ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Anna LASICZ

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

BŁĄD REALIZACJI SZEROKOPASMOWYCH PRZESUWNIKÓW FAZY $\frac{\pi}{2}$

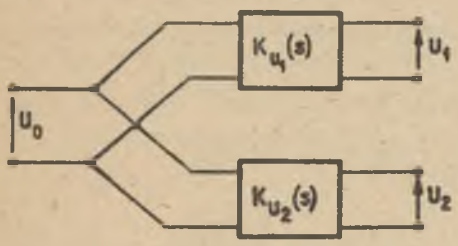
Streszczenie. W artykule rozważa się błąd realizacji szerokopasmowych przesuwników fazy wynikający z niemożliwości dokładnego doboru wartości elementów układu oraz z przyrostowych zmian ich wartości pod wpływem czynników zewnętrznych. Rozważa się również wieloparametrową wrażliwość tego błędu aproksymacji.

Wprowadzenie

Na rys. 1 podano ogólną strukturę szerokopasmowych przesuwników fazy, gdzie:

$$\left.\begin{aligned} u_0(t) &= |U_0| \sin\omega t \\ u_1(t) &= |U_1| \sin[\omega t + \beta_1(\omega)] \\ u_2(t) &= U_2 \sin[\omega t + \beta_2(\omega)] \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$|U_1| = |U_2| \tag{2}$$



Rys. 1

Układ jest szerokopasmowym przesuwnikiem fazy $\frac{\pi}{2}$, gdy w określonym paśmie częstotliwości różnica faz napięć $u_1(t)$ i $u_2(t)$ jest stała i wynosi $\frac{\pi}{2}$ przy zachowaniu stałości wartości skutecznych napięć $|U_1|$ i $|U_2|$. Czyli

$$\phi(\omega) = \beta_1(\omega) - \beta_2(\omega) \approx \frac{\pi}{2}$$

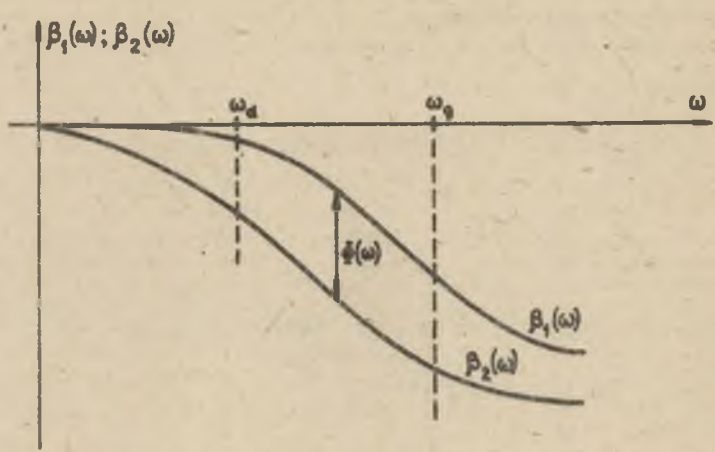
dla

$$\omega \in (\omega_d; \omega_g).$$

Charakterystykę fazy podano na rys. 2. Warunek: $|U_1| = |U_2|$ oznacza, że równocześnie obu torów układu musi być jednakowe niezależnie od częstotliwości, a więc transmitancje tych torów muszą spełniać relację:

$$K_{u1}(s) = \pm \frac{P_1(-s)}{P_1(s)}, \tag{3}$$

gdzie: $P_1(s)$ - wielomian Hurwitza.



Rys. 2

Z relacji (3) wynika, że układy takie zapewniają stały moduł transmitancji na osi urojonej, przy zmiennym argumencie. Czwórniki, które spełniają relację (3), noszą nazwę korektorów fazy. Projektowanie szerokopasmowych przesuwników fazy $\frac{\pi}{2}$ polega na tym, że przy zadanej szerokości pasma $\omega \in (\omega_d; \omega_g)$ i żądanym błędzie należy określić transmitancje torów $K_{u1}(s)$ i $K_{u2}(s)$, a następnie w oparciu o nie przy przyjętej strukturze układowej określić wartości elementów. Wśród publikowanych metod syntezy tych układów wyróżnia się zasadniczo dwie [1], [3]:

- metoda komputerowa,
- metoda matematyczna, w której poszukuje się $K_{u1}(s)$ i $K_{u2}(s)$, rozwiązując równanie eliptyczne Jacobiego.

