

Feliks Andermann

PRZYBLIŻONY SPOSÓB OKREŚLANIA SIŁ WZAJEMNEGO ODDZIAŁYWANIA POWIERZCHNIOWYCH ELEMENTÓW USTROJU BUDOWLANEGO

Streszczenie. W pracy przedstawiono sposób obliczania sił kontaktowych działających pomiędzy elementami ustroju budowlanego. Rozkład tych sił przyjmuje się w postaci sumy kilku funkcji składowych zawierających nieokreślone stałe parametry. Parametry te wyznacza się z warunku optymalnego spełnienia geometrycznych warunków brzegowych w skończonej liczbie wyróżnionych punktów miejsc kontaktu. Sposób został zademonstrowany na przykładzie obliczenia skrzyni fundamentowej.

1. Wprowadzenie

Ustroje budowlane składają się z elementów, które mogą mieć charakter prętowy, powierzchniowy lub bryłowy. Elementy te tworzą ustrój dzięki ich wzajemnemu połączeniu, które może być punktowe, liniowe lub powierzchniowe.

W miejscach występujących połączeń elementy obciążonego ustroju oddziałują na siebie siłami, znajomość których pozwala sprowadzić obliczenie statyczne ustroju do obliczenia wydzielonych elementów. Elementy te poddaje się działaniu przypadającego na nie zewnętrznego obciążenia ustroju oraz sił oddziaływania sąsiednich elementów, występujących w miejscach połączeń (siły kontaktowe).

Można zatem rozróżnić dwie fazy obliczenia statycznego ustroju wieloelementowego. Pierwsza faza polega na określeniu sił wzajemnego oddziaływania elementów składowych, zaś druga na obliczeniu poszczególnych wydzielonych elementów.

Pierwsza faza obliczeń jest szczególnie kłopotliwa w przypadku, jeżeli połączone ze sobą elementy mają charakter nieprętowy. Określenie sił wzajemnego oddziaływania elementów wymaga bowiem ustawienia równań geometrycznych, opisujących zależności zachodzące pomiędzy przemieszczeniami przyległych elementów w miejscach ich połączenia. W przypadku elementów nieprętowych równania te przyjmują zwykle formę trudną do rozwiązania względem niewiadomych sił wzajemnego oddziaływania.

Jedynie w szczególnie prostych przypadkach (np. w osiowo symetrycznych układach powierzchniowych) można uzyskać rozwiązania, które spełniają geometryczne warunki brzegowe we wszystkich punktach połączeń elementów składowych. Natomiast w większości przypadków konieczne jest stosowanie przybliżonych sposobów określania siły wzajemnego oddziaływania elementów.

Pierwszy sposób przybliżony polega na obliczeniu tych sił poprzez spełnienie warunków geometrycznych jedynie w pewnych wybranych punktach miejsc kontaktu.

Drugi sposób polega na przyjęciu funkcji rozkładu sił kontaktowych w postaci skończonego szeregu funkcyjnego zawierającego skończoną liczbę nieokreślonych stałych parametrów. Wartości tych parametrów wyznacza się z warunku optymalnego spełnienia warunków geometrycznych we wszystkich punktach miejsc połączenia elementów.

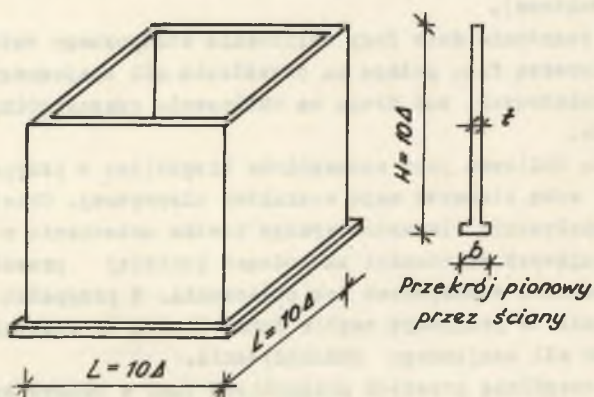
W niniejszej pracy podaje się sposób wyznaczania sił kontaktowych polegający na połączeniu obu wyżej wymienionych sposobów. Funkcję rozkładu sił kontaktowych przyjmuje się w postaci sumy kilku funkcji, zawierających nieokreślone parametry. Parametry te oblicza się z warunku optymalnego spełnienia warunków geometrycznych jedynie w ograniczonej liczbie punktów miejsc połączenia elementów.

