ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria: ELEKTRYKA z. 68 Nr kol. 643

Zygmunt Garczarczyk

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

O GENERACJI N-WROTNIKÓW RLCZ POSIADAJĄCYCH MINIMALNY WSKAŹNIK WRAŻLIWOŚCI

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę generacji równoważnych n-wrotników RLCŻ posiadających minimalny wskaźnik wrażliwości. Przez powiększenie liczby węzłów obwodu minimum absolutne wskaźnika wrażliwości może być zmniejszane. Stwarza to możliwość generowania obwodów o dowolnie małym wskaźniku wrażliwości. Algorytm generacji oparto na teorii obwodów ciągle równoważnych i programowaniu liniowym.

1. Wprowadzenie

Teoria obwodów ciągle równoważnych opracowana przez Schoefflera dla obwodów pasywnych, odwracalnych (RLC) [1] i rozszerzona na obwody pasywne, nieodwracalne (RLCŻ) [2] może stanowić podstawę minimalizacji wrażliwości tych układów. W pracy rozważa się możliwość generowania równoważnych n-wrotników RLCŻ posiadających dowolnie mały wskaźnik wieloparametrowej wrażliwości funkcji H obwodu, postaci:

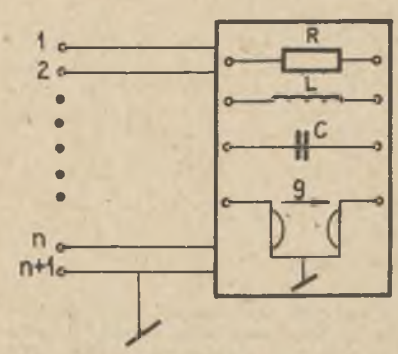
$$\Phi = \sum_{i=1}^{\nu_e} \left| S_{e_i}^{H} \right|^2 k_i^2 \tag{1}$$

Jest to możliwe na skutek tego, że minimum absolutne wskaźnika maleje przy powiększaniu rozmiarów obwodu (liczby węzłów). Podstawą proponowanego algorytmu minimalizacji wskaźnika Φ jest koncepcja obwodów ciągle równoważnych i programowanie liniowe.

2. Obwody RLCŻ ciągle równoważne

Rozważa się n-wrotniki RLCŻ o n+1 zaciskach, N węzłach niezależnych ($N > n$), o wspólnym dla wszystkich wejść zacisku odniesienia, zawierających cztery typy elementów: oporniki, cewki bez sprzężeń, kondensatory i żyratory rezystancyjne, pasywne. Wspólny dla wszystkich wejść zacisk od-

niesienia stanowi także wspólny węzeł dla wszystkich żyratorów występujących w układzie (rys. 1).



Rys. 1

Zakładając, że zacisk n+1 stanowi węzeł odniesienia, macierz admitancji węzłowych (macierz węzłowa) jest równa

$$[y] = [G] + \frac{1}{p}[\Gamma] + p[C] + [g] \qquad (2)$$

gdzie:

p - częstotliwość zespolona.

Symetryczne macierze $[G]$, $[\Gamma]$, $[C]$ reprezentują odpowiednio: konduktancje oporników, odwrotności indukcyjności cewek, pojemności kondensatorów. Skośnie symetryczna macierz $[g]$ odpowiada konduktancjom żyracji żyratorów.

n-wrotniki RLCŻ nazywamy równoważnymi, jeżeli dla dowolnej wartości $p = j\omega$ posiadają tę samą macierz admitancyjną $[Y]$.

Jeżeli $[y_o]$ oznacza macierz węzłową obwodu zwanego pierwotnym, natomiast $[y]$ macierz węzłową obwodu zwanego dalej równoważnym, to obwody te są równoważne, gdy:

$$[y] = [A]^t [y_o][A], \qquad (3)$$

gdzie $[A]$ jest nieosobliwą macierzą kwadratową (NxN) o stałych i rzeczywistych elementach i postaci:

$$[A] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} U & O \\ Q & R \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}\, n \\ \}\, N-n \end{array} \\ \underbrace{}_{n} \end{array} \qquad (4)$$

w której:

U = [U] - macierz jednostkowa,

O = [O] - macierz zerowa,

Q, R - dowolne podmacierze.

