ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Zygmunt PIĄTEK

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

METODA OBLICZANIA PRĄDÓW WIROWYCH INDUKOWANYCH W PRZEWODZIE WALCOWYM PRZEZ PRĄD SINUSOIDALNY PŁYNĄCY W PRZEWODZIE RÓWNOLEGŁYM

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę obliczania prądów wirowych wywołanych w przewodzie walcowym przez prąd sinusoidalny płynący w przewodzie równoległym.

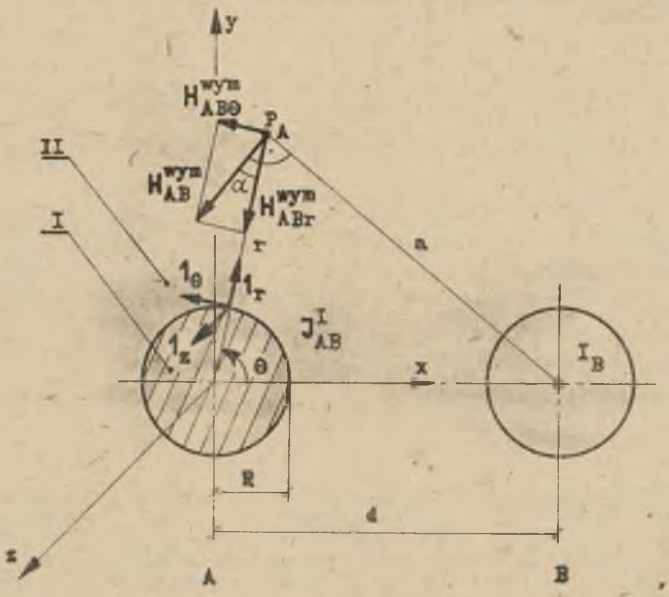
W rozwiązaniu podano wzór na gęstość prądu indukowanego, z uwzględnieniem wymiarów poprzecznych przewodu oraz odległości jego osi od przewodu równoległego.

1. Wstęp

W przypadku dwóch lub więcej przewodów z prądami przemiennymi, rozmieszczonymi w taki sposób, że ich pola magnetyczne w sposób istotny wpływają na siebie, w przewodach zachodzi zmiana rozkładu wektora gęstości prądu w przekroju poprzecznym - warunkowana działaniem tych pól. Zwiększenie nierównomierności rozkładu wektorów gęstości prądu w przekroju przewodów powoduje w nich zmianę strat mocy Joule'a. To zjawisko nazywa się zjawiskiem zbliżenia [10], którego wpływ zależny jest od kierunku i zwrotu prądu w przewodach, częstotliwości, kształtu geometrycznego przewodów oraz odległości między nimi.

Zmiana rozkładu wektora gęstości prądu w danym przewodzie spowodowana jest tym, że do wektora gęstości prądu własnego dodaje się wektor gęstości prądu indukowanego w nim przez przemienne pole magnetyczne prądów przewodów sąsiednich.

W pracy tej przedstawiono metodę obliczania wektora gęstości prądu indukowanego w przewodzie walcowym przez prąd sinusoidalny płynący w przewodzie równoległym. Rozpatrywany układ, przedstawiony na rys. 1, składa się z dwóch nieskończenie długich, walcowych przewodów (faza A i faza B). Przez przewód fazy B płynie w kierunku osi z walcowego układu współrzędnych prąd sinusoidalny $i_B(t)$. Przemienne pole magnetyczne tego prądu indukuje w przewodzie fazy A prąd wirowy o gęstości J^I_{AB}. Zakłada się przy tym [16], że walcowy przewód fazy B jest przewodem linearnym.



Rys. 1. Walcowy przewód fazy A w polu magnetycznym prądu fazy B

2. Natężenie pola magnetycznego prądu sinusoidalnego fazy B

Z prawa przepływu wartość zespolona natężenia pola magnetycznego w punkcie P_A (rys. 1) od prądu linearnego I_B płynącego w przewodzie fazy B jest równa

$$H^{wym}_{AB} = \frac{I_B}{2\pi a}, \tag{1}$$

gdzie:

a - odległość punktu P_A od osi przewodu fazy B,

I_B - wartość zespolona prądu płynącego w przewodzie fazy B w kierunku osi z i odpowiadająca przebiegowi chwilowemu tego prądu

$$i_B(t) = |I_{mB}| \sin(\omega t + \alpha_B). \tag{2}$$

We współrzędnych walcowych, usytuowanych w ten sposób, że oś z pokrywa się z osią przewodu fazy A, wektor natężenia pola magnetycznego w postaci zespolonej można przedstawić jako sumę odpowiednich składowych rys. 1)