Sposób ten jest szczególnie dogodny w przypadkach, gdy dla kontaktujących się elementów o charakterze nieprętowym znane jest rozwiązanie różnicowe dla dowolnego obciążenia brzegowego.

Tok postępowania zostanie przedstawiony na przykładzie ustroju złożonego z elementów powierzchniowych, a mianowicie skrzyni fundamentowej złożonej z czterech ścian tarczowych kontaktujących się wzdłuż pionowych krawędzi.

2. Opis ustroju oraz jego obciążenia

Skrzynia fundamentowa składa się z czterech kwadratowych ścian opartych za pośrednictwem łąw na podłożu gruntowym (rys. 1). Założono, że ściany

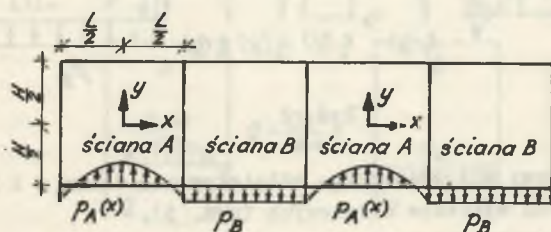


Rys. 1

są identyczne, podobnie jak ich łąwy fundamentowe. Postawiono sobie zadanie określenia stanu naprężenia w ścianach, wywołanego działaniem wpły-

wu krzywizny terenu w kierunku jednej z par ścian. Wpływ ten jest następstwem utworzenia się niecki górniczej pod obliczanym ustrojem.

W przypadku krzywizny wypukłej zmiana reakcji podłoża gruntowego, stanowiąca obciążenie ustroju, ma postać pokazaną na rys. 2 (por. [1], str. 185). Ustrój pokazano tu w rozwinięciu.



Rys. 2

Funkcja obciążenia dolnego brzegu ścian A ma postać

$$p_A(x) = \frac{C}{2R} b \left(x^2 - \frac{L^2}{12} \right), \quad (1)$$

zaś ścian B

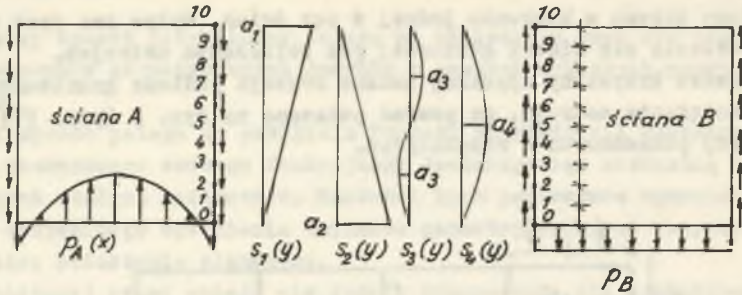
$$p_B = \frac{C}{24} \frac{L^2}{R} b. \quad (2)$$

Wprowadzono następujące oznaczenia:

- R - promień krzywizny terenu [m],
- C - stała podatności podłoża [T/m³],
- b - szerokość ławy fundamentowej [m],
- L=H=10 Δ - długość i wysokość ścian [m],
- t - grubość ścian [m].

3. Założenia i składowe funkcje rozkładu sił kontaktowych

Przyjęto, że materiał ścian jest liniowo sprężysty. Z uwagi na małe wymiary przekroju poprzecznego ław w porównaniu z wymiarami ścian pominięto w obliczeniach sztywność giętną ław. Ponieważ ściany skrzyń fundamentowych mają na ogół małą grubość w porównaniu z innymi wymiarami, zaś obciążenie działa w ich płaszczyźnie środkowej, pominięto sztywność giętną ścian w kierunku prostopadłym do płaszczyzny środkowej. Siły wzajemnego oddziaływania muszą zatem leżeć w środkowych płaszczyznach kontaktujących się ścian. Są to pionowe siły krawędziowe pokazane na rys. 3.