Transformacja (3) zwana w teorii macierzy przekształceniem kongruentnym była pierwotnie wprowadzona przez Cauera i Howitta dla układów RLC [3], [4].

Zakładając, że macierz $[A]$ ma postać:

$$[A] = [U] + [B]\Delta\tau, \qquad (5)$$

gdzie:

τ - zmienna niezależna,

to dla $\Delta\tau \to 0$ transformacja (3) przyjmie postać równania różniczkowego [1]

$$\frac{d}{d\tau}\left[y(\tau)\right] = \left[B\right]^t \left[y(\tau)\right] + \left[y(\tau)\right]\left[B\right] \tag{6a}$$

z warunkiem początkowym

$$\left[y(0)\right] = \left[y_o\right]. \tag{6b}$$

Macierz $[B]$ jest postaci:

$$\left[B\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n+1,1} & \dots & & b_{n+1,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{N1} & & & b_{NN} \end{bmatrix} \tag{7a}$$

gdzie:

$$|b_{ij}| \leq 1 \tag{7b}$$

Macierz $[y(\tau)]$, będąca rozwiązaniem układu równań (6), jest macierzą węzłową reprezentującą obwód zwany ciągle równoważnym. Uwzględniając zależność (2) łatwo zauważyć, że układ równań (6) jest słuszny również dla każdego typu elementów układu oddzielnie. Wprowadzając wektory parametrów elementów $[e_G]$, $[e_\Gamma]$, $[e_C]$, $[e_g]$, rozdzielając na części wyrażenie (6) według potęg p i korzystając z własności macierzy $[G]$, $[\Gamma]$, $[C]$, $[g]$ otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \left[\dot{e}_G(\tau)\right] &= \left[M\right]\left[e_G(\tau)\right] \\ \left[\dot{e}_\Gamma(\tau)\right] &= \left[M\right]\left[e_\Gamma(\tau)\right] \\ \left[\dot{e}_C(\tau)\right] &= \left[M\right]\left[e_C(\tau)\right] \\ \left[\dot{e}_g(\tau)\right] &= \left[N\right]\left[e_g(\tau)\right] \end{aligned} \tag{8}$$

gdzie:

$[\dot{e}] = \frac{d}{d\tau}[e]$,

$[e_x(0)] = [e_{xo}]$,

$x \in \{G, \Gamma, C, g\}$.

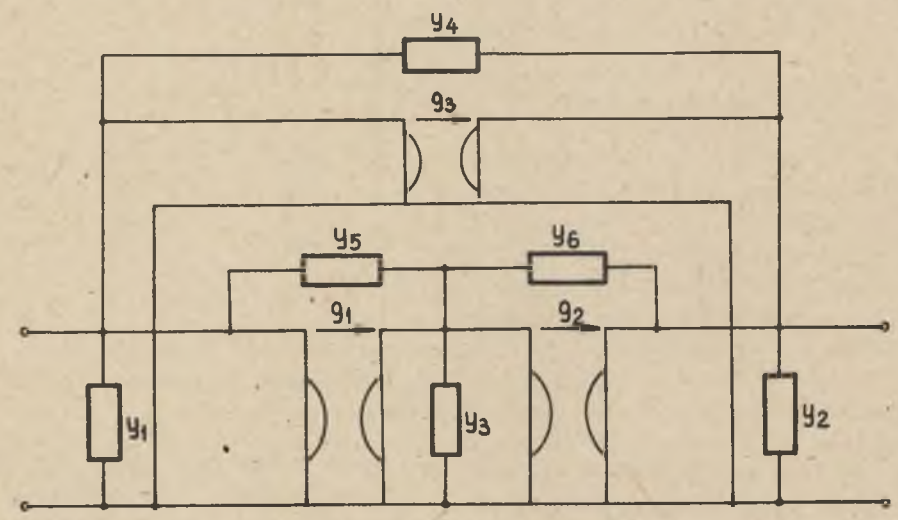
Wymiary wektorów:

$$\dim\left[e_G\right] = \dim\left[e_\Gamma\right] = \dim\left[e_C\right] = \vartheta, \quad \dim\left[e_g\right] = \eta,$$

gdzie $\vartheta = \frac{1}{2}N(N+1)$, $\eta = \frac{1}{2}N(N-1)$.

