ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Edward WILCZYŃSKI

Instytut Maszyn i Urządzeń
Przemysłu Hutniczego i Ceramicznego
Politechniki Śląskiej

PROBLEM BRZEGOWY ANALIZY POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO SINUSOIDALNIE ZMIENNEGO W PRZESTRZENI POWIETRZNEJ I OBJĘTOŚCI METALU

Streszczenie. Artykuł jest próbą sformułowania problemu brzegowego w zagadnieniu obliczania pola elektromagnetycznego w przestrzeni o różnych środowiskach. Rozpatruje się przypadek przestrzeni powietrznej i obszaru metalu o symetrii osiowo-obrotowej, dla pól sinusoidalnie zmiennych.

1. Równania pola elektromagnetycznego wewnątrz metalu

Rozpatrujemy układ o symetrii osiowo-obrotowej (rys. 1), składający się z cewki o wysokości h_c i bryły metalu o wysokości h_b. Cewka jest opisana powierzchnią S_c z określoną gęstością powierzchniową prądu I, będącą polem wektorowym wyłącznie o składowej kątowej φ. W przypadku punktu powierzchni cewki o współrzędnych $(r = r_o,\ z = z_o,\ \varphi \in R)$, w układzie współrzędnych cylindrycznych (r, φ, z) zakładamy, że moduł wektora I należy do klasy funkcji stałych: $|I| \in$ const. Bryła metalu (rys. 1) opisana jest obszarem wraz z brzegiem dyfeomorficznym z kulą domkniętą (klasy C_1).

Rozpatrujemy rozkład pola elektromagnetycznego w metalu w stanie ustalonym sinusoidalnie zmiennym. Pole spełnia następujący układ równań ([1], s. 85):

$$\nabla \times H = j\omega\varepsilon E, \tag{1}$$

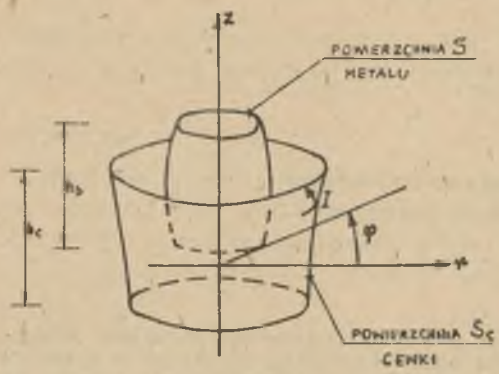
$$\nabla \times E = -j\omega\mu H, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot D = \varrho, \tag{3}$$

$$\nabla \cdot B = 0. \tag{4}$$

W metalu gęstość objętościowa ładunku $\varrho = 0$ [1] s. 28. Wielkości H, E, B i D są wektorowymi funkcjami punktu w trójwymiarowej prze-

strzeni euklidesowej. Przedstawiają zespolone amplitudy natężeń pól; magnetycznego, elektrycznego oraz indukcji magnetycznej i elektrycznej.



Rys. 1

Zakładamy, że ośrodek (metal) jest liniowy, izotropowy i jednorodny (ze względu na stałe μ, ε, γ - konduktywność metalu) (por. [1] s. 12, 13). Zachodzą następujące zależności:

$$D = \varepsilon_m E, \tag{5}$$

$$B = \mu H, \tag{6}$$

$$J = \gamma E. \tag{7}$$

Przenikalność elektryczną we wzorze (1) określa wzór

$$\varepsilon = \varepsilon_m - j\frac{\gamma}{\omega}. \tag{8}$$

Wprowadzamy potencjał wektorowy A wg wzoru

$$B = \nabla \times A. \tag{9}$$

Po uwzględnieniu wzorów (2), (6) i (9) możemy obliczyć pole elektryczne z następującej zależności

$$E = -j\omega A - \nabla\varphi. \tag{10}$$

Poszukujemy potencjału wektorowego, spełniającego w obszarze metalu zależność

$$\nabla \cdot A = 0. \tag{11}$$

Przypuszczamy, że pole potencjału A o własności (11) istnieje ze względu na symetrię osiowo-obrotową układu (rys. 1) i związanych z nim funkcji pola elektromagnetycznego. Pole elektryczne (10) jest sumą wektorów E_{ind} i E_{stat}:

$$E_{ind} = -j\omega A \text{ (pole wolnozmiennych prądów)}, \tag{12a}$$

$$E_{stat} = -\nabla\varphi \text{ (pole wolnozmiennych ładunków)}. \tag{12b}$$

Na przykładzie cewki, składającej się z kilku zwojów przewodu, oszacowano wartość stosunku E_{ind}/E_{stat} w dwu strefach:

a) w odległości od przewodu cewki porównywalnej z jego średnicę,
b) w odległości wielokrotnie przewyższającej wymiary cewki, ale mniejszej od długości fali elektromagnetycznej.