Rys. 3

Rozkład krawędziowy sił wzajemnego oddziaływania ścian A i B przyjęto w postaci sumy czterech wykresów składowych (rys. 3).

Funkcję rozkładu sił kontaktowych przyjęto zatem w postaci

$$\begin{aligned}
 s(y) &= s_1(y) + s_2(y) + s_3(y) + s_4(y) = \\
 &= a_1\left(0,5 + \frac{y}{H}\right) + a_2\left(0,5 - \frac{y}{H}\right) + a_3 \sin \frac{2y}{H} + a_4\left(1 - \frac{4y^2}{H^2}\right).
 \end{aligned} \quad (3)$$

Z warunków równowagi ściany A lub B wynika, że

$$\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} s(y) dy = \frac{C I^3}{48 R} b, \quad (4)$$

i tym samym otrzymamy zależność

$$a_4 = \frac{C I^3}{32 R} b - 0,75(a_1 + a_2). \quad (5)$$

Nieokreślone i niezależne parametry a_1 do a_3 wyznaczamy z warunku optymalnego spełnienia geometrycznych warunków brzegowych w jedenastu punktach przyjętych na pionowej krawędzi ustroju (0 do 10), zgodnie z rys. 3. O wyborze tych punktów zadecydował fakt, że dysponujemy ogólnym rozwiązaniem różnicowym kwadratowej tarczy ([1]), dla siatki różnicowej, której brzegowe punkty węzłowe pokrywają się z punktami 1 do 10.

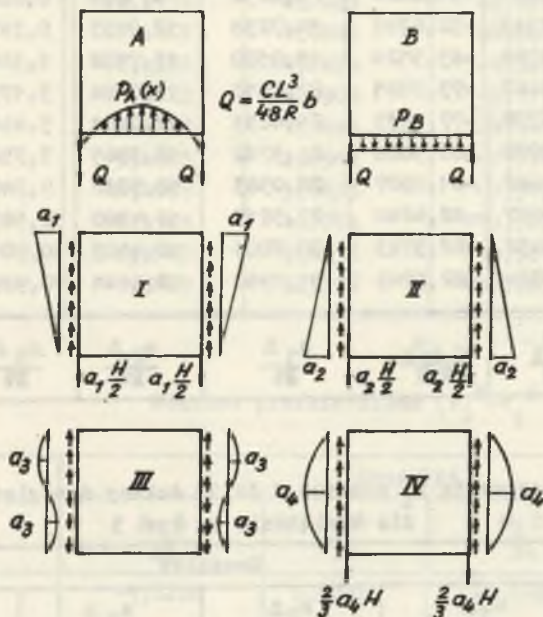
Optymalne spełnienie warunków brzegowych wymaga, by różnica pionowych przemieszczeń ścian A i B w punktach 0 do 10 była najmniejsza.

Wartości parametrów obliczamy zatem z warunku

$$\phi = \sum_{i=0}^{10} (v_i^B - v_i^A)^2 = \min. \quad (6)$$

4. Przeszacowania dla składowych schematów obciążeń

Obliczamy pionowe przeszacowania punktów 1 do 10 względem punktu dolnego 0 dla kwadratowej ściany (rys. 3), rozpatrując składowe schematy obciążeń pokazane na rys. 4. Korzystamy przy tym z tablic i wzorów zawartych w pracy [1].



Rys. 4

Przeszacowaniem skierowanym do góry przypisano wartość dodatnią. Obliczone przeszacowania podano w tabl. 1.

W tablicach 2 i 3 zestawiono przeszacowania v_1 dla ścian A i B obciążonych zgodnie z rys. 3. Otrzymano je w oparciu o tabl. 1 oraz zależność (5).

