

Andrzej WARMUZEK

Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu

## POMIARY I ZASTOSOWANIA FUNKCJI KORELACYJNYCH WYŻSZYCH RZĘDÓW

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono niektóre metody pomiaru funkcji korelacyjnych wyższych rzędów. Podano także przegląd zastosowań tych funkcji do analizy sygnałów przypadkowych i układów z wymuszeniami przypadkowymi, oraz do określania położenia źródeł sygnałów przypadkowych w przestrzeni. Funkcje korelacyjne wyższych rzędów umożliwiają nowe, oryginalne ujęcie omawianych zagadnień.

### 1. Wstęp

Funkcje korelacyjne wyższych rzędów stanowią rozszerzenie znanego pojęcia funkcji korelacji procesu przypadkowego. Funkcja korelacji wzajemnej rzędu  $n$  zdefiniowana jest następująco:

$$R_{0, \dots, n}(\tau_1, \dots, \tau_n) = E\{X_0(t)X_1(t+\tau_1)\dots X_n(t+\tau_n)\} \quad (1)$$

gdzie:

$X_0(t), \dots, X_n(t)$  - wzajemnie stacjonarne procesy przypadkowe,  
 $E$  - operator wartości oczekiwanej.

Dla procesów ergodycznych:

$$R_{0, \dots, n}(\tau_1, \dots, \tau_n) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_0(t)x_1(t+\tau_1)\dots x_n(t+\tau_n)dt \quad (2)$$

gdzie:

$x_0(t), \dots, x_n(t)$  - realizacje procesów  $X_0(t), \dots, X_n(t)$   
 $2T$  - czas uśredniania.

Funkcję autokorelacji (AKF) rzędu  $n$  definiuje się podobnie. Niektóre właściwości AKF wyższych rzędów podano w pracy [1].

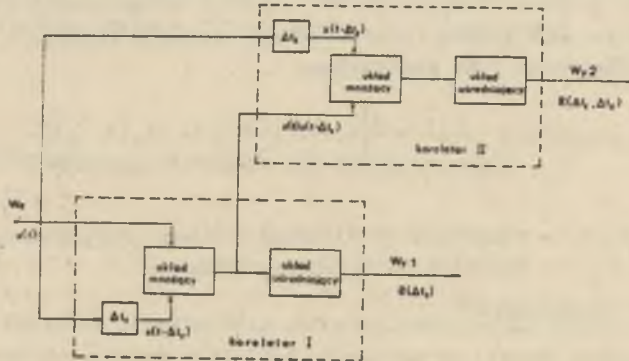
Funkcje korelacyjne wyższych rzędów mogą stanowić bardzo pożyteczne narzędzie analizy sygnałów przypadkowych. Jednak trudności techniczne występujące przy pomiarze tych funkcji oraz ograniczenia związane ze stałością

parametrów badanych sygnałów w czasie powodują, że możliwy jest pomiar funkcji korelacyjnych tylko pierwszych kilku rzędów. Obecnie omówione zostaną metody pomiaru funkcji autokorelacji AKF 2 rzędu. Metody te można w prosty sposób uogólnić na funkcje autokorelacji i korelacji wzajemnej wyższych rzędów.

## 2. Metody pomiarowe

Definicyjny pomiar wartości AKF 2 rzędu nie wymaga dużego rozbudowania aparatury pomiarowej w stosunku do pomiaru AKF 1 rzędu: do zwykłego korelatora dołączyć należy dodatkową linię opóźniającą oraz układ mnożący. Można w tym celu wykorzystać drugi korelator. Uproszczony schemat blokowy takiego układu pomiarowego przedstawiono na rys. 1. Należy pamiętać, że nastawy linii opóźniających  $\Delta t_1$  i  $\Delta t_2$  nie reprezentują bezpośrednio argumentów  $\tau_1$  i  $\tau_2$  AKF 2 rzędu (2). Pomiedzy wielkościami tymi zachodzą następujące związki:

$$\begin{aligned}\Delta t_1 &= -\tau_1, \\ \Delta t_2 &= -\tau_2.\end{aligned}\quad (3)$$