Dla cylindrycznej cewki o danych: $\omega = 2\pi 10^3$ rad/s, I = 500 A, U = 185 V L = 10^{-3} m, d = 5.10^{-3} m, $\mu = 4\pi 10^{-4}$ H/m, n = 10, a = 0,3 m, $\gamma = 5{,}6.10^7$ $1/\Omega$ m uzyskano następujące wyniki:

- strefa a) $\dfrac{|E_{ind}|}{|E_{stat}|} \cong 0{,}5,$

- strefa b) $\dfrac{|E_{ind}|}{|E_{stat}|} \cong 2{,}5,$

gdzie: $\omega = 2\pi f$, f - częstotliwość, I - prąd cewki, U - napięcie zasilania, L - minimalna odległość sąsiednich przewodów, d - średnica przewodu, n - ilość zwojów, a - średnica cewki, γ - konduktywność przewodu.

W dalszych rozważaniach pomijamy składnik (12b) wzoru (10) oraz zakładamy, że potencjał skalarny

$$\varphi = 0 \tag{13}$$

w całej przestrzeni rys. 1. Problem dokładnego obliczenia pola (12b) w układzie rys. 1, jaka dość skomplikowany i obszerny, sam w sobie mógłby być tematem odrębnych publikacji. Interesuje nas wyłącznie pole elektromagnetyczne, którego źródłem jest gęstość prądu cewki I.

Podstawiając równania (6), (9) i (12a) do (1), otrzymujemy równanie różniczkowe, jakie spełnia potencjał wektorowy w obszarze zajmowanym przez metal

$$\nabla \times \nabla \times A - k^2 A = 0, \tag{14}$$

gdzie $k^2 = -j\omega\mu\gamma$.

Dla objętości metali w zakresie stosowanych częstotliwości (do kilkudziesięciu tys. Hz) zachodzi we wzorze (8): $\gamma/\omega \gg \varepsilon$. W związku z powyższym można przyjąć z dużą dokładnością, że parametr k^2 we wzorze (14) jest liczbą czysto urojoną. Szukamy rozwiązania układu równań (11), (14), jakie spełnia potencjał wektorowy A w metalu. Wykorzystamy wektorowy symetryczny wzór Greena

$$\iiint_V (F \cdot \nabla \times \nabla \times A - A \cdot \nabla \times \nabla \times F)\,dV = \iint_S (A \times \nabla \times F - F \times \nabla \times A) \cdot n\,dS, \tag{15}$$

gdzie:

- V - obszar zajmowany przez metal,
- S - brzeg obszaru,
- A - potencjał wektorowy wg wzoru (9) (funkcja klasy C_2),
- F - dowolna funkcja wektorowa klasy C_2,
- n - ciągłe pole wektorów jednostkowych określonych na S, normalnych do S, skierowanych na zewnątrz obszaru V.

Zakładamy, że funkcje A i F określone są w obszarze V wraz z brzegiem S. Tożsamość (15) wykorzystujemy dla obszaru dyfeomorficznego z kulą domkniętą, z przyjętym ortogonalnym układem współrzędnych. Zakładamy, że funkcja A we wzorze (15) spełnia wzory (11), (14) oraz A.n = 0, a funkcja

$$F(X,Y) = a\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)_{(X,Y)}, \tag{16}$$

gdzie:

- a - stałe pole wektorowe,
- X - ustalony punkt obszaru V,
- Y - punkt całkowania,
- r - odległość punktów X i Y,
- k - stała występująca we wzorze (14).