Elementy macierzy $[M]$ i $[N]$ są kombinacjami liniowymi współrzędnych wektora $\bar{b}$ określonego następująco:

$$\bar{b} = \left[b_{n+1,1}, b_{n+1,2}, \ldots, b_{NN}\right] = \left[b_1, b_2 \ldots, b_M\right] \tag{9}$$



Rys. 2

Na przykład, dla czwórnika przedstawionego na rys. 2 wektory parametrów elementów oraz macierze $[M]$ i $[N]$ mają postać [2]:

$$[e] = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6] \quad \text{dla} \quad [e_G], [e_T], [e_C]$$

$$[e_g] = [g_1, g_2, g_3]$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{31} & 0 & -(b_{31}+b_{32}+b_{33}) & 0 \\ 0 & 0 & b_{32} & 0 & 0 & -(b_{31}+b_{32}+b_{33}) \\ 0 & 0 & b_{31}+b_{32}+2b_{33} & 0 & b_{31}+b_{32}+b_{33} & b_{31}+b_{32}+b_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{32} & b_{31} \\ 0 & 0 & -b_{31} & 0 & b_{33}-b_{31} & -b_{31} \\ 0 & 0 & -b_{32} & 0 & -b_{32} & b_{33}-b_{32} \end{bmatrix}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & b_{32} & -b_{31} \\ 0 & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie dowolnego z układów (8) ma postać:

$$\left[e_x(\tau)\right] = \exp\left(\left[M\right]\tau\right)\left[e_{xo}\right] = \left\{\left[U\right] + \sum_{k=1} \frac{1}{k!}\left(\left[M\right]\tau\right)^k\right\}\left[e_{xo}\right] \tag{10}$$

Jeżeli τ jest małe, to wystarczająco dokładne rozwiązanie otrzymamy uwzględniając tylko pewną liczbę wyrazów szeregu. Na przykład, jeśli k=4; $\tau = 0{,}01$, to dokładność rozwiązania jest rzędu 10^{-6} [2]. Metoda obwodów ciągle równoważnych pozwala również obliczać w prosty sposób wrażliwości $S^H_{e_i}$ dowolnej funkcji H(p) (transmitancji, immitancji) obwodu równoważnego na zmiany parametrów e_i $(i = 1,2,\ldots,\nu_e)$ elementów obwodu. Można mianowicie wykazać [1], [2], że dla obwodów RLCZ ciągle równoważnych spełnione są układy równań:

$$\left[q_x\right] = -\left[M\right]^t \left[q_x\right] \left(\left[q_g\right] = -\left[N\right]^t \left[q_g\right]\right), \tag{11}$$

$$x \in \left\{G, \Gamma, C\right\}$$

gdzie:

$$\left[q_x\right]^t = \left[q_{e_1}, q_{e_2}, \ldots, q_e\right]$$

oznacza wektor wrażliwości półwzględnych 5 dla elementów jednego typu

$$q_{e_i} = \frac{1}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial e_i}, \tag{12}$$

$$\dim\left[q_x\right] = \nu \qquad \dim\left[q_g\right] = \eta$$

Wynika stąd, że rozwiązując układy równań (8) i (11), otrzymujemy zbiór wartości parametrów elementów i odpowiednich wrażliwości obwodu równoważnego. Obwód pierwotny i jego wrażliwości reprezentują warunki początkowe tych równań. Stwarza to możliwość generowania obwodów równoważnych z jednoczesną minimalizacją wrażliwości.

3. Wskaźnik wrażliwości

Jako wskaźnik wieloparametrowej wrażliwości funkcji obwodu H(p) przy określonej częstotliwości przyjęto następującą wielkość:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\nu} k_i^2\left(\left|S^H_{G_i}\right|^2 + \left|S^H_{\Gamma_i}\right|^2 + \left|S^H_{C_i}\right|^2\right) + \sum_{i=1}^{\eta} k_i^2\left|S^H_{g_i}\right|^2 = \sum_{i=1}^{4} \Phi_i \tag{13}$$

gdzie:

$$S^{H}_{e_i} = \frac{\partial H/H}{\partial e_i/e_i} = \frac{e_i}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial e_i} = e_i q_{e_i}, \tag{14}$$

oznacza wrażliwość względną funkcji H na zmiany parametru e_i [5], natomiast k_i - współczynnik wagowy.