$$H^{wym}_{AB} = -1_r H^{wym}_{ABr} + 1_θ H^{wym}_{ABθ}. \tag{3}$$

Z zależności geometrycznych (rys. 1) oraz ze wzoru (1) otrzymuje się

$$H^{wym}_{ABr} = \frac{I_B}{2\pi} \cdot \frac{d\sin\Theta}{r^2 + d^2 - 2rd\cos\Theta} \tag{4}$$

oraz

$$H^{wym}_{AB\Theta} = \frac{I_B}{2\pi} \cdot \frac{r - d\cos\Theta}{r^2 + d^2 - 2rd\cos\Theta}. \tag{5}$$

W dalszych rozważaniach natężenie pola magnetycznego H^{wym}_{AB} w postaci (3) będzie uważane jako wymuszające prądy wirowe w przewodzie fazy A.

3. Natężenie pola magnetycznego w obszarze zewnętrznym przewodu fazy A

W obszarze zewnętrznym przewodu - II ($r \geqslant R$) wektor natężenia pola magnetycznego $\mathbf{H}^{II}_{AB}$ w postaci zespolonej jest sumą wektorową wektorów pola $\mathbf{H}^{wym}_{AB}$, wytworzonego przez prąd I_B oraz pola magnetycznego oddziaływania zwrotnego prądów wirowych $\mathbf{H}^{oz}_{AB}$ indukowanych w przewodzie

$$\mathbf{H}^{II}_{AB} = \mathbf{H}^{wym}_{AB} + \mathbf{H}^{oz}_{AB}. \tag{6}$$

W obszarze tym konduktywność $\gamma = 0$ i przy pominięciu prądów przesunięcia pierwsze równanie Maxwella ma postać

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}^{II}_{AB} = 0. \tag{7}$$

Z drugiego natomiast równania Maxwella, drogą wykonania na tym równaniu operacji rotacji [11] przy spełnieniu równania (7), otrzymuje się wektorowe równanie Laplace'a

$$\nabla^2 \mathbf{E}^{oz}_{AB} = 0. \tag{8}$$

Ponieważ wektor natężenia pola elektrycznego w rozpatrywanym zagadnieniu posiada tylko jedną składową E^{oz}_{ABz} (zależną od zmiennych r oraz Θ), można więc równanie (8) sprowadzić do skalarnego równania Laplace'a.

Stosując metodę rozdzielenia zmiennych [8] poszukuje się rozwiązania równania (8) w postaci

$$E^{oz}_{ABz}(r,\Theta) = f_1(r) f_2(\Theta). \tag{9}$$

W rozwiązaniu uzyskuje się

$$f_1 = C_1 r^{\beta} + \frac{C_2}{r^{\beta}} \tag{10}$$

oraz

$$f_2 = C_3 \cos\beta\Theta + C_3 \sin\beta\Theta, \tag{11}$$

gdzie:

β - stała rozdzielenia zmiennych,

C_1, C_2, C_3, C_4 - dowolne stałe.

Ze względu na to, że natężenie pola elektrycznego przy $r \to \infty$ jest ograniczone, należy przyjąć $C_1 = 0$.

Z warunków brzegowych zagadnienia (rys. 1) wynika ponadto, że przy zmianie kąta z $+\Theta$ na $-\Theta$ natężenie pola elektrycznego nie może zmieniać znaku - więc stała $C_4 = 0$.

Jak wiadomo [8], stałe β musi być liczbą całkowitą, gdyż spośród rozwiązań (11) należy wybrać takie, które spełniają warunek: $f_2(\Theta) = f_2(\Theta+2\pi)$

Ogólne rozwiązanie równania (8), spełniające powyższe zależności, można uzyskać tworząc superpozycję rozwiązań elementarnych typu (9)

$$E^{oz}_{ABz}(r,\Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} E^{oz}_{ABzn}(r,\Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{1}{r^n} \cos n\Theta. \tag{12}$$

Stałe B_n występujące w rozwiązaniu (12) należy wyznaczyć z warunków brzegowych, co wykonana będzie w dalszej kolejności.