5. Obliczenie parametrów

W tablicy 4 zestawiono wartości różnic przeszacowań ścian A i B. Różniczkując funkcję ϕ ze wzoru (6) względem parametrów a_k ($k=1,2,3$), otrzymamy

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^{10} 2(v_i^B - v_i^A) \frac{\partial (v_i^B - v_i^A)}{\partial a_k} \quad (7)$$

Tablica 1

Pionowe przemieszczenia v_1 punktów 1 do 10 względem punktu 0
dla schematów obciążenia wg rys. 4

Przemieszczenie	Schemat obciążenia					
	A	B	I	II	III	IV
v_1	6,5060	-31,6888	8,6236	8,1098	0,0284	11,4950
v_2	12,1513	-52,6389	14,7238	12,9955	0,3603	19,5510
v_3	16,4966	-65,5124	18,9590	15,7578	1,3805	24,9221
v_4	19,5642	-73,2881	22,0418	17,2696	3,1730	28,4690
v_5	21,5778	-77,8935	24,4251	18,0481	5,4649	30,7471
v_6	22,7998	-80,5026	26,3782	18,3965	7,7568	32,1111
v_7	23,4642	-81,8507	28,0563	18,5036	9,5493	32,8173
v_8	23,7607	-82,4246	29,5215	18,4960	10,5697	33,0828
v_9	23,8452	-82,5763	30,7004	18,4603	10,9015	33,1128
v_{10}	23,8524	-82,5849	31,1980	18,4441	10,9299	33,0942
mnożniki:	$\frac{C \Delta^3 b}{E t R}$	$\frac{C \Delta^3 b}{E t R}$	$\frac{a_1 \Delta}{E t}$	$\frac{a_2 \Delta}{E t}$	$\frac{a_3 \Delta}{E t}$	$\frac{a_4 \Delta}{E t}$

Tablica 2

Pionowe przemieszczenia v_1 punktów 1 do 10 ściany A względem punktu 0
dla obciążenia wg rys. 3

Przemieszczenie	Mnożniki			
	$\frac{a_1 \Delta}{E t}$	$\frac{a_2 \Delta}{E t}$	$\frac{a_3 \Delta}{E t}$	$\frac{C \Delta^3 b}{E t R}$
v_1	0,5114	-0,0024	0,0284	2,2729
v_2	1,6667	-0,0606	0,3603	3,6933
v_3	2,9338	-0,2674	1,3805	4,1274
v_4	4,0822	-0,6900	3,1730	3,8867
v_5	5,0122	-1,3648	5,4649	3,3866
v_6	5,6868	-2,2949	7,7568	2,9552
v_7	6,1094	-3,4433	9,5493	2,7608
v_8	6,3161	-4,7094	10,5697	2,8015
v_9	6,3743	-5,8658	10,9015	2,9440
v_{10}	6,3765	-6,3774	10,9299	3,0179

Tablica 3

Pionowe przemieszczenia v_i punktów 1 do 10 ściany B względem punktu 0 dla obciążenia wg rys. 3

Przemieszczenie	Mnożniki			
	$\frac{a_1 \Delta}{Et}$	$\frac{a_2 \Delta}{Et}$	$\frac{a_3 \Delta}{Et}$	$\frac{c \Delta^3 b}{EtR}$
v_1	-0,5114	0,0024	-0,0284	4,2331
v_2	-1,6667	0,0606	-0,3603	8,4580
v_3	-2,9338	0,2674	-1,3805	12,3692
v_4	-4,0822	0,6900	-3,1730	15,6775
v_5	-5,0122	1,3648	-5,4649	18,1912
v_6	-5,6868	2,2949	-7,7568	19,8446
v_7	-6,1094	3,4433	-9,5493	20,7034
v_8	-6,3161	4,7094	-10,5697	20,9592
v_9	-6,3743	5,8658	-10,9015	20,9012
v_{10}	-6,3765	6,3774	-10,9299	20,8345

Różnice przemieszczeń ($v_i^B - v_i^A$)

Tablica 4

$v_i^B - v_i^A$	Mnożniki			
	$\frac{a_1 \Delta}{Et}$	$\frac{a_2 \Delta}{Et}$	$\frac{a_3 \Delta}{Et}$	$\frac{c \Delta^3 b}{EtR}$
$v_1^B - v_1^A$	-1,0228	0,0048	-0,0568	1,9602
$v_2^B - v_2^A$	-3,3354	0,1212	-0,7206	4,7647
$v_3^B - v_3^A$	-5,8676	0,5348	-2,7610	8,2418
$v_4^B - v_4^A$	-8,1644	1,3800	-6,3460	11,7908
$v_5^B - v_5^A$	-10,0244	2,7296	-10,9298	14,8046
$v_6^B - v_6^A$	-11,3736	4,5898	-15,5136	16,8894
$v_7^B - v_7^A$	-12,2188	6,8866	-19,0986	17,9426
$v_8^B - v_8^A$	-12,6322	9,4188	-21,1394	18,1577
$v_9^B - v_9^A$	-12,7486	11,7316	-21,8030	17,9572
$v_{10}^B - v_{10}^A$	-12,7530	12,7548	-21,8598	17,8166