Rys. 1. Pomiar AKF 2 rzędu przy pomocy dwóch korelatorów

W wyniku pomiaru otrzymuje się:

$$K(-\Delta t_1, -\Delta t_2) = \frac{1}{T} \int_{-T}^T x(t)x(t-\Delta t_1)x(t-\Delta t_2)dt \quad (4)$$

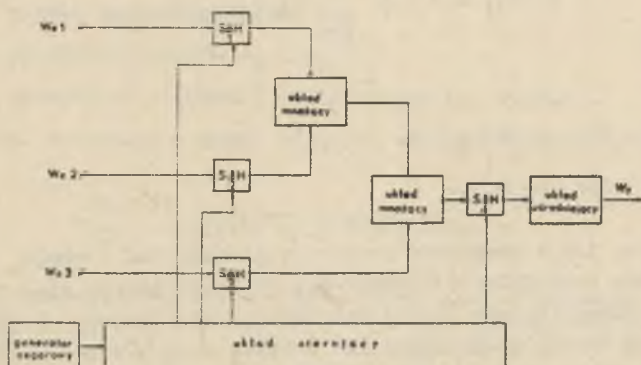
gdzie:

$R'(-\Delta t_1, -\Delta t_2)$  - estymator funkcji (1),

$2T$  - czas uśredniania.

Powyższa metoda pomiaru AKF 2 rzędu charakteryzuje się podobnymi błędami, jak metoda definicyjna pomiaru AKF 1 rzędu. Decydującym czynnikiem stanowiącym o błędzie pomiaru jest czas uśredniania  $2T$ . Wielkość ta wyznacza czas pomiaru pojedynczego punktu  $R(\tau_1, \tau_2)$ . Zwiększając czas uśredniania zmniejsza się w myśl prawa wielkich liczb błąd pomiaru AKF, za który przyjmuje się najczęściej wariancję estymatora  $R'(-\Delta t_1, -\Delta t_2)$ .

O ile błąd wynikający ze skończonego czasu uśredniania można poprzez odpowiedni dobór tego czasu uczynić dowolnie małym, to błędy spowodowane ograniczonym pasmem przeniesienia oraz małą dokładnością linii opóźniających i układów mnożących, są w zasadzie niezależne od  $T$ . Obecnie produkowane scalone analogowe układy mnożące charakteryzują się dobrą dokładnością i dostatecznie szerokim pasmem przeniesienia (0,1%; 1 MHz), tak więc elementami wprowadzającymi największe błędy są linie opóźniające. W celu wyeliminowania błędu spowodowanego przez linię opóźniającą zaproponowano układ do pomiaru AKF 2 rzędu, w którym sygnał badany jest próbkowany w odpowiednich chwilach czasu, a następnie wartości próbek zostają wymnożone przez siebie i uśrednione. Uproszczony schemat blokowy takiego korelatora został przedstawiony na rys. 2.



Rys. 2. Schemat blokowy korelatora próbkującego:  
 $S_j H$  - układ próbkująco-pamiętający

Układ sterujący podaje na układy próbkująco-pamiętające  $S_j H_1$ ,  $S_j H_2$  i  $S_j H_3$  kolejno impulsy w chwilach  $t$ ,  $t+\tau_1$ ,  $t+\tau_2$ . W chwilach tych zostają pobrane i zapamiętane próbki napięć wejściowych. Wartości próbek zostają wymnożone przez analogowe układy mnożące, a wynik zostaje zapamiętany w układzie próbkująco-pamiętającym  $S_j H_4$ . Po upływie czasu  $T$ , układ sterują-

cy ponownie wysyła impulsy do układów próbkująco-pamiętających w tej samej kolejności jak poprzednio. Cykl się powtarza i nowa wartość zostaje zapamiętana w układzie  $S\delta H_4$ .  $T_1$  stanowi dla każdego wejścia okres próbkowania. Na wejście układu uśredniającego podawane są kolejne wartości iloczynów próbek, a na jego wyjściu otrzymuje się napięcie o wartości proporcjonalnej do wartości estymatora AKF 2 rzędu:

$$R'(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n b_n c_n \quad (5)$$

gdzie:

$a_n, b_n, c_n$  - wartości próbek sygnałów na wejściach 1, 2, 3 w chwilach  $nT_1, nT_1 + \tau_1, nT_1 + \tau_2$ ,  
 $N$  - liczba próbek w cyklu pomiarowym.