Stosując drugie równanie Maxwella do rozwiązania (12) uzyskuje się wzór na wektor natężenia pola magnetycznego oddziaływania zwrotnego w postaci zespolonej

$$H^{oz}_{AB}(r,\Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n B_n}{j\omega\mu r^{n+1}} \left[1_r \sin n\Theta - 1_{\Theta} \cos n\Theta \right]. \tag{13}$$

Wektor natężenia pola magnetycznego w obszarze zewnętrznym przewodu fazy A jest więc równy

$$H^{II}_{AB}(r,\Theta) = -1_r \frac{I_B}{2\pi} \cdot \frac{d\sin\Theta}{r^2 + d^2 - 2rd\cos\Theta} + 1_{\Theta} \frac{I_B}{2\pi} \cdot \frac{r - d\cos\Theta}{r^2 + d^2 - 2rd\cos\Theta} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n B_n}{j\omega\mu r^{n+1}} \left[1_r \sin n\Theta - 1_{\Theta} \cos n\Theta \right]. \tag{14}$$

Składowe wektora natężenia pola magnetycznego prądu I_B, określone wzorami (4) i (5), można rozwinąć w szereg Fouriera ze względu na zmienną Θ i wtedy wzór (14) przyjmuje postać

$$H_{AB}^{II} = -1_r \frac{I_B}{2\pi}\left[\frac{a_{ro}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{rn} \cos n\Theta + b_{rn} \sin n\Theta)\right] +$$

$$+ 1_\Theta \frac{I_B}{2\pi}\left[\frac{a_{\Theta o}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{\Theta n} \cos n\Theta + b_{\Theta n} \sin n\Theta)\right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, B_n}{j\omega\mu r^{n+1}}\left[1_r \sin n\Theta - 1_\Theta \cos n\Theta\right]. \tag{15}$$

Współczynniki szeregu Fouriera we wzorze (15) określa się [2] następująco:

$$a_{rn} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d \sin\Theta \cos n\Theta}{r^2 + d^2 - 2rd\cos\Theta} d\Theta, \tag{16}$$

$$b_{rn} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d \sin\Theta \sin n\Theta}{r^2 + d^2 - 2rd\cos\Theta} d\Theta, \tag{17}$$

$$a_{\Theta n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(r - d\cos\Theta)\cos n\Theta}{r^2 + d^2 - 2rd\cos\Theta} d\Theta, \tag{18}$$

$$b_{\Theta n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(r - d\cos\Theta)\sin n\Theta}{r^2 + d^2 - 2rd\cos\Theta} d\Theta. \tag{19}$$

$H_{ABr}^{wys}(r,\Theta)$ jest funkcją nieparzystą zmiennej Θ, więc [2] współczynnik $a_{rn} = 0$, $H_{AB\Theta}^{wys}(r,\Theta)$ jest funkcją parzystą zmiennej Θ, więc $b_{\Theta n} = 0$.

Po żmudnych obliczeniach, wykorzystując metody obliczeń z prac [2, 12] oraz wzory z pracy [3], można wykazać, że pozostałe współczynniki szeregu Fouriera są odpowiednio równe:

$$b_{rn} = \frac{r^{n-1}}{d^n}. \tag{20}$$

$$a_{\Theta n} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad n = 0 \\ -\dfrac{r^{n-1}}{d^n} & \text{dla} \quad n \neq 0. \end{cases} \tag{21}$$

Wobec powyższego wzór (15), na natężenie pola magnetycznego w obszarze zewnętrznym przewodu fazy A, przyjmuje postać

$$H^{II}_{AB}(r,\Theta) = -1_r \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{I_B}{2\pi r} \left(\frac{r}{d}\right)^n - \frac{n\, B_n}{j\omega\mu_r r^{n+1}} \right] \sin n\Theta -$$

$$-1_\Theta \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{I_B}{2\pi r} \left(\frac{r}{d}\right)^n + \frac{n\, B_n}{j\omega\mu_r r^{n+1}} \right] \cos n\Theta. \tag{22}$$

4. Natężenie pola magnetycznego w przewodzie fazy A

W obszarze I (rys. 1), tj. wewnątrz przewodu $(0 \leqslant r \leqslant R)$, obowiązuje [14] dla wektora natężenia pola elektrycznego (w postaci zespolonej następujące równanie falowe Helmholtza

$$\nabla^2 \mathbf{E}^{I}_{AB} = j\, m^2 \mathbf{E}^{I}_{AB}, \tag{23}$$

gdzie:

$$m = \sqrt{\omega\mu\gamma}. \tag{24}$$

Natężenie pola elektrycznego ma w tym obszarze tylko jedną składową E^{I}_{ABz} zależną od zmiennych r oraz Θ, czyli

$$\mathbf{E}^{I}_{AB} = 1_z\, E^{I}_{ABz}(r,\Theta). \tag{25}$$

Wobec tego równanie (23) można przedstawić (we współrzędnych walcowych) w postaci skalarnego równania falowego Helmholtza [8].