Z warunku (6) wynika, że pochodną (7) należy przyrównać do zera dla $k=1, 2$ i 3 , co prowadzi do trzech równań (8).

$$\sum_{i=1}^{10} (v_i^B - v_i^A) \frac{\partial(v_i^B - v_i^A)}{\partial a_1} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{10} (v_i^B - v_i^A) \frac{\partial(v_i^B - v_i^A)}{\partial a_2} = 0 \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{10} (v_i^B - v_i^A) \frac{\partial(v_i^B - v_i^A)}{\partial a_3} = 0.$$

W wyrażeniach sumowych (7) i (8) uwzględniono, że $v_0^B = v_0^A = 0$.

Każde z równań (8) można otrzymać tabelarycznie. Np. pierwsze równanie (8) otrzymamy, mnożąc każdy z wierszy tabl. 4 przez wartość występującą w pierwszej kolumnie tego wiersza (tabl. 5) i sumując kolumny otrzymanej w ten sposób tablicy.

Tablica 5

Ustawienie pierwszego równania (8)

i	Mnożniki			
	$a_1 \frac{\Delta^2}{(Et)^2}$	$a_2 \frac{\Delta^2}{(Et)^2}$	$a_3 \frac{\Delta^2}{(Et)^2}$	$\frac{C \Delta^4 b}{R(Et)^2}$
1	1,0461	-0,0049	0,0581	-2,0049
2	11,1244	-0,4042	2,4035	-15,8922
3	34,4287	-3,1380	16,2004	-48,3596
4	66,6574	-11,2669	51,8113	-96,2648
5	100,4886	-27,3626	109,5647	-148,4072
6	129,3588	-52,2025	176,4455	-192,0933
7	149,2991	-84,1460	233,3620	-219,2370
8	159,5725	-118,9802	267,0371	-229,3717
9	162,5268	-149,5615	277,9577	-228,9292
10	162,6390	-162,6620	278,7780	-227,2151
Σ	977,1419	-609,7288	1413,6183	-1407,7750=0

Położenie otrzymamy drugie i trzecie równanie (8) w następującej postaci

$$\begin{aligned}
 & - 609,7287 a_1 \frac{\Delta^2}{(Et)^2} + 467,1765 a_2 \frac{\Delta^2}{(Et)^2} - 976,5937 a_3 \frac{\Delta^2}{(Et)^2} + \\
 & + 871,6966 \frac{C \Delta^4 b}{R(Et)^2} = 0, \\
 & - 1413,6183 a_1 \frac{\Delta^2}{(Et)^2} - 976,5937 a_2 \frac{\Delta^2}{(Et)^2} + 2173,4020 a_3 \frac{\Delta^2}{(Et)^2} + \\
 & - 2032,4609 \frac{C \Delta^4 b}{R(Et)^2} = 0.
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie równań (8) prowadzi do wartości

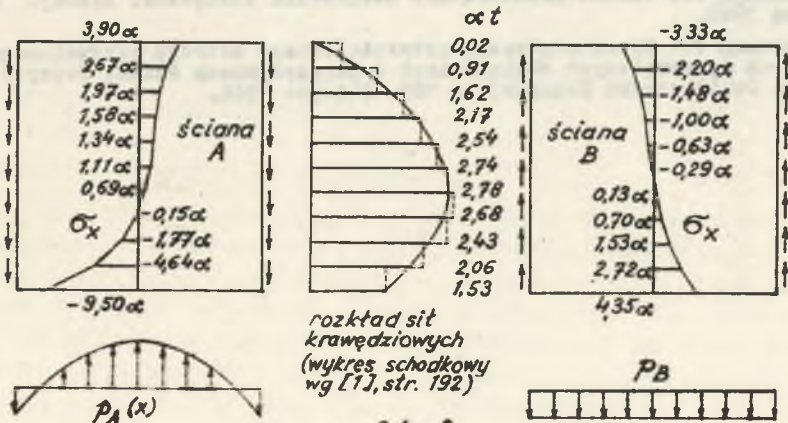
$$a_1 = 1,5274 \frac{C}{R} b \Delta^2; \quad a_2 = 0,0236 \frac{C}{R} b \Delta^2; \quad a_3 = -0,0497 \frac{C}{R} b \Delta^2. \quad (9)$$