Funkcja F nie spełnia założeń regularnościowych dla X = Y, dlatego punkt X otaczamy kulą V_1 o promieniu δ, powierzchni K, o środku w punkcie X. Tożsamość (15) wykorzystujemy dla obszaru $V - V_1$ i powierzchni S + K. W granicy dla $\delta \to 0$ otrzymujemy następujący wzór ([1] s. 107)

$$A(X) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left[\left(A(Y) \times n(Y)\right)\left(\times \nabla_Y \frac{e^{-jkr}}{r}\right)_{(X,Y)} + \right.$$

$$\left. + \left((\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y)\right)\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)_{(X,Y)}\right] dS(Y). \tag{17}$$

Wprowadzamy pojęcie pola wektorowego gęstości warstwy pętli prądu M oraz pola gęstości warstwy pojedynczej prądu N, określonych na powierzchni S metalu:

$$M = A \times n, \tag{18}$$

$$N = (\nabla \times A) \times n. \tag{19}$$

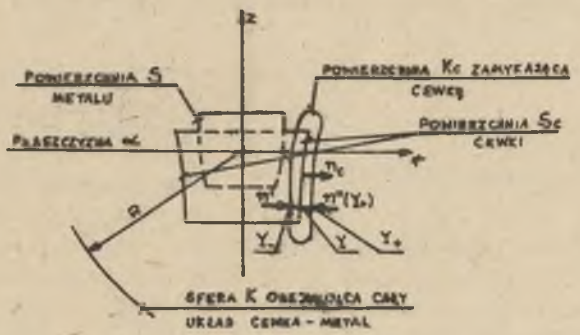
Zakładamy, że wyrażenia (18), (19) są polami wektorowymi zespolonymi klasy C_0. Przyjęte nazwy funkcji M, N łączą się z interpretacją fizyczną tych wielkości.

2. Równania pola elektromagnetycznego w środowisku powietrznym

Równania różniczkowe pól elektromagnetycznych wyprowadzone dla metalu, obowiązują również w środowisku powietrznym, po uwzględnieniu, że w przestrzeni brak ładunków swobodnych ($\varrho = 0$ we wzorze (3)) oraz konduktywność $\gamma = 0$ we wzorze (8). Potencjał wektorowy spełnia równanie różniczkowe Helmholza (14) z parametrem $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu_0$, będącym liczbą rzeczywistą. Stosowane w praktyce częstotliwości grzania metali są tego rzędu, że prawie zawsze długość fali elektromagnetycznej jest dużo większa w porównaniu z wymiarami układu z rys. 1. Przykładowo, dla częstotliwości 100 000 Hz długość fali w powietrzu wynosi 3 km. W tym przypadku rotacje pola magnetycznego H praktycznie równa się zeru, poza objętością przewodnika (w skali wymiarów układu z rys. 1 pole H traktujemy jako wolnozmienne). Uwzględniając wzory (6), (9), otrzymujemy

$$\nabla \times \nabla \times A = 0. \tag{20}$$

Poszukujemy wyrażenia całkowego na potencjał wektorowy A, spełniającego w obszarze opisującym przestrzeń powietrzną równania różniczkowe (11),(20). Nie ulegają zmianie założenia regularnościowe, dotyczące funkcji i obszarów. Wykorzystujemy tak jak w punkcie poprzednim, wektorowy symetryczny wzór Greena (15) z funkcją F (16), zakładając, w myśl przeprowadzonych powyżej rozważań, że parametr $k = 0$ (20). W tym przypadku obszar całkowania znajduje się między powierzchnią S bryły metalu a powierzchnią K sfery o promieniu R, o środku w początku układu współrzędnych. Sfera K obejmuje całą cewkę i metal. W niewielkiej odległości od powierzchni cewki S_c (klasy C_2) rozpinamy powierzchnię "toroidalną" K_c (klasy C_2), która zamyka w swym wnętrzu cewkę, nie obejmując jednak bryły metalu - rys. 2.



Rys. 2

W ten sposób powierzchnia S_c cewki została wyłączona z obszaru całkowania, który, jak widać z rys. 2, jest ograniczony. Płaszczyzna α (rys. 2),

o równaniu $z = 0$, dzieli obszar V na dwa podobszary dyfeomorficzne z kulą domkniętą (z wyjątkiem pewnych krzywych leżących na brzegu obszaru).