Stosując metodę rozdzielenia zmiennych [8] poszukuje się rozwiązania równania (23) w postaci

$$E^{I}_{ABz}(r,\Theta) = f_3(r)\, f_4(\Theta). \tag{26}$$

W rozwiązaniu uzyskuje się

$$f_3(r) = C_5 J_\beta(\sqrt{-j}\,mr) + C_6 K_\beta(\sqrt{j}\,mr), \tag{27}$$

gdzie:

$\mathcal{J}_\beta(\sqrt{-j}mr)$ - funkcja Bessela-Kelvina pierwszego rodzaju rzędu β,

$K_\beta(\sqrt{j}mr)$ - funkcja Bessela-Kelvina drugiego rodzaju rzędu β,

β - stała rozdzielenia zmiennych, która jak już podkreślano w poprzednim punkcie jest liczbą naturalną,

C_5, C_6 - dowolne stałe,

oraz

$$f_4(\Theta) = C_7 \sin\beta\Theta + C_8 \cos\beta\Theta, \tag{28}$$

gdzie: C_7, C_8 - dowolne stałe.

Z tego samego powodu co w wyrażeniu (11) stała $C_7 = 0$. Ze względu na to, że natężenie pola elektrycznego przy $r \to 0$ jest ograniczone i po uwzględnieniu właściwości funkcji $K_\beta(\sqrt{j}mr)$ [7] - stała $C_6 = 0$.

Ogólne rozwiązanie równania (23) przyjmuje więc postać

$$E^I_{AB}(r,\Theta) = 1_z \sum_{n=1}^{\infty} E^I_{ABzn}(r,\Theta) = 1_z \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathcal{J}_n(\sqrt{-j}mr)\cos n\Theta. \tag{29}$$

Stosując drugie równanie Maxwella do wzoru (29) oraz wykorzystując [7] relację na pochodną funkcji Bessela-Kelvina pierwszego rodzaju rzędu n

$$\mathcal{J}'_n(kz) = \frac{n}{kz}\mathcal{J}_n(kz) - \mathcal{J}_{n+1}(kz) \tag{30}$$

otrzymuje się wzór (w postaci zespolonej) na wektor natężenia pola magnetycznego w przewodzie fazy A

$$H^I_{AB}(r,\Theta) = 1_r \frac{1}{j\omega\mu r} \sum_{n=1}^{\infty} nC_n \mathcal{J}_n(\sqrt{-j}mr)\sin n\Theta +$$

$$+ 1_\Theta \frac{1}{j\omega\mu r} \sum_{n=1}^{\infty} C_n\left[-n\mathcal{J}_n(\sqrt{-j}mr) + \sqrt{-j}mr\mathcal{J}_{n-1}(\sqrt{-j}mr)\right]\cos n\Theta. \tag{31}$$

5. Warunki brzegowe dla natężenia pola magnetycznego przewodu fazy A

Przy założeniu równości współczynników przenikalności magnetycznej bezwzględnej obszaru - I i obszaru zewnętrznego - II

$$\mu^I = \mu^{II} = \mu = \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \left[\frac{H}{m}\right] \tag{32}$$

można [1] uzyskać następujący warunek brzegowy dla natężenia pola magnetycznego

- dla $r = R$

$$H^{II}_{AB}(R,\Theta) = H^{I}_{AB}(R,\Theta). \tag{33}$$

Rozpatrując wektorowe równanie (33) oddzielnie dla poszczególnych jego składowych - warunek brzegowy sprowadza się do układu dwóch równań skalarnych, z którego wyznacza się stałą C_n

$$C_n = \frac{I_B\sqrt{-j}\omega\mu}{\pi mR}\left(\frac{R}{d}\right)^n \frac{1}{\mathcal{J}_{n-1}(\sqrt{-j}mR)} \tag{34}$$

6. Natężenie pola elektrycznego i gęstość prądu wirowego indukowanego w przewodzie fazy A

Podstawiając stałą C_n ze wzoru (34) do równania (29) wyznacza się wektor natężenia pola elektrycznego (w postaci zespolonej) w przewodzie fazy A

$$E^{I}_{AB} = 1_z \frac{I_B\sqrt{-j}\omega\mu}{\pi mR}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{d}\right)^n \frac{\mathcal{J}_n(\sqrt{-j}mr)}{\mathcal{J}_{n-1}(\sqrt{-j}mR)}\cos n\Theta. \tag{35}$$