Niezależnie od wybranej metody realizacja stałej różnicy faz jest niemożliwa, gdyż tangens $\Phi(\omega)$ jest ilorazem dwu wielomianów zmiennej ω. Określa się więc tzw. błąd aproksymacji $\varepsilon(\omega)$.

$$\varepsilon(\omega) = \frac{\pi}{2} - \Phi(\omega), \tag{4}$$

który po przekształceniach da się przedstawić w formie [1]

$$T(\omega) = \operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\varepsilon(\omega)\right] = \prod_{i=1}^{n} \frac{\omega - \omega_i}{\omega + \omega_i}. \tag{5}$$

Realizacja (5) określa tangens połowy kąta błędu aproksymacji, czyli funkcję błędu aproksymacji, której zera i bieguny są liczbami rzeczywistymi, co jest konsekwencją aproksymacji funkcji (5) w sensie Czebyszewa.

Realizacja praktyczna wnosi także pewien błąd, który nazwiemy błędem realizacji. Artykuł ten omawia właśnie błąd realizacji szerokopasmowych przesuwników fazy oraz związane z nim aspekty wrażliwościowe.

Błąd realizacji i wieloparametrowa wrażliwość funkcji błędu aproksymacji

Określimy błąd realizacji jako zmianę funkcji błędu aproksymacji $dT(\omega)$ wynikającą ze zmian wartości elementów układu.
Jeżeli

$$T(\omega,a) = tg\left[\frac{1}{2}\,\varepsilon(\omega,a)\right] = \prod_{i=1}^{n}\frac{\omega-\omega_i}{\omega+\omega_i} = \frac{L(\omega)}{L(\omega)}, \tag{6}$$

gdzie:

ω_i - rzeczywiste zera funkcji $T(\omega)$, które określa się przez wartości zer (biegunów) funkcji przejścia korektorów fazy lub bezpośrednio przez parametry układu,

a - zbiór parametrów układu

jest funkcją częstotliwości i parametrów układu, to błąd realizacji $dT(\omega,a) = tg\,\frac{1}{2}[\varepsilon'(\omega)]$ jest także zależny od tych wielkości. Funkcje te ze względu na parametry układu są złożone, dlatego błąd realizacji określimy korzystając z wieloparametrowej wrażliwości funkcji $T(\omega,a)$. Wrażliwość tę określimy w sposób pośredni, wyznaczając wrażliwość tej funkcji na zmiany położenia zer i biegunów k_j funkcji przejścia korektorów fazy. Te zaś zmiany wynikają bezpośrednio ze zmian elementów układu i można je określać także w oparciu o wrażliwość. Zgodnie z powyższym i definicją wieloparametrowej wrażliwości [2] wrażliwość funkcji błędu aproksymacji $T(\omega)$ określona jest następująco:

$$S_K^{T(\omega,k)} = \left[\frac{\partial(\ln T)}{\partial(\ln k_1)};\ \frac{\partial(\ln T)}{\partial(\ln k_2)}\ \dots\ \frac{\partial(\ln T)}{\partial(\ln k_n)}\right], \tag{7}$$

natomiast wrażliwość pierwiastków $T(\omega,a)$ na zmiany położeń zer (biegunów) funkcji przejścia korektorów $K_{u1}(j\omega)$ i $K_{u2}(j\omega)$

$$S_K^{\omega_i} = \left[\frac{\partial\omega_i}{\partial(\ln k_1)};\ \frac{\partial\omega_i}{\partial(\ln k_2)};\ \frac{\partial\omega_i}{\partial(\ln k_n)}\right], \tag{8}$$

gdzie

$$= \left[k_1;\ k_2\ \dots\ k_j\ \dots\ k_n\right] \tag{9}$$

oznacza wektor zer funkcji $K_1(j\omega)$ i $K_2(j\omega)$.

Wówczas względną zmianę funkcji $T(\omega,a)$ (czyli względny błąd realizacji) wywołaną przyrostową zmianą k

$$\delta T(\omega,a) = \frac{dT(\omega,a)}{T(\omega,a)} = \sum_{j=1}^{m} S_{kj}^{T} \frac{dk_j}{k_j} = S_k^T K^t, \tag{10}$$

gdzie:

$K = \left[d(\ln k_1);\ d(\ln k_2) \ldots d(\ln k_m)\right]$,

K^t - oznacza transpozycję wektora K .