Można wykazać [2,6], że tak określony wskaźnik wrażliwości stanowi miarę wariancji modułu względnego przyrostu funkcji obwodu powodowanego przypadkowymi zmianami wartości nominalnych parametrów elementów obwodu. Warto tu także wspomnieć, że poziom szumów wnoszonych przez oporniki występujące w układzie jest wprost proporcjonalny do wartości wskaźnika Φ [7].

Suma wrażliwości funkcji $H(p)$ względem wszystkich parametrów elementów obwodu RLCG jest niezmiennicza [5], a jej wartość wynosi:

$$\sum_{i=1}^{\nu_G} S^{H}_{G_i} + \sum_{i=1}^{\nu_r} S^{H}_{i} + \sum_{i=1}^{\nu_C} S^{H}_{C_i} + \sum_{i=1}^{\eta} S^{H}_{g_i} = K_G + K + K_C + K_g = K, \tag{15}$$

gdzie:

$$K = \begin{cases} 0, & \text{gdy } H \text{ jest transmitancją napięciowo-napięciową lub prądowo-prądową,} \\ -1, & \text{gdy } H \text{ jest transmitancją napięciowo-prądową lub impedancją,} \\ 1, & \text{gdy } H \text{ jest transmitancją prądowo-napięciową lub admitancją.} \end{cases}$$

Jednocześnie suma wrażliwości funkcji $H(p)$ względem parametrów elementów jednego typu

$$\sum_{i=1}^{\nu} S^{H}_{e_i} = [e_x]^t [q_x] \tag{16}$$

jest niezmiennikiem obwodów ciągle równoważnych. Istotnie jeśli zróżniczkujemy wyrażenie (16) względem i uwzględnimy wyrażenia (8) i (11), otrzymamy:

$$\frac{d}{d\tau}([e_x]^t [q_x]) = [\dot{e}_x]^t [q_x] + [e_x]^t [\dot{q}_x] = [e_x]^t [M]^t [q_x] - [e_x]^t [M]^t [e_x] = 0 \tag{17}$$

Uzyskany rezultat wskazuje, że w przypadku obwodów ciągle równoważnych składniki sumy (15) są stałe, a ich wartości zależą jedynie od struktury i wartości parametrów elementów obwodu pierwotnego. Pozwala to obliczyć minimum absolutne wskaźnika Φ [2, 8]. Zagadnienie polega na poszukiwaniu minimum funkcji (13) wielu zmiennych $S^{H}_{e_i}$ przy ograniczeniach (15) dla tych zmiennych. Rozważmy to zagadnienie dla jednego ze składników (13) i (15).

Niech

$$S^{H}_{G_i} = S'_i + jS''_i \quad i = 1,2,\ldots,\nu. \tag{18}$$

Wtedy

$$\Phi_1 = \sum_{i=1}^{\nu} k_i^2 \left|S^{H}_{G_i}\right|^2 = \sum_{i=1}^{\nu} k_i^2 (S_i'^2 + S_i''^2) \tag{19}$$

Ponadto

$$\sum_{i=1}^{\nu} S^{H}_{G_i} = \sum_{i=1}^{\nu} (S'_i + jS''_i) = K'_G + jK''_G \tag{20}$$

W celu znalezienia minimum wyrażenia (19) stosujemy metodę mnożników Lagrange'a.

Tworzymy funkcję Lagrange'a

$$L = \sum_{i=1}^{\nu} k_i (S_i'^2 + S_i''^2) + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{\nu} S'_i - K'_G\right) + \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^{\nu} S''_i - K''_G\right) \tag{21}$$

Punkt ekstremalny funkcji Φ_1 określają warunki:

$$\frac{\partial L}{\partial S_i} = 2k_i^2 S'_i + \lambda_1 = 0 \tag{22a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_i} = 2k_i^2 S''_i + \lambda_2 = 0 \tag{22b}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \sum_{i=1}^{\nu} S'_i - K'_G = 0 \tag{22c}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \sum_{i=1}^{\nu} S''_i - K''_C = 0 \tag{22d}$$

Z warunków (22a) i (22c) oraz (22b) i (22d) odpowiednio otrzymamy:

$$S_{G_j} = \frac{K_G}{k_j^2 \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{k_i^2}} \tag{23}$$

Zatem

$$\Phi_1^o = \frac{|K_G|^2}{\sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{k_i^2}} \tag{24}$$

Ponadto

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial s_i'^2} = 2k_i^2 > 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial s_i''^2} = 2k_i^2 > 0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial s_i' \, \partial s_i''} = 0 \tag{25}$$

więc Φ_1^o jest równe minimum funkcji Φ_1 w punkcie określonym zależnością (23).