Wektor gęstości prądu w postaci zespolonej indukowany w przewodzie fazy A wyznaczy się wykorzystując uogólnione prawo Ohma oraz wzory (35) i (24). Otrzymuje się

$$J^{I}_{AB} = 1_z J^{I}_{ABz} = 1_z \frac{I_B\sqrt{-j}m}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{d}\right)^n \frac{\mathcal{J}_n(\sqrt{-j}mr)}{\mathcal{J}_{n-1}(\sqrt{-j}mR)}\cos n\Theta =$$

$$= 1_z \frac{|I_B|m}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{d}\right)^n \frac{M_n(mr)}{M_{n-1}(mR)}\cdot$$

$$\cdot \exp\left\{j\left[\beta_n(mr) - \beta_{n-1}(mR) + 135^\circ + \alpha_B\right]\right\}\cos n\Theta, \tag{36}$$

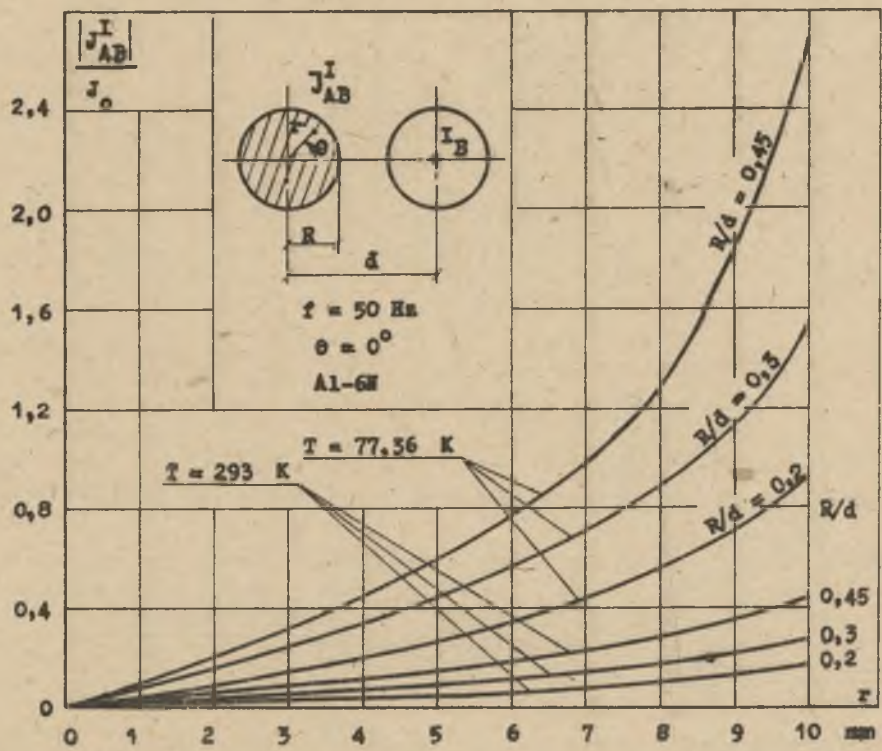
gdzie:

M_n - moduł funkcji Bessela-Kelvina pierwszego rodzaju n-tego rzędu,

β_n - argument tej funkcji.

Dla ilustracji wzoru (35) na rys. 2 przedstawiono rozkład modułu wektora gęstości prądu indukowanego w przekroju poprzecznym przewodu aluminiowego 6N o $R = 10$ mm, dla $\Theta = 0^\circ$ i $f = 50$ Hz, w temperaturze po-