Wrażliwość funkcji błędu aproksymacji (6) na zmiany k przyjmie postać:

$$S_k^T = -\sum_{i=1}^{m} \frac{S_k^{\omega_i}}{\omega-\omega_i} - \sum_{i=1}^{m} \frac{S_k^{\omega_i}}{\omega+\omega_i}. \tag{11}$$

W celu określenia wieloparametrowej wrażliwości pierwiastków wielomianu ω_i a także k_j posłużono się metodą podaną przez Martinelliego [2], polegającą na określeniu tej wrażliwości w oparciu o wrażliwość współczynników tego wielomianu. Dla jasności dalszych rozważań przytoczymy w skrócie tę metodę.

Niech:

$$Q(p) = Q_m p^m + Q_{m-1} p^{m-1} + \ldots + Q_1 p + Q_o \ldots \tag{12}$$

będzie dowolnym wielomianem zmiennej p.

Wówczas

$$S_k^{p_i} = U_i W \tag{13}$$

natomiast

$$dp_i = U_i W K^t, \tag{14}$$

gdzie:

$$U_i = \left[-L^{(i)};\ -L^{(i)} p_i;\ -L^{(i)} p_i^2 \ldots -L^{(i)} p_i^m\right] \tag{15}$$

a

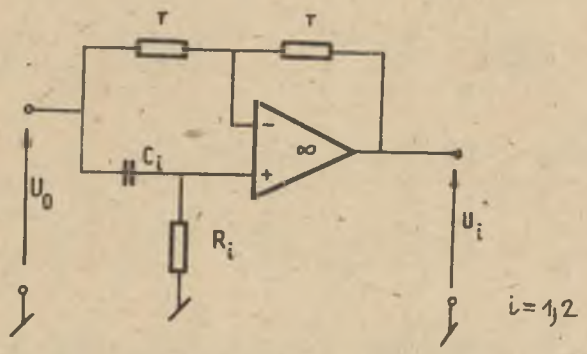
$$L^{(i)} = \left.\frac{1}{\frac{dQ(p)}{dp}}\right|_{p=p_i}$$

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_0}{\partial(\ln k_1)}; & \frac{\partial Q_0}{\partial(\ln k_2)}; & \frac{\partial Q_0}{\partial(\ln k_n)} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial(\ln k_1)}; & \frac{\partial Q_1}{\partial(\ln k_2)}; & \frac{\partial Q_1}{\partial(\ln k_n)} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial Q_m}{\partial(\ln k_1)}; & \frac{\partial Q_m}{\partial(\ln k_2)}; & \frac{\partial Q_m}{\partial(\ln k_n)} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Przykład

Przyjmijmy, że w torach przesuwnika fazowego są korektory fazowe pierwszego rzędu pokazane na rys. 3 o transmitancjach częstotliwościowych postaci

$$K_{u1}(j\omega) = \frac{j\omega - k_1}{j\omega + k_1}; \quad K_{u2}(j\omega) = \frac{j\omega - k_2}{j\omega + k_2} \tag{17}$$



Rys. 3

Wówczas:

$$T(\omega) = tg\left[\frac{1}{2}\varepsilon(\omega)\right] = \frac{\omega^2 - (k_1 - k_2)\omega + k_1 k_2}{\omega^2 + (k_1 - k_2)\omega + k_1 k_2} = \frac{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}{(\omega + \omega_1)(\omega + \omega_2)} \tag{18}$$

gdzie:

$$k_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$$

$$k_2 = \frac{1}{R_2 C_2}$$

Wieloparametrowa wrażliwość funkcji tangensa połowy kąta błędu aproksymacji wynosi

$$S_k^T = \frac{S_k^{\omega_1}}{\omega-\omega_1} - \frac{S_k^{\omega_2}}{\omega-\omega_2} - \frac{S_k^{\omega_1}}{\omega+\omega_1} - \frac{S_k^{\omega_2}}{\omega+\omega_2},$$

gdzie $k = [k_1, k_2]$.
Z relacji (18) wynika, że $Q(p) = L(-\omega) = \omega^2 - (k_1-k_2)\omega + k_1k_2$ stąd

$$Q_q = k_1k_2; \quad Q_1 = -(k_1-k_2), \quad Q_2 = 1,$$

wówczas:

$$W = \begin{bmatrix} k_1k_2; & k_1k_2 \\ -k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L^{(1)} = \frac{1}{\left.\frac{dQ(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_1}} = \frac{1}{\omega_1-\omega_2}; \quad L^{(2)} = \frac{1}{\left.\frac{dQ(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_2}} = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}.$$