Rozważając podobnie pozostałe składniki wyrażenia (13) stwierdzamy, że minimum wskaźnika Φ jest równe:

$$\Phi_{min}^o = \frac{1}{\sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{k_i^2}} \left(|K_G|^2 + |K_\Gamma^2| + |K_C|^2 \right) + \frac{1}{\sum_{i=1}^{\eta} \frac{1}{k_i^2}} |K_g|^2 \tag{26}$$

Zakładając, że współczynniki wagowe mają ustalone wartości (np. $k_i = 1$) można zauważyć, że wartość Φ_{min} jest tym mniejsza, im większe są liczby ν i η, a co za tym idzie, liczba węzłów obwodu. Tak więc powiększanie rozmiarów obwodu pierwotnego stwarza możliwość uzyskania obwodu o wskaźniku Φ dowolnie małym. Możliwość taką daje wykorzystanie koncepcji obwodów ciągle równoważnych.

4. Algorytm generacji

Z rozważań przeprowadzonych w punkcie 2 wynika, że w przypadku generacji obwodów równoważnych sprawą kluczową jest wybór macierzy [B](współrzędnych wektora $\bar{b}$) i zmiennej τ, tak aby rozwiązania układów równań (8) i (11) reprezentowały obwód fizycznie realizowalny (nieujemne wartości parametrów elementów R,L,C) o minimalnym wskaźniku wrażliwości. Zarówno parametry elementów, jak i wskaźnik wrażliwości są nieliniowymi funkcjami tych zmiennych.

Jeżeli jednak τ jest dostatecznie małe, to:

$$e_i(\tau, \bar{b}) = e_i(0, \bar{b}) = \dot{e}_i(0, \bar{b})\tau \quad i = 1, 2, \ldots, \nu(\eta) \tag{27}$$

oraz

$$\Phi(\tau,\bar{b}) = \Phi(0,\bar{b}) + \dot{\Phi}(0,\bar{b})\tau, \tag{28}$$

gdzie:

$$\dot{e} = \frac{de}{d\tau}, \quad \dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{d\tau}.$$

Ale

$e_i(0,\bar{b}) = e_i(0,0)$ - parametr obwodu pierwotnego,

$\Phi(0,\bar{b}) = \Phi(0,0)$ - wskaźnik obwodu pierwotnego,

gdyż:

$$\left[e_x(0,\bar{b})\right] = \exp([M]\tau)_{\tau=0}\left[e_{x0}\right] = [U]\left[e_{x0}\right] = \left[e(0,0)\right] \tag{29}$$

Z (8) i (9) a także z przedstawionego przykładu wynika, że

$$\dot{e}_i(0,\bar{b}) = \dot{e}_i(\bar{b}) = \sum_{j=1}^{\vartheta} m_{ij}(\bar{b})e_j(0,0) = \sum_{j=1}^{M} f_{ij}(\bar{e}_o)b_j, \tag{30}$$

gdzie:

$f_{ij}(\bar{e}_o)$ - kombinacje liniowe współrzędnych wektora parametrów elementów obwodu pierwotnego.

Można również wykazać [1], [2], że:

$$\dot{\Phi}(0,\bar{b}) = \dot{\Phi}(\bar{b}) = \sum_{j=1}^{M} \varphi_j(\bar{e}_o,\bar{q}_o)b_j, \tag{31}$$

gdzie:

$\varphi_j(\bar{e}_o, \bar{q}_o)$ - funkcje parametrów elementów i wrażliwości półwzględnych obwodu pierwotnego.