W układzie tym liczba próbek  $N$  pomnożona przez okres próbkowania  $T_1$  określa czas pomiaru wartości AKF 2 rzędu w jednym punkcie.

Korelator pracujący w oparciu o opisaną metodę został zaprojektowany w Instytucie Elektrotechniki WSI w Opolu [2].

Trzecią metodą pomiaru AKF 2 rzędu omówioną w niniejszej pracy jest metoda cyfrowa. Z uwagi na długi czas pomiaru jest to metoda "off-line". Pomiar realizuje się poprzez rejestrację cyfrową realizacji procesu o długości  $N$  słów, a następnie obliczenie przy pomocy maszyny cyfrowej lub specjalizowanego mikroprocesora estymatora AKF 2 rzędu według algorytmu:

$$R''(n_1, n_2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^K x_i x_{i+n_1} x_{i+n_2} \quad (6)$$

gdzie:

$K = N - n_1$  dla  $n_1 > n_2$   
 lub  
 $K = N - n_2$  dla  $n_2 > n_1$ .

Analogicznie, jak w przypadku cyfrowego pomiaru AKF 1 rzędu, ze względu na zachowanie dostatecznej dokładności obliczeń zaleca się, aby wartości  $n_1$  i  $n_2$  stanowiły nie więcej niż 10% wartości liczby  $N$  [3].

Inną ciekawą metodą wyznaczenia AKF 2 rzędu jest metoda rozłożenia w szereg funkcji ortogonalnych, będąca uogólnieniem znanej metody pomiaru AKF 1 rzędu [4], [5]. Przy pomocy tej metody można osiągnąć stosunkowo dobre wyniki przy prostej realizacji technicznej układu pomiarowego, którego główną zaletą jest brak linii opóźniających.

Obecnie znanych jest wiele metod pomiaru AKF 2 i wyższych rzędów. Każda z nich posiada określone właściwości, wynikające z zasady pomiaru oraz z rodzaju aparatury użytej w trakcie pomiaru. Wybór metody zależy od konkretnych warunków pomiaru, a także od właściwości badanych sygnałów.

Opisane powyżej metody nie wyczerpują zagadnienia, są one uogólnieniami metod pomiaru AKF 1 rzędu. Przeglądy tych metod można znaleźć w wielu źródłach, np. w [6].

### 3. Zastosowanie KKF wyższych rzędów do lokalizacji źródeł sygnałów

Z problemem lokalizacji źródeł sygnałów zdeterminowanych lub przypadkowych można się spotkać przy konstruowaniu systemów lokalizacji celu (np. radar), a także w diagnostyce urządzeń technicznych.

Do lokalizacji źródeł sygnałów przypadkowych zastosować można metodę, polegającą na wykorzystaniu funkcji korelacji wzajemnej (KKF) rzędu  $n$ . W celu uproszczenia opisu rozpatrywana będzie metoda lokalizacji źródeł sygnałów na płaszczyźnie przy pomocy trzech anten [7].

Założymy, że na płaszczyźnie, np. na powierzchni ziemi znajduje się  $n$  dowolnie rozmieszczonych źródeł niezależnych sygnałów przypadkowych  $S_j$  ( $j=1, \dots, n$ ). Na tej samej płaszczyźnie zlokalizowany jest zespół trzech anten odbiorczych  $L_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) umieszczonych w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku  $d$ . Sygnał odebrany przez antenę  $L_i$  ma postać:

$$g_i(t) = \sum_{j=1}^n f_j(t - kd_{ij}) \quad (7)$$

gdzie:

- $f_j(t) \geq 0$  - sygnał generowany przez  $S_j$ ,
- $d_{ij}$  - odległość punktów  $S_j$  i  $L_i$ ,
- $k$  - odwrotność prędkości rozchodzenia się sygnału.

