | 0 |
| | III | 0 | - 9,5710 | + 2,2960 | + 0,1190 | 0 |
| u_1 cm | I | 0 | + 3,9810 | + 7,9620 | + 7,2264 | 0 |
| | II | 0 | 0 | - 5,0000 | - 3,8660 | 0 |
| | III | 0 | 0 | 0 | - 0,1228 | 0 |
| u_2 cm | I | 0 | - 3,3420 | - 6,2086 | - 3,9810 | 0 |
| | II | 0 | + 0,8865 | + 0,8690 | 0 | 0 |
| | III | 0 | - 2,0702 | - 0,2170 | 0 | 0 |



Ryc. 3

Rozwiązując układy równań liniowych oraz wyznaczając wg. podobnego schematu obliczeniowego wielkości uogólnionych sił i przemieszczeń w przekrojach 1, 2 i 3 otrzymamy odpowiedź na postawione w temacie zadania pytanie. Wyniki rozważań zestawiono w tablicy 1 oraz na wykresie (rys. 3).

LITERATURA

- [1] ARGYRIS J.H., Die Matrizentheorie der Statik, Ing. Arch. XXVI, 1958.
- [2] FALK S., Die Berechnung von Rahmentragwerke mit Hilfe Übertragungsmatrizen, Zeitschrift für Ang. Math. und Mech., Band 37 nr 7/8, 1957.
- [3] SITKO W., Kilka uwag o obliczaniu belek na podporach sprężystych sposobem macierzowym, Zeszyty Naukowe Pol. Śl. Budownictwo Nr 13, 1965.
- [4] SITKO W., Obliczanie rurociągów samokompensacyjnych, z uwzględnieniem wpływu podwieszonych sprężystych, Zeszyty Naukowe Pol.Śl., Budownictwo Nr 19, 1966.

Streszczenie

W pracy przedstawiono macierzowy sposób obliczania układów prętowych, w których obciążeniem jest wpływ zadanych uogólnionych przemieszczeń. Artykuł stanowi pewne uzupełnienie i rozszerzenie problematyki zawartej w pracy autora [4].

Z u s a m m e n f a s s u n g

Der Artikel betrachtet über einem Matrizenberechnungsverfahren statisch unbestimmter Stabsysteme in welchen die Belastung gegebene Formänderungs - grossen sind. In diesen Artikel wurden die Probleme welche in der Arbeit [4] Vargestellt sind erweitert und vervollständigt.

Р е з ю м е

В статье представлен матричный способ расчета стержневых систем, в которых нагрузкой является влияние обобщенных перемещений. Статья является дополнением проблематики намеченной в работе автора [4].

Złożono w redakcji w czerwcu 1968 r.