Zadanie minimalizacji wskaźnika Φ przy określonej częstotliwości może być zatem sformułowane jako następujące zadanie programowania liniowego (ZPL):

przy ograniczeniach:

$$\dot{e}_i(\bar{b}) \geqslant 0 \quad \text{jeśli} \quad e_i(\tau,\bar{b}) \geqslant e_i(0,0) \tag{32a}$$

$$e_i(\bar{b}) = 0 \quad \text{jeśli} \quad e_i(\tau,\bar{b}) = e_i(0,0) \tag{32b}$$

$$e_i(\bar{b}) \leqslant 0 \quad \text{jeśli} \quad e_i(\tau,\bar{b}) \leqslant e_i(0,0) \tag{32c}$$

$$i = 1,2,\ldots,\vartheta(\eta)$$

oraz

$$|b_j| \leq 1 \quad j = 1,2,\ldots,M \quad \text{(por. (7b))} \tag{32d}$$

znaleźć niezerowy wektor $\bar{b}_o$ taki, że:

$$\dot{\Phi}(\bar{b}_o) = \min\left\{\dot{\Phi}(\bar{b}) \leq 0\right\} \tag{32e}$$

Dla ustalonej liczby węzłów układu algorytm poszukiwania minimum wskaźnika Φ jest następujący:

1) obliczyć Φ (0,0),
2) rozwiązać zadanie programowania liniowego (32),
3) zakładając pewną wartość zmiennej τ (długość kroku) wygenerować obwód równoważny w oparciu o zależności (8),
4) obliczyć $\Phi(\tau,\bar{b}_o)$ i porównać z Φ(0,0). Do obliczania wskaźnika można wykorzystać zależność (11).

Jeżeli uzyskany spadek wartości wskaźnika jest większy od zadanej dokładności poszukiwań, powraca się do punktu 1 procedury, jeśli nie - obliczenia zostają zakończone.
Na ogół

$$\Phi_{min}(\tau,\bar{b}_o) \geq \Phi^{o}_{min} \tag{33}$$

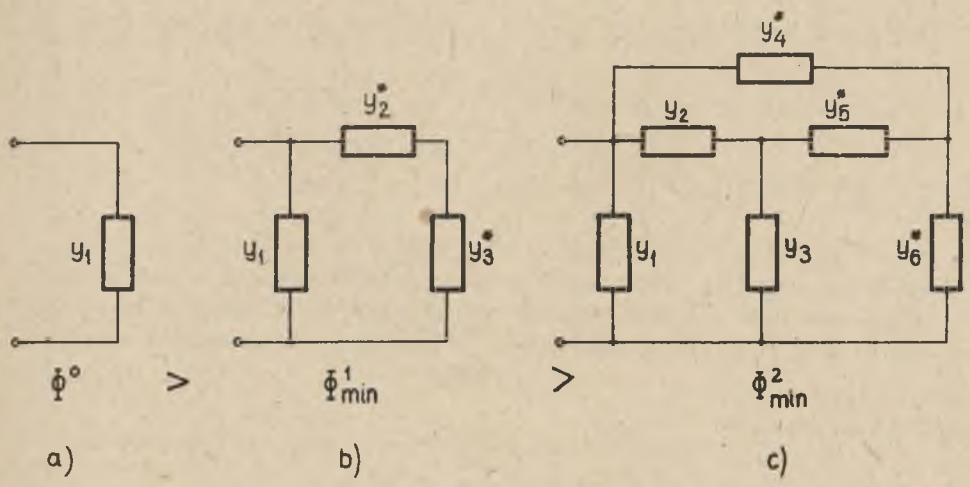
Powiększając liczbę węzłów obwodu zwiększamy rozmiar ZPL (rozmiar wektora $\bar{b}$), a jednocześnie stwarzamy możliwość wygenerowania obwodu, dla którego

$$\Phi_{min}(\tau,\bar{b}_k) \leq \Phi^{k}_{min} < \Phi^{k-1}_{min} < \ldots < \Phi^{o}_{min}, \tag{34}$$

gdzie:
k - numer kolejnego cyklu iteracyjnego.

Aby uzyskać taki wynik, należy po zakończeniu kolejnego cyklu iteracyjnego 1-4 dołączyć do uzyskanego obwodu równoważnego dodatkowe elementy zwiększając liczbę węzłów o jeden.