Funkcja korelacji wzajemnej 2 rzędu sygnałów odebranych przez anteny wynosi:

$$R_{123}^{(\tau_1, \tau_2)} = \frac{g_1(t) g_2(t+\tau_1) g_3(t+\tau_2)}{g_1(t) g_2(t+\tau_1) g_3(t+\tau_2)} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \frac{f_k(t-kd_{1k}) f_l(t+\tau_1-kd_{2l}) f_m(t+\tau_2-kd_{3m})}{g_1(t) g_2(t+\tau_1) g_3(t+\tau_2)}, \quad (8)$$

gdzie pozioma kreska oznacza uśrednianie w czasie.

Można wykazać, że położenia lokalnych maksimów powyższej funkcji w układzie współrzędnych  $\tau_1, \tau_2$  odpowiada położeniu źródeł sygnałów na płaszczyźnie  $x, y$  [7]. Postać operatora odwzorowania płaszczyzny  $\tau_1, \tau_2$  w płaszczyznę  $x, y$  zależy między innymi od położenia anten odbiorczych na płaszczyźnie  $x, y$ .

Do analogicznych wyników można dojść analizując funkcje korelacji wzajemnej 1 rzędu sygnałów z poszczególnych par anten. Jednak przy większej liczbie źródeł sygnałów metoda KKF wyższych rzędów daje wyniki dokładniejsze oraz bardziej jednoznaczne. Dokładność metody zwiększa się wraz ze zwiększeniem ilości anten odbiorczych, a co za tym idzie i rzędu KKF.

#### 4. Zastosowanie KKF wyższych rzędów do identyfikacji systemów nieliniowych

Właściwości układów liniowych można w pełni opisać przez podanie ich odpowiedzi impulsowych. Istnieje wiele praktycznych metod pomiarowych, pozwalających na wyznaczenie tych funkcji z określoną dokładnością, między innymi znana jest metoda wykorzystująca funkcję korelacji wzajemnej 1 rzędu sygnału wejściowego i sygnału wyjściowego układu liniowego. W przypadku pewnej klasy ciągłych układów nieliniowych odpowiedź układu można przedstawić w postaci:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n [h_n, x(t)] \quad (9)$$

gdzie:

- $\{h_n\}$  - zbiór jąder układu nieliniowego,
- $\{G_n\}$  - zbiór zupełny funkcjonałów ortogonalnych,
- $x(t)$  - sygnał wejściowy,
- $y(t)$  - sygnał wyjściowy.

Właściwość ortogonalności funkcjonałów  $G$  można zapisać w postaci:

$$\overline{G_1 [h_1, x(t)] G_j [h_j, x(t)]} = 0, \quad (10)$$

gdzie pozioma kreska oznacza uśrednianie w czasie.

Zbiór jąder  $\{h_n\}$  charakteryzuje w pełni układ nieliniowy. Jądro pierwszego rzędu  $h_1(\tau_1)$  to jądro liniowe, albo odpowiedź impulsowa układu liniowego.  $h_2(\tau_1, \tau_2)$  oznacza jądro drugiego rzędu, a jądro  $n$ -tego rzędu to  $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ . Jądra te można wyznaczyć przy pomocy metody będącej uogólnieniem metody korelacyjnej pomiaru odpowiedzi impulsowej układu liniowego.

Podając na wejście układu nieliniowego idealny biały szum o rozkładzie normalnym i AKF 1 rzędu  $R(\tau) = K\delta(\tau)$  można wyznaczyć  $i$ -te jądro  $h_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i)$  obliczając KKF  $i$ -tego rzędu procesu wejściowego i wyjściowego:

$$R_{xy}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) = \overline{y(t) x(t+\tau_1) \dots x(t+\tau_i)}. \quad (11)$$

Można wykazać [8], że powyższa funkcja jest w określonych warunkach równa i-temu jądro  $h_1(\tau_1, \dots, \tau_1)$  układu nieliniowego z dokładnością do stałej multiplikatywnej. W praktycznej realizacji metody, jako źródło sygnału wejściowego stosuje się generator sygnału pseudoprzypadkowego [9].