Ograniczę się tutaj do stwierdzenia, że symetryczny wektorowy wzór Greena (15) zastosowany dla podobszaru (z całką powierzchniową po płaszczyźnie α) można rozszerzyć na cały obszar V z wyeliminowaniem całki po α. Wzór całkowy na potencjał wektorowy wyprowadzony w oparciu o wzór (15), spełniający wewnątrz obszaru V równania (11) i (20) ma postać([1] s. 47)

$$A(X) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S+K+K_c} \Big[(A(Y) \times n(Y)) \times \nabla_Y\Big(\frac{1}{r}\Big)_{(X,Y)} + (\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y)\Big(\frac{1}{r}\Big)_{(X,Y)}\Big] dS(Y). \tag{21}$$

W tym przypadku uwzględniono $A.n = 0$. Pole wektorów jednostkowych n we wzorze (21) normalnych do powierzchni $S+K+K_c$, jest skierowane na zewnątrz obszaru V. Rozpatrując potencjał wektorowy A dla obszaru nieskończonego, nakładamy na niego tzw. warunek regularności w nieskończoności. Zakładamy, że jedynym źródłem pola A są powierzchnie S i K_c z prądami (18), (19). Potencjał od tych prądów będzie sumą (21) dwu całek:

$$A_1(X) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S+K_c} M(Y) \times \nabla_Y\Big(\frac{1}{r}\Big)_{(X,Y)} dS(Y),$$

$$A_2(X) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S+K_c} N(Y)\Big(\frac{1}{r}\Big)_{(X,Y)} dS(Y).$$

Potencjały A_1 i A_2 spełniają w nieskończoności warunek

$$A \in O\Big(\frac{1}{R^2}\Big) \quad \text{dla} \quad R \to \infty, \tag{22}$$

gdzie R - promień sfery K (rys. 2). W przypadku pola A_1 powyższe wynika z własności funkcji podcałkowej ([1] s. 51)

$$\nabla_Y\Big(\frac{1}{r}\Big) \in O\Big(\frac{1}{R^2}\Big) \quad \text{dla} \quad X \to \infty,$$

natomiast warunek (22) dla pola A_2 można wyprowadzić, rozwijając funkcję podcałkową $1/r$ na szereg Maclaurina ([1] s. 53) oraz korzystając z symetrii osiowo-obrotowej pola prądów N (19). Rozwinięcie multipolowe natężenia pola magnetostatycznego

$$H = \frac{1}{\mu} \nabla \times A$$

daje następujące oszacowanie ([1] s. 70)

$$H \in O\left(\frac{1}{R^3}\right) \quad \text{dla} \quad R \to \infty ,$$

czyli

$$(\nabla \times A) \times n \in O\left(\frac{1}{R^3}\right) \quad \text{dla} \quad R \to \infty . \tag{23}$$

Warunki (22), (23) oznaczają, że dla $\hat{R} > R'$ istnieją dwie stałe $const_1$ i $const_2$ oraz:

$$|A| \leqslant \frac{const_1}{R^2}, \quad |(\nabla \times A) \times n| \leqslant \frac{const_2}{R^3}.$$

Powyższe nierówności wykorzystujemy do oszacowania wielkości całki powierzchniowej po sferze K we wzorze (21). Jeżeli $R \to \infty$, to całka ta maleje do zera. Uwzględniając wzór (21) oraz wyprowadzone nierówności, otrzymujemy:

a) $\left|(\nabla \times A) \times n\right| \frac{1}{R} \leqslant \frac{const_2}{R^4}$,

b) $\left|(A \times n) \times \nabla_Y \left(\frac{1}{R}\right)\right| \leqslant \frac{const_1}{R^4}$ dla $\left|\nabla_Y \left(\frac{1}{R}\right)\right| = \frac{1}{R^2}$,

c) $$\left|\frac{1}{4\pi} \iint_K \left[(A \times n) \times \nabla_Y \left(\frac{1}{R}\right) + (\nabla \times A) \times n \frac{1}{R}\right] dS\right| \leqslant \frac{1}{4\pi}\left[\frac{const_1}{R^4} + \frac{const_2}{R^4}\right] 4\pi R^2 =$$

$$= \left[\frac{const_1}{R^2} + \frac{const_2}{R^2}\right] \in o(1) \quad \text{dla} \quad R \to \infty . \tag{24}$$