Wrażliwości pierwiastków ω_1 i ω_2 przyjmą postać:

$$S_k^{\omega_1} = U_1W = \left[\frac{-k_1k_2}{\omega_1-\omega_2} + \frac{\omega_1k_1}{\omega_1-\omega_2}; \quad \frac{-k_1k_2}{\omega_1-\omega_2} - \frac{k_2\omega_1}{\omega_1-\omega_2}\right],$$

$$S_k^{\omega_2} = U_2W = \left[\frac{k_1k_2}{\omega_2-\omega_1} - \frac{k_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}; \quad \frac{k_1k_2}{\omega_2-\omega_1} + \frac{k_2\omega_2}{\omega_2-\omega_2}\right],$$

a zmiany położenia pierwiastków ω_1 i ω_2 będą określone następująco:

$$d\omega_1 = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left[k_1(k_2-\omega_1)\frac{dk_1}{k_1} + k_2(\omega_1+k_1)\frac{dk_2}{k_2}\right],$$

$$d\omega_2 = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left[k_1(k_2-\omega_2)\frac{dk_1}{k_1} + k_2(\omega_2+k_1)\frac{dk_2}{k_2}\right],$$

gdzie:

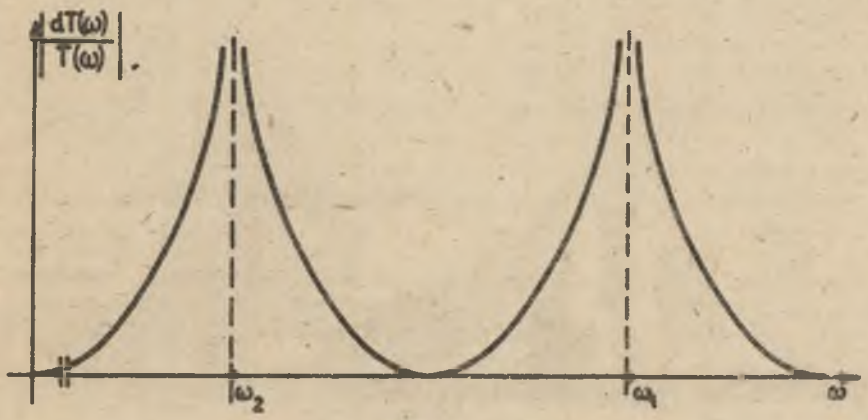
$$\frac{dk_1}{k_1} = \frac{dR_1}{R_1} - \frac{dC_1}{C_1},$$

$$\frac{dk_2}{k_2} = -\frac{dR_2}{R_2} - \frac{dC_2}{C_2}.$$

Względny błęd realizacji

$$\delta T(\omega,s) = \frac{dT(\omega,s)}{T(\omega,s)} = -2\omega\frac{d\omega_1}{\omega^2-\omega_1^2} - 2\omega\frac{d\omega_2}{\omega^2-\omega_2^2}.$$

Pokazany na rysunku 4 wykres przedstawia bezwzględną wartość tego błędu jako funkcję ω.



Rys. 4

Oszacowanie zmian położenia zer (biegunów) funkcji $T(\omega)$

Zakładając, że:

$$\frac{dR_1}{R_1} = \frac{dC_1}{C_1} = \frac{dR_2}{R_2} = \frac{dC_2}{C_2} = \pm\delta$$

to:

$$\frac{dk_1}{k_1} = \pm 2\delta \quad i \quad \frac{dk_2}{k_2} = \pm 2\delta$$

i

$$0 \leq \left|\frac{d\omega_1}{\omega_1}\right| \leq \frac{2\delta}{\omega_1-\omega_2}(k_1 + k_2)$$

$$0 \leqslant \left|\frac{d\omega_2}{\omega_2}\right| \leqslant \frac{2\delta}{\omega_1-\omega_2}(k_1 + k_2)$$

Wartości maksymalne uzyskuje się wtedy, gdy zmiany $\frac{dk_1}{k_1}$ i $\frac{dk_2}{k_2}$ mają przeciwne znaki.