Na rys. 3 przedstawiono ideę takiego postępowania na przykładzie dwójnika. Elementy oznaczone gwiazdką są dołączane na początku kolejnego cyklu iteracyjnego. Wartości parametrów dołączonych elementów winny być takie, aby obwód pierwotny cyklu k-tego odpowiadał obwodowi równoważnemu w cyklu k-1. Oznacza to, że wartości niektórych parametrów winny być równe zero (np. y_2 na rys. 3b, y_4, y_5 na rys. 3c) na początku danego cyklu. Wybór ten winien także zapewnić to, że wielkości K_G, K_Γ, K_C, K_g nie zmieniają swych wartości.

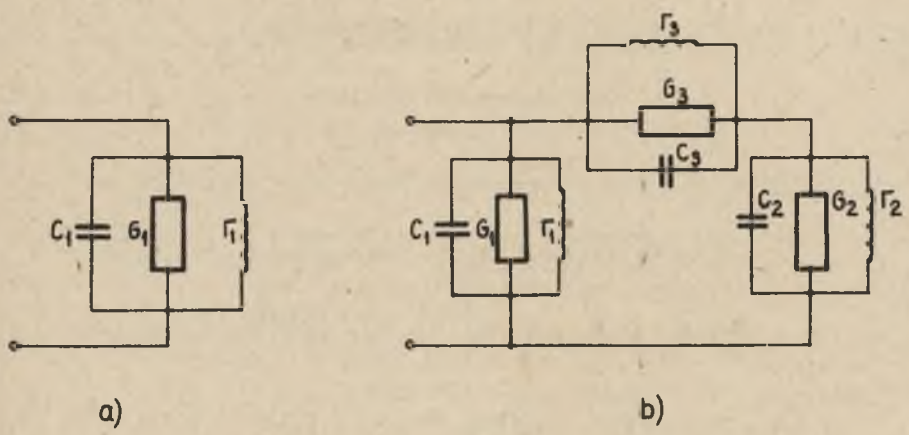


Rys. 3

5. Przykład

Rozważmy dwójnik RLC pokazany na rys. 4a. Niech parametry elementów tego dwójnika mają wartości:

$$G_1 = 0{,}5; \quad C_1 = 1; \quad \Gamma_1 = 2.$$



Rys. 4

Wartości te traktujemy jako unormowane. Wskaźnik wrażliwości admitancji dwójnika jest równy $\Phi_{min} = \Phi^0_{min} = 4{,}2$ przy pulsacji $\omega = 1$ (zakłada się $k_i = 1$ dla parametrów wszystkich elementów). Powiększając liczbę węzłów obwodu o jeden znajdujemy dwójnik równoważny o mniejszym wskaźniku Φ.

Obwód równoważny (rys. 4b) posiada następujące parametry wyjściowe:

$$[e_G]^t = [0,5 \quad 0 \quad 0,5]$$

$$[e_\Gamma]^t = [2 \quad 0 \quad 2]$$

$$[e_C]^t = [1 \quad 0 \quad 1]$$

Wybór G_3, Γ_3 i C_3 jest dowolny. Można łatwo sprawdzić, że $\Phi^1(0,0) = \Phi^0_{min}$. Generacja obwodu fizycznie realizowalnego o minimalnym wskaźniku Φ wymaga więc rozwiązania następującego zadania programowania liniowego [2]:

przy ograniczeniach

$$\dot{G}_3 \geqslant 0 \qquad (G_2+G_3)b_1 + (2G_2+G_3)b_2 \geqslant 3G_2 + 2G_3$$

$$\dot{\Gamma}_3 \geqslant 0 \Rightarrow \quad (\Gamma_2+\Gamma_3)b_1 + (2\Gamma_2+\Gamma_3)b_2 \geqslant 3\Gamma_2 + 2\Gamma_3$$

$$\dot{C}_3 \geqslant 0 \qquad (C_2+C_3(b_1 + (2C_2+C_3)b_2 \geqslant 3C_2 + 2C_3$$

oraz

$$b_1 \leqslant 2$$

$$b_2 \leqslant 2$$

znaleźć wektor $\bar{b} = [b_1, b_2] = [b_{21}, b_{22}]$, dla którego:

$$\dot{\Phi} = \alpha b_1 + \beta b_2 < 0 = min.$$

$$\alpha = y_1(y_2-y_3)|q_{y1}|^2 + y_2(y_2+y_3)|q_{y2}|^2 - y_3(y_2+y_3)|q_{y3}|^2 +$$