W wyrażeniu (21) odrzucamy więc całkę po sferze K. Rozpatrzmy zachowanie się całki (21) po powierzchni K_c, zamykającej cewkę (rys. 2). Najogólniej w najbliższym otoczeniu powierzchni S_c klasy C_2 można zbudować układ współrzędnych przestrzennych, np. (u^1, u^2, u^3). Para liczb $(\overset{0}{u}{}^1, \overset{0}{u}{}^2)$ jest dowolnym punktem powierzchni S_c w układzie współrzędnych krzywoliniowych (u^1, u^2), natomiast wersor współrzędnej u^3 ma w punktach powierzchni S_c kierunek wektora n_c jednostkowego, normalnego do S_c. Równania $u^3 = C$ dla $C \in const$, przy różnych wartościach parametru C, wyznaczają rodzinę powierzchni K_c. Przyjmujemy w punktach powierzchni S_c wartość współrzędnej $u^3 = 0$. Całka

(21) liczona po powierzchni K_c (określonej np. wartościami parametrów $C_1 < 0$ i $C_2 > 0$) zdąża przy $C_1, C_2 \to 0$ do całki liczonej po powierzchni S_c. W funkcjach podcałkowych wzoru (21) możemy wtedy określić następujące granice jednostronne:

$$\left.\begin{array}{l}(A(Y) \times n(Y))' \\ ((\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y))'\end{array}\right\}$$ – graniczna wartość składowej stycznej potencjału wektorowego oraz składowej stycznej indukcji elektromagnetycznej na S_c przy zbliżaniu się punktu obliczeń X do $Y \in S_c$ dla $u^3 < 0$

$$\left.\begin{array}{l}(A(Y) \times n(Y))'' \\ ((\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y))''\end{array}\right\}$$ – jak wyżej, lecz punkt X zdąża na S_c przy $u^3 > 0$.

Otrzymujemy:

$$[A(Y) \times n(Y)]' + [A(Y) \times n(Y)]'' = 0, \tag{25}$$

$$[(\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y)]' + [(\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y)]'' = \mu_0 I(Y), \tag{26}$$

gdzie μ_0 – przenikalność magnetyczna próżni.
Ściągając powierzchnię K_c we wzorze (21) w sposób opisany powyżej oraz uwzględniając wzory (25), (26) możemy napisać ([4] s. 65)

$$\lim_{u^3 \to 0} \frac{1}{4\pi} \iint_{K_c} \Big[[(A(Y) \times n(Y))] \times \nabla_Y \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} +$$

$$+ [(\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y)] \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} \Big] dS(Y) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_c} \Big\{ \Big[[(\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y)]' + [(\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y)]'' \Big] \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} +$$

$$+ \Big[[(A(Y) \times n(Y))]' + [(A(Y) \times n(Y))]'' \Big] \times \nabla_Y \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} \Big\} dS(Y) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_c} \mu_0 I(Y) \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y). \tag{27}$$

Wzór (27) określa funkcję ciągłą również dla $X \in S_c$ ([3] s. 214). Po uwzględnieniu wzorów (21), (24), (27) potencjał wektorowy A w obszarze opisującym środowisko powietrzne wyraża się w postaci całki po powierzchni metalu S i cewki S_c

$$H = \frac{1}{\mu} \nabla \times A ,$$

daje następujące oszacowanie ([1] s. 70)

$$H \in O\left(\frac{1}{R^3}\right) \quad \text{dla} \quad R \to \infty ,$$

czyli

$$(\nabla \times A) \times n \in O\left(\frac{1}{R^3}\right) \quad \text{dla} \quad R \to \infty . \tag{23}$$

Warunki (22), (23) oznaczają, że dla $R > R'$ istnieją dwie stałe $const_1$ i $const_2$ oraz:

$$|A| \leqslant \frac{const_1}{R^2}, \quad |(\nabla \times A) \times n| \leqslant \frac{const_2}{R^3}.$$