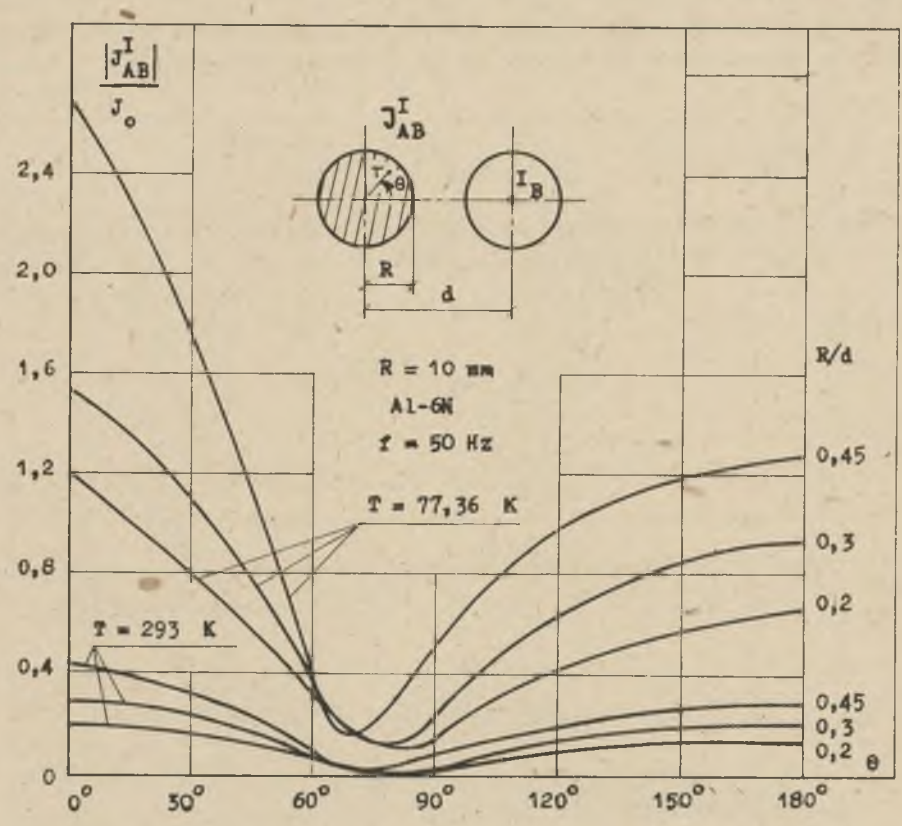
kojowej i w temperaturze ciekłego azotu, przy różnych wartościach stosunku R/d promienia do odległości od osi przewodu równoległego.



Rys. 2. Rozkład modułu wektora gęstości prądu indukowanego w walcowym przewodzie aluminiowym 6N, dla $\Theta = 0^o$ i f = 50 Hz, w temperaturze pokojowej i w temperaturze ciekłego azotu, przy różnych wyrtościach stosunku $\frac{R}{d}$

Na rys. 3. przedstawiono rozkład modułu wektora gęstości prądu na powierzchni tego przewodu, w zależności od kąta Θ walcowego układu współrzędnych. Na obu powyższych wykresach moduł gęstości prądu wyrażono w jednostkach względnych w stosunku do bazy określonej wzorem

$$J_o = \frac{|I_B|}{\pi R^2}. \tag{37}$$



Rys. 3. Rozkład modułu wektora gęstości prądu na powierzchni walcowego przewodu aluminiowego 6N w zależności od kąta Θ, dla R = 10 mm i f=50 Hz w temperaturze pokojowej i w temperaturze ciekłego azotu, przy różnych wartościach stosunku $\frac{R}{d}$

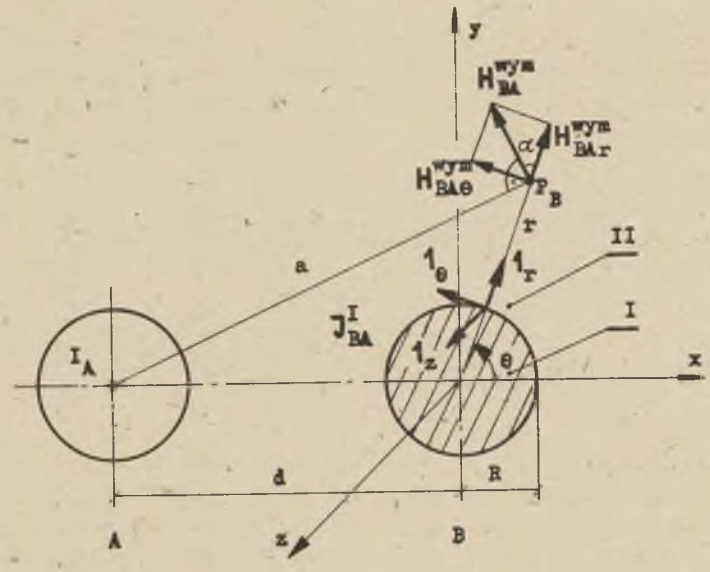
7. Wektor gęstości prądu wirowego indukowanego w przewodzie walcowym fazy B przez prąd linearny fazy A

W układzie przedstawionym na rys. 4 prąd płynący w fazie A indukuje w przewodzie fazy B prąd wirowy o gęstości J^I_{BA}.

Takie usytuowanie wzajemne przewodów spowoduje zmianę wzorów określających natężenie pola magnetycznego prądu sinusoidalnego fazy A w stosunku do wzorów (3), (4) i (5).