Przykład liczbowy

Dla zakresu częstotliwości $f \in (100-250)$ Hz należy uzyskać przesunięcie fazowe $\frac{\pi}{2}$ z błędem $\varepsilon_m < 3^o$. Załóżmy, że struktura korektorów jest taka, jak pokazana na rys. 3. Obliczone dla tego pasma wartości zer (biegunów) funkcji przejścia $K_{u1}(j\omega)$ i $K_{u2}(j\omega)$ wynoszą odpowiednio:

$$\bar{k}_1 = 2{,}5036,$$

$$\bar{k}_2 = 0{,}3995,$$

gdzie:

$$\bar{k} = \frac{k}{\omega_o}; \quad \omega_o = 2\pi\sqrt{f_d f_g} = 991{,}5489\ \frac{rad}{s}.$$

Natomiast zera (bieguny) funkcji tangensa połowy kąta błędu aproksymacji mają wartości

$$\bar{\omega}_1 = 1{,}3788, \quad \bar{\omega}_2 = 0{,}7314, \quad \text{gdzie} \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_o}.$$

Zakładając, że $\delta = \pm 0{,}01$, otrzymujemy wartości maksymalnych względnych zmian zer ω_1 i ω_2

$$\left|\frac{d\omega_1}{\omega_1}\right| = \left|\frac{d\omega_2}{\omega_2}\right| = 0{,}0897$$

stąd

$$d\bar{\omega}_{1max} = 0{,}1236$$

$$d\bar{\omega}_{2max} = 0{,}0656$$

względna zmiana $T(\bar{\omega})$ dla $\bar{\omega} = 1{,}2$ ma wartość

$$\left|\frac{dT(\bar{\omega})}{T(\bar{\omega})}\right|_{\bar{\omega}=1{,}2} = 0{,}817$$

Uzyskany wynik wskazuje na to, że wartość błędu realizacji dla przyjętej tolerancji wykonania elementów układu $\delta = \pm 1\%$ i dowolnie wybranej pulsacji $\omega = 1{,}2\,\omega_0$ jest porównywalna z wartością błędu aproksymacji. Nie może być on zaniedbany szczególnie tam, gdzie ważna jest wysoka dokładność pracy przesuwników fazy. W celu zmniejszenia wartości tego błędu należy zastosować elementy o odpowiednio ważnej tolerancji wykonania.

Zakończenie

W artykule zaproponowano metodę obliczania błędu realizacji szerokopasmowych przesuwników fazy $\frac{\pi}{2}$. Omówiono ten błąd dla najprostszej struktury układów (korektory I rzędu). Bardziej złożone struktury wymagać będą użycia maszyn cyfrowych. Pokazano, że błąd ten wynika z wrażliwości zer (biegunów) funkcji tangensa połowy kąta błędu aproksymacji na zmianę położeń zer (biegunów) funkcji przejścia korektorów fazy, która to zmiana pochodzi od zmian parametrów układu. Analizę powyższą przeprowadzono dla korektorów o takiej strukturze, która zapewnia to, że zmiany parametrów układu nie mają wpływu na moduł funkcji przejścia korektorów a oddziaływają jedynie na jej fazę.

LITERATURA

[1] ORCHARD H.J.: Synthesis of Wideband two-phase networks. Wireless Engineer, March 1950.

[2] MITRA S.K.: Analiza i synteza układów aktywnych liniowych. WNT, Warszawa 1974.

[3] LLOYD Allan G.: 90-degree phase-difference networks are simply designed with a program in Basic. Electronic Design 19 september 13 1976.

Wpłynęło do Redakcji w maju 1980 r.

Recenzent:
Doc. dr Zdzisław Klonowicz

ПОГРЕШНОСТЬ РЕАЛИЗАЦИИ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ФАЗЫ $\frac{\pi}{2}$

Р е з ю м е

В статье представлен анализ погрешности реализации широкополосных преобразователей фазы $\frac{\pi}{2}$, вытекающей из невозможности точно подобрать значения элементов системы, а также из изменения приращения их значений под влиянием факторов из вне. Обдумана тоже многопараметрическая чувствительность погрешности аппроксимации.

THE WIDE-BAND $\frac{\pi}{2}$ CONSTANT PHASE NETWORKS REALIZATION ERROR

S u m m a r y

The error of realization of wide-band constant phase networks is discussed in the paper.

The error depending on changes in values of elements is taken into account.

The multisensitivity of approximation error is also discussed.