## 5. Zastosowanie AKF wyższych rzędów do analizy sygnałów przypadkowych

Podanie AKF 1 rzędu i jednowymiarowej gęstości rozkładu sygnału przypadkowego, często wystarczające w praktyce, w niektórych przypadkach nie wystarcza do opisu struktury procesu przypadkowego. Istnieje wiele sygnałów o różnych strukturach, ale o jednakowych AKF 1 rzędu. Podanie AKF kilku pierwszych rzędów pozwolić może na uściślenie opisu sygnałów bez konieczności wyznaczania rozkładów wyższych rzędów. Wspomniane uściślenie opisu sygnału ma szczególne znaczenie w przypadku symulacji występujących w praktyce sygnałów przypadkowych [10], ponieważ niejednoznaczność w określeniu sygnału symulowanego może spowodować znaczne błędy w ocenie wyników całego procesu symulacji.

AKF wyższych rzędów mogą ułatwić także analizę sygnałów złożonych. Jako przykład służyć może fakt, że z kształtu i wartości AKF 2 rzędu sygnału będącego sumą dwóch zależnych procesów o charakterze szumu śrutowego wnioskować można o stopniu wzajemnej zależności procesów składowych [11].

## 6. Wnioski

Przedstawione metody pomiarowe i niektóre zastosowania funkcji korelacyjnych wyższych rzędów nie wyczerpują wszystkich związanych z nimi zagadnień. Pole potencjalnych zastosowań tych funkcji jest bardzo szerokie, dlatego też wydaje się celowe dalsze badanie właściwości funkcji korelacyjnych wyższych rzędów i ich związków z innymi charakterystykami procesów przypadkowych.

## LITERATURA

- [1] Warmuzek A.: Funkcje korelacyjne wyższych rzędów i ich właściwości. Zeszyty Naukowe Pol.Sl., Elektryka z. 71, 1980.
- [2] Zieliński A., Warmuzek A.: Funkcje korelacyjne wyższych rzędów. Sprawozdanie z pracy n.-bad. 18/1979. Instytut Elektrotechniki WSI w Opolu.
- [3] Otnes R.K., Enochson L.: Analiza numeryczna szeregów czasowych, WNT, Warszawa 1978.
- [4] Lampard D.G.: A New Method of Determining Correlation Functions of Stationary Time Series. Proceedings of the IEE s. 35-41, August 1954.

- [5] Schetzen M.: Measurement of Correlation Functions. Quarterly Progress Report No. 57, Research Laboratory of Electronics, April 15, M.I.T. 1960.
- [6] Donko H., Wehrmann W., Weinrichter H.: Experimentelle stochastische Prozesse, Jahresbericht stp II/67, Institut für Niederfrequenztechnik, Technische Universität Wien.
- [7] Hayase J.Y.: Field Mapping by Crosscorrelation. Quarterly Progress Report, Research Laboratory of Electronics, M.I.T., October 15, 1954.
- [8] Lee Y.W., Schetzen M.: Measurement of the Kernels of a Nonlinear System by Crosscorrelation, Quarterly Progress Report No. 60, Research Laboratory of Electronics, M.I.T., January 15, 1961.
- [9] Kadri F.L., Lamb J.D.: An Improved Performance Criterion for Pseudorandom Sequences in the Measurement of 2-nd Order Volterra Kernels by Crosscorrelation. TN-9, Identification and System Parameter Estimation. Proceedings of 3rd IFAC Symposium, June 1973.
- [10] Eier R.: Analyse und Synthese von diskreten Zufallsprozessen mit Hilfe von Markoffschen Ketten. Habilitationsschrift, Technische Universität Wien, 1972.
- [11] Ten Hoopen M.: Some Properties of Second Order Correlation Functions in Relation to Biological Rhythm Research. TC-1 Identification and System Parameter Estimation. Proceedings of 3rd IFAC Symposium, June 1973.

#### ИЗМЕРЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

##### Резюме

В статье представлены некоторые методы измерения корреляционных функций высших порядков. Представлен также обзор применений этих функций для анализа случайных сигналов и систем со случайными входами, а также для определения положения источников случайных сигналов в пространстве. Корреляционные функции высших порядков делают возможным новый, оригинальный подход к этим вопросам.

#### MEASUREMENTS AND APPLICATIONS OF HIGHER ORDER CORRELATION FUNCTIONS

##### Summary

The article presents selected methods of measurement of higher order correlation functions. Some applications of these functions to analysis of random signals and circuits with random input, and to the target location are given. Higher order correlation functions are very useful in describing these problems in a new original way.