We współrzędnych walcowych (rys. 4) wektor natężenia pola magnetycznego w postaci zespolonej jest równy

$$H^{wyn}_{BA} = 1_r H^{wyn}_{BAr} + 1_\Theta H^{wyn}_{BA\Theta}. \tag{38}$$



Rys. 4. Walcowy przewód fazy B w polu magnetycznym prądu fazy A

Z zależności geometrycznych (rys. 4), po określeniu natężenia pola magnetycznego w punkcie P_B jako

$$H^{wym}_{BA} = \frac{I_A}{2\pi a}, \tag{39}$$

wyznacza się

$$H^{wym}_{BAr} = \frac{I_A}{2\pi} \cdot \frac{d \sin}{r^2 + d^2 + 2rd\cos\Theta} \tag{40}$$

oraz

$$H^{wym}_{BA\Theta} = \frac{I_A}{2\pi} \cdot \frac{r + d\cos}{r^2 + d^2 + 2rd\cos\Theta} \tag{41}$$

gdzie I_a - wartość zespolona prądu płynącego w przewodzie fazy A w kierunku osi z odpowiadającą przebiegowi chwilowemu tego prądu

$$i_A(t) = |I_{mA}| \sin(\omega t + \alpha_A). \tag{42}$$

Postępując dalej jak w punkcie 3 oblicza się natężenie pola magnetycznego w obszarze zewnętrznym przewodu fazy B - H^{II}_{BA}. W utworzonej relacji typu (15) zachodzi konieczność policzenia współczynników szeregu Fouriera z funkcji (40) i (41). Są one, przy tak określonych funkcjach H^{wym}_{BAr} i

$H^{wyb}_{BA\Theta}$, równe: $a_{rn} = b_{\Theta n} = 0$ - ze względu na parzystość i nieparzystość, b_{rn} jest określony wzorem (20), zaś współczynnik $a_{\Theta n}$ określony jest wzorem (21) ze zmienionym znakiem.

Otrzymuje się wtedy

$$H^{II}_{BA} = 1_r \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{I_A}{2\pi r}\left(\frac{r}{d}\right)^n + \frac{n\,B_n}{j\omega\mu_r r^{n+1}}\right]\sin n\Theta +$$

$$+ 1_\Theta \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{I_A}{2\pi r}\left(\frac{r}{d}\right)^n - \frac{n\,B_n}{j\omega\mu_r r^{n+1}}\right]\cos n\Theta \tag{43}$$

Wewnątrz przewodu fazy B natężenie pola magnetycznego (w postaci zespolonej) określone jest równaniem (31).

Tworząc następnie równanie dla warunków brzegowych przewodu tej fazy typu (33) uzyskuje się układ dwóch równań skalarnych w postaci zespolonej, z którego wyznacza się stałą C_n

$$C_n = -\frac{I_A\sqrt{-j}\,\omega\mu}{\pi m R}\left(\frac{R}{d}\right)^n \frac{1}{\mathcal{J}_{n-1}(\sqrt{-j}\,mR)} \tag{44}$$

Postępując dalej jak w punkcie 6 wyznacza się wektor gęstości prądu (w postaci zespolonej), indukowany w przewodzie fazy B przez prąd linearny fazy A

$$J^I_{BA} = -1_z\, J^I_{BAz} = -1_z \frac{I_A\sqrt{-j}\,m}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{d}\right)^n \frac{\mathcal{J}_n(\sqrt{-j}\,mr)}{\mathcal{J}_{n-1}(\sqrt{-j}\,mR)}\cos n\Theta =$$

$$= -1_z \frac{|I_A|\,m}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{d}\right)^n \frac{M_n(mr)}{M_{n-1}(mR)}\,\cdot$$

$$\cdot\ \exp\left\{j\left[\beta_n(mr) - \beta_{n-1}(mR) + 135^\circ + \alpha_A\right]\right\}\cos n\Theta. \tag{45}$$

Jeżeli przyjąć równość modułów $|I_A| = |I_B|$ i argumentów $\alpha_A = \alpha_B$ prądów, to otrzymany wzór (45) różnić się będzie od wzoru (36) tylko znakiem.

Rozkład wektora gęstości prądu indukowanego (45) będzie odpowiednio symetryczny do rozkładów przedstawionych na rys. 2 i rys. 3.

8. Zakończenie

Otrzymany przedstawioną wyżej metodą wzór (36) na gęstość prądu indukowanego w przewodzie walcowym przez prąd płynący w linearnym przewodzie równoległym, pokrywa się z odpowiednim wzorem uzyskanym przez Mjejerowicza w pracy [9] poprzez wprowadzenie skalarnego potencjału magnetycznego w postaci zespolonej i równania Helmholtza w metodzie kolejnych przybliżeń. Wzór ten uzyskał również Manneback w pracy [6] na drodze wprowadzenia i rozwiązania równania całkowego. Za Mannebackiem cytuje go wzór) Rolicz w pracy [13].