Z równania (5) wyznaczamy

$$a_4 = 1,9618 \frac{C}{R} b \Delta^2. \quad (10)$$

6. Przybliżony rozkład sił kontaktowych

Na rys. 5 pokazano rozkład sił kontaktowych wynikający z przyjętej postaci funkcji $s(y)$ - (3) oraz z obliczonych wartości parametrów (9) i (10).



rozkład sił krawędziowych (wykres schodkowy wg [1], str. 192)

$$\alpha = \frac{C b \Delta^2}{R t}$$

Bys. 5

Liniją schodkową zaznaczono przybliżony rozkład sił kontaktowych, jaki otrzymuje się przez zastosowanie metody sił przy spełnieniu geometrycznych warunków brzegowych we wszystkich wyróżnionych punktach pionowej krawędzi ustroju skrzyniowego. Tę drogę obliczenia przedstawiono w pracach [1] (str. 192) i [2]. Wymaga ona rozwiązania 10 równań kanonicznych względem 10 niewiadomych sił kontaktowych, działających w wyróżnionych punktach krawędziowych jako siły skupione.

Porównanie obu wykresów rozkładu sił kontaktowych wykazuje ich dużą zgodność. Podane na rysunku rzędne dotyczą wykresu krzywoliniowego.

Na rys. 5 pokazano również wykresy naprężeń σ_x w połowie długości ścian A i B, uzyskane w oparciu o tablice pracy [1]. Otrzymano te same wartości naprężeń dla obu rozkładów sił kontaktowych.

7. Wniosek

Przedstawiony sposób określania sił wzajemnego oddziaływania elementów ustroju budowlanego umożliwia, przy właściwym doborze składowych funkcji rozkładu tych sił, uzyskanie rozwiązania nie odbiegającego dokładnością od rozwiązań otrzymywanych innymi sposobami, a wymagających bardziej pracochłonnych obliczeń. W badanym przypadku skrzyni fundamentowej rozkład sił krawędziowych otrzymano na drodze rozwiązania trzech równań algebraicznych podczas gdy rozwiązanie metodą sił, prowadzące do rozkładu schodkowego, wymaga ustawienia i rozwiązania 10 takich równań.

LITERATURA

- [1] Andermann F.: Tarcze prostokątne. Obliczenia statyczne. Arkady. Warszawa 1966.
- [2] Andermann F.: Praca statyczna czterościennego ustroju skrzyniowego przy pewnych symetrycznych obciążeniach w płaszczyznach ścian. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej nr 169. Gliwice 1966.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОНТАКТНЫХ СИЛ ПОВЕРХНОСТНЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ СТРОИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА.

Р е з ю м е

В работе представлен способ определения сил взаимного влияния элементов строительного устройства.

Распределение этих сил принято как сумму нескольких функции содержащих неизвестные, постоянные параметры. Эти параметры определяются из условия оптимального исполнения геометрических условий в нескольких избранных точках контактных мест.

Способ представляется на примере расчета фундаментной коробки.

APPROXIMATE METHOD OF DETERMINATION OF CONTACT FORCES BETWEEN
AREA ELEMENTS OF A BUILDING STRUCTURE

S u m m a r y

In the paper a method of calculation of contact forces between structure elements is given. The distribution of the contact forces is taken as a sum of several functions containing unknown constant parameters. This parameters are found by making use of the condition of optimum fulfilment of the geometrical conditions in some chosen points of the contact places. The method is presented on an example of a foundation chest calculation.