Powyższe nierówności wykorzystujemy do oszacowania wielkości całki powierzchniowej po sferze K we wzorze (21). Jeżeli $R \to \infty$, to całka ta maleje do zera. Uwzględniając wzór (21) oraz wyprowadzone nierówności, otrzymujemy:

a) $\left|(\nabla \times A) \times n\right| \frac{1}{R} \leqslant \frac{const_2}{R^4}$,

b) $\left|(A \times n) \times \nabla_Y \left(\frac{1}{R}\right)\right| \leqslant \frac{const_1}{R^4}$ dla $\left|\nabla_Y \left(\frac{1}{R}\right)\right| = \frac{1}{R^2}$,

c) $$\left|\frac{1}{4\pi}\iint_K \left[(A \times n) \times \nabla_Y \left(\frac{1}{R}\right) + (\nabla \times A) \times n \frac{1}{R}\right] dS\right| \leqslant \frac{1}{4\pi}\left[\frac{const_1}{R^4} + \frac{const_2}{R^4}\right] 4\pi R^2 =$$

$$= \left[\frac{const_1}{R^2} + \frac{const_2}{R^2}\right] \in o(1) \quad \text{dla} \quad R \to \infty . \tag{24}$$

W wyrażeniu (21) odrzucamy więc całkę po sferze K. Rozpatrzmy zachowanie się całki (21) po powierzchni K_c, zamykającej cewkę (rys. 2). Najogólniej w najbliższym otoczeniu powierzchni S_c klasy C_2 można zbudować układ współrzędnych przestrzennych, np. (u^1, u^2, u^3). Para liczb $(\overset{0}{u}{}^1, \overset{0}{u}{}^2)$ jest dowolnym punktem powierzchni S_c w układzie współrzędnych krzywoliniowych (u^1, u^2), natomiast wzrost współrzędnej u^3 ma w punktach powierzchni S_c kierunek wektora n_c jednostkowego, normalnego do S_c. Równania $u^3 = C$ dla $C \in const$, przy różnych wartościach parametru C, wyznaczają rodzinę powierzchni K_c. Przyjmujemy w punktach powierzchni S_c wartość współrzędnej $u^3 = 0$. Całka

(21) liczona po powierzchni K_c (określonej np. wartościami parametrów $C_1 < 0$ i $C_2 > 0$) zdąża przy $C_1, C_2 \to 0$ do całki liczonej po powierzchni S_c. W funkcjach podcałkowych wzoru (21) możemy wtedy określić następujące granice jednostronne:

$$\left.\begin{array}{l}(A(Y) \times n(Y))' \\ ((\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y))'\end{array}\right\}$$ – graniczna wartość składowej stycznej potencjału wektorowego oraz składowej stycznej indukcji elektromagnetycznej na S_c przy zbliżaniu się punktu obliczeń X do $Y \in S_c$ dla $u^3 < 0$

$$\left.\begin{array}{l}(A(Y) \times n(Y))'' \\ ((\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y))''\end{array}\right\}$$ – jak wyżej, lecz punkt X zdąża na S_c przy $u^3 > 0$.

Otrzymujemy:

$$[A(Y) \times n(Y)]' + [A(Y) \times n(Y)]'' = 0, \tag{25}$$

$$[(\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y)]' + [(\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y)]'' = \mu_0 I(Y), \tag{26}$$

gdzie μ_0 – przenikalność magnetyczna próżni.
Ściągając powierzchnię K_c we wzorze (21) w sposób opisany powyżej oraz uwzględniając wzory (25), (26) możemy napisać ([4] s. 65)

$$\lim_{u^3 \to 0} \frac{1}{4\pi} \iint_{K_c} \Big[[(A(Y) \times n(Y))] \times \nabla_Y \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} +$$

$$+ [(\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y))] \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} \Big] dS(Y) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_c} \Big\{ \Big[[(\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y)]' + [(\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y)]'' \Big] \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} +$$

$$+ \Big[[(A(Y) \times n(Y))]' + [(A(Y) \times n(Y))]'' \Big] \times \nabla_Y \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} \Big\} dS(Y) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_c} \mu_0 I(Y) \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y). \tag{27}$$

Wzór (27) określa funkcję ciągłą również dla $X \in S_c$ ([3] s. 214). Po uwzględnieniu wzorów (21), (24), (27) potencjał wektorowy A w obszarze opisującym środowisko powietrzne wyraża się w postaci całki po powierzchni metalu S i cewki S_c

$$A(X) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \Big[(A(Y) \times n(Y)) \times \nabla_Y \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} +$$

$$+ ((\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y)) \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)}\Big] dS(Y) + \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_{S_c} I(Y_c) \frac{dS(Y_c)}{r(X,Y)} \qquad (28)$$

Wartości $A \times n$, $(\nabla \times A) \times n$ możemy interpretować jako pola gęstości prądów (18), (19) określone na S.