Dla $n = 1$ wzór (36) przyjmuje postać

$$J^{I}_{AB} \doteq 1_z \frac{I_B \; -jm}{d} \cdot \frac{{}_1(\; -jmr)}{{}_0(\; -jmR)} \cos . \tag{46}$$

Wzór (46) pokrywa się z odpowiednim wzorem uzyskanym przez Kadena w pracy [4] dla przewodu prętowego, umieszczonego w równomiernym polu magnetycznym określonym z prawa przepływu wzorem

$$H^{wym}_{AB} = \frac{I_B}{2\,d}. \tag{47}$$

Otrzymane rozwiązanie na wektor gęstości prądu indukowanego w przewodzie walcowym w postaci wzoru (36) jest zatem rozwiązaniem ogólnym, gdyż nie wymaga stosowania założenia upraszczającego, dotyczącego zewnętrznego pola magnetycznego oddziaływającego na przewód.

LITERATURA

[1] FALKOWSKIJ O.I.: Tiechniczeskaja elektrodinamika. Swjaz, Moskwa 1978.

[2] FICHTENHOLZ G.M.: Rachunek różniczkowy i całkowy. PWN, Warszawa 1972.

[3] GRADSZTEJN I.S., RYŻYK I.M.: Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów. PWN, Warszawa 1972.

[4] KADEN G.: Elektromagnitnyje ekrany w wysokoczastotnoj tiechnikie i miechanikie eliektroswjazi. Gosenergoizdat, Moskwa 1957.

[5] KUPALAN S.D.: Teoria pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1967.

[6] MANNEBACK C.: An integral equation for skin-effect in parallel conductors. J. of Math. and Phyd., v. 1, 1921.

[7] Mc LACHLAN N.W.: Funkcje Bessela dla inżynierów. PWN, Warszawa 1964.

[8] MOON P., SPENCER D.E.: Teoria pola. PWN, Warszawa 1966.

[9] MJEJEROWICZ Z.A., CZALJAN K.M.: Rasczet miatodom posledowatielnych priblizenij raspriedielenija toka w tokoprowodach s uczotom effiekta blizosti. Iz. AN ZSRR, Eniergietika i Transport, nr 3, 1963.

[10] MUKOSJEJEW Ju.Ł.: Raspriedielenije pieriemiennogo toka w tokoprowodach. Eniergoizdat, Moskwa 1959.

[11] PCZELIN B.K.: Analiza wektorowa dla inżynierów. PWN, Warszawa 1971.

[12] PISKUNOW N.S.: Diffieriencjialnyje i intiegralnyje isczislenija. Nauka, Moskwa 1970.

[13] ROLICZ P.: Force Acting on the Conductors of a Bifilar Lead with an Alternating Courrent. Archiv fur Elektrotechnik, nr 61, 1979.

[14] SZULKIN P., POGORZELSKI S.: Podstawy teorii pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1964.

[15] TUROWSKI J.: Elektrodynamika techniczna. WNT, Warszawa 1968.

[16] ZOŁOTARIEW N.A., PISMIENSKIJ A.W.: Rasczot magnitnych polej w sistiemie dlinnych tokoprowodow. Elektromiechanika, nr 9, 1969.

Wpłynęło do Redakcji w maju 1980

Recenzent
Doc. dr Aleksander Szendzielorz

МЕТОД РАСЧЕТА ВИХРЕВЫХ НАВЕДЕННЫХ ТОКОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПРОВОДЕ ЧЕРЕЗ СИНУСОИДАЛЬНЫЙ ТОК ПРОТЕКАЮЩИЙ В ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПРОВОДЕ

Р е з ю м е

В статье представлен метод расчета вихревых наведенных токов в цилиндрическом проводе через синусоидальный ток, протекающий в параллельном проводе. В решении дана формула на плотность наведенного тока с учетом поперечных размеров провода, а также расстояний его оси от параллельного провода.

THE METHOD OF CALCULATION OF EDDY CURRENTS INDUCED BY THE SINUSOIDAL CURRENT OF THE PARALLEL CONDUCTOR IN THE CYLINDER CONDUCTOR

S u m m a r y

The method of calculation of eddy current produced by sinusoidal current of the parallel conductor was presented in this paper.

The formula for computation of density of the induced current was given. The transverse dimensions and the distance between the axis of the conductor and the axis of the parallel conductor were taken into account.