$$+ y_2^2(Re\{q_{y2}\}Re\{-q_{y1}-q_{y2}+q_{y3}\} + Im\{q_{y2}\}Im\{-q_{y1}-q_{y2}+q_{y3}\}) +$$

$$+ y_3^2(Re\{q_{y3}\}Re\{q_{y1}-q_{y2}+q_{y3}\} + Im\{q_{y3}\}Im\{q_{y1}-q_{y2}+q_{y3}\}),$$

$$\beta = -y_1y_2|q_{y1}|^2 - 2y_2^2|q_{y2}|^2 + y_2y_3|q_{y2}|^2 + y_3^2|q_{y3}|^2 +$$

$$+ y_3^2(Re\{q_{y3}\}Re\{q_{y1}-q_{y2}-q_{y3}\} + Im\{q_{y3}\}Im\{q_{y1}-q_{y2}-q_{y3}\}),$$

$$y_i \in \{G_i, \Gamma_i, C_i\} \; i = 1,2,3.$$

Pozwala to uzyskać dwójnik równoważny o następujących parametrach:

$$\left[e_G\right] = \begin{bmatrix} 0,440 \\ 0,092 \\ 0,198 \end{bmatrix} \quad \left[e_\Gamma\right] = \begin{bmatrix} 1,760 \\ 0,368 \\ 0,760 \end{bmatrix} \quad \left[e_C\right] = \begin{bmatrix} 0,880 \\ 0,184 \\ 0,380 \end{bmatrix}$$

dla którego wskaźnik wrażliwości przy pulsacji $\omega = 1$ jest równy:

$$\Phi_{min} = \sum_{i=1}^{\vartheta} \left| S^{Y}_{e_i} \right|^2 = 3,354.$$

Wartość ta jest większa od minimum globalnego

$$\Phi^{1}_{min} = \frac{1}{3} \left(\left|K_G\right|^2 + \left|K_\Gamma\right|^2 + \left|K_C\right|^2 \right) = 1,4,$$

ale mniejsza niż dla dwójnika pierwotnego (rys. 4a).

LITERATURA

[1] Schoeffler J.D.: The synthesis of minimum sensitivity networks. IEEE Trans. on Circuit Theory, June 1964.

[2] Garczarczyk Z.: Optymalizacja statyczna wybranych parametrów n-wejściowych, równoważnych układów RLCZ. Praca doktorska, Politechnika Śląska 1978.

[3] Cauer W.: Vierpole. Elek. Nachr. Tech. July 1929.

[4] Howitt N.: Group theory and the electric circuit. Phys. Rev. vol.31 1931.

[5] Geher K.: Teoria tolerancji i wrażliwości układów elektronicznych. WNT, Warszawa 1976.

[6] Garczarczyk Z.: O pewnym wskaźniku wrażliwości obwodu. Zeszyty Naukowe Pol.Śl. - Elektryka z. 52, 1977.

[7] Holt A.G., Lee M.R.: A relationship between sensitivity and noise. Int., J. Electronics, no 6, 1969.

[8] Kasper R., Schmidt G.: On minimum sensitivity networks. IEEE Trans. on Circuit Theory, December 1967.

[9] Calahan D.A.: Modern network synthesis, Hayden, New York, 1964.

[10] Newcomb R.W.: Linear multiport synthesis. McGraw-Hill, New York 1966.

Przyjęto do druku w maju 1979 r.

О ГЕНЕРАЦИИ 2n-ПОЛЮСНИКОВ RLCГ С МИНИМАЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Р е з ю м е

В статье представлен метод генераций эквивалентных 2n-полюсников RLCГ с минимальным коэффициентом чувствительности. Абсолютный минимум коэффициента можно уменьшить путем увлечения числа узлов в цепи. Это создает возможность генерации цепей с произвольно малым коэффициентом чувствительности. Алгоритм генераций использует теорию непрерывного эквивалентных цепей и линейное программирование.

ON GENERATION OF THE RLCZ n-PORTS WITH MINIMAL SENSITIVITY INDEX

S u m m a r y

The paper presents the method of generation of the RLCZ n-ports with minimal sensitivity index. Absolute minimum of the index decreases if the number of network nodes increases. It gives a possibility of generating networks with arbitrarily small sensitivity index. An algorithm of generation is based on the theory of continuously equivalent networks, and linear programming.