3. Sformułowanie problemu brzegowego

Określamy granice jednostronne wartości pól elektrycznego, magnetycznego i potencjału wektorowego na S, przy zbliżaniu się punktu obliczeń do punktu powierzchni S metalu:

E_m, H_m, A_m - odpowiednie granice jednostronne w metalu dla $Y \in S$,

E_p, H_p, A_p - jak wyżej, lecz w powietrzu.

Mamy następujące zależności zachodzące dla punktów $Y \in S$:

$$n \times (E_p - E_m) = 0, \qquad (29)$$

$$n \times (H_p - H_m) = 0, \qquad (30)$$

$$n \cdot (\varepsilon_0 E_p - \varepsilon_m E_m) = 0, \qquad (31)$$

gdzie n - pole wektorów jednostkowych normalnych do S, skierowanych na zewnątrz objętości metalu.

Zakładamy, że powierzchniowa gęstość ładunku elektrycznego jest równa zeru (nie interesują nas zjawiska elektrostatyczne). Uwzględniając (12a), (29) oraz (6), (9), (30), (31), otrzymujemy:

$$n \times A_p - n \times A_m = 0, \qquad (32)$$

$$\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times A)_p \times n - \frac{1}{\mu_m} (\nabla \times A_m) \times n = 0, \qquad (33)$$

$$\varepsilon_0\, n \cdot A_p - \varepsilon_m\, n \cdot A_m = 0. \qquad (34)$$

Obecnie możemy sformułować właściwy tutaj problem brzegowy. Poszukujemy rozwiązania potencjału wektorowego A w przestrzeni na rys. 1, który spełnia:

- w nieskończoności warunki (22), (23),
- wzory (32), (33), (34) dla powierzchni rozgraniczającej metal - powietrze,
- wzory (26), (25) dla punktów powierzchni cewki,
- równania (14), (11) w obszarze zajmowanym przez metal oraz (20) (11) w obszarze opisującym przestrzeń powietrzną (rys. 1).

W celu rozwiązania postawionego problemu zrobiono pierwszy krok, tj. wyprowadzono wzory całkowe (17), (28). W następnej kolejności należałoby:

a) sprawdzić, czy rozwiązania potencjału (17), (28) spełniają poszczególne postulaty problemu brzegowego oraz warunek symetrii osiowo-obrotowej (przypuszczamy, że potencjał wektorowy jest w całej przestrzeni wektorem o wartości modułu stałej względem współrzędnej φ i kierunku współrzędnej φ),

b) udowodnić jednoznaczność i istnienie rozwiązania problemu brzegowego, wykorzystując otrzymane wzory (17), (28).

Zagadnienia te będą tematem następnych publikacji.

LITERATURA

[1] BOCHENEK K.: Metody analizy pól elektromagnetycznych. PWN, Warszawa - Wrocław 1961.

[2] GOŁĄB S.: Rachunek tensorowy. PWN, Warszawa 1966.

[3] MARCINKOWSKA H.: Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych. PWN Warszawa 1972.

[4] SUFFCZYŃSKI M.: Elektrodynamika. PWN, Warszawa 1969.

Wpłynęło do Redakcji w maju 1980 r.

Recenzent:
Doc. dr hab. Marek Brodzki

ПРОБЛЕМА КРАЕВОГО АНАЛИЗА СИНУСОИДАЛЬНО-ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВОЗДУШНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ОБЛАСТИ МЕТАЛЛА

Р е з ю м е

В статье предпринята попытка формулировки краевой задачи в проблеме расчета электромагнетического поля в пространстве с различными средами. Рассмотрен случай воздушного пространства и области металла с вращательной осесимметрией для синусоидально-переменных полей.

BOUNDARY PROBLEM OF THE ANALYSIS OF THE SINUSOIDALLY VARIABLE ELECTROMAGNETIC FIELD IN THE ATMOSPHERE AND METAL VOLUME

S u m m a r y

The paper is an attempt to formulate the boundary problem in the question of electromagnetic field computation in the space of various media. The cases of the atmosphere and area of metals with a an axial-rotating symmetry for sinusoidally variable